13 Магнитные свойства электронного газа

13.1 Магнетизм – квантовое явление

При последовательно классическом описании систем заряженных частиц явление магнетизма отсутствует, хотя заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле по замкнутым траекториям и создают магнитный момент. Это утверждение доказано в теореме Бора – ван Леевен (1911; 1919): магнитный момент классической системы заряженных частиц в состоянии термодинамического равновесия равен нулю.

Доказательство основано на рассмотрении классического статистического интеграла

$$Z_N = \int \exp\left(-\beta H(\{\vec{p}_i, \vec{r}_i\})\right) \prod_{i=1}^{N} d\vec{p}_i d\vec{r}_i,$$

где $H(\{\vec{p}_i, \vec{r}_i\})$ – функция Гамильтона системы частиц с зарядом e. Поместим систему в стационарное магнитное поле, которое задается векторным потенциалом $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}_i)$. Тогда $(\vec{p}_i, \vec{r}_i) \to \left(\vec{\mathcal{P}}_i, \vec{r}_i\right)$ где $\vec{\mathcal{P}}_i = \vec{p}_i + (e/c)\vec{\mathcal{A}}$ – обобщенный импульс частицы, и

$$Z_N(\vec{\mathcal{A}}) = \int \exp\left[-\beta H\left(\{\vec{\mathcal{P}}_i - (e/c)\vec{A}_i, \vec{r}_i\}\right)\right] \prod_{i=1}^{N} d\vec{\mathcal{P}}_i d\vec{r}_i. \qquad (1)$$

Перейдем в (1) от интегрирования по $\vec{\mathcal{P}}_i$ к интегрированию по $\vec{p}_i$:

$$d\vec{\mathcal{P}}_i d\vec{r}_i = \frac{\partial(\vec{\mathcal{P}}_i, \vec{r}_i)}{\partial(\vec{p}_i, \vec{r}_i)} d\vec{p}_i d\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}_i}{\partial\vec{p}_i} d\vec{p}_i d\vec{r}_i = d\vec{p}_i d\vec{r}_i,$$

поэтому

$$Z_N(\vec{\mathcal{A}}) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} d\vec{p}_i d\vec{r}_i \exp\left[-\beta H_1\left(\vec{p}_i, \vec{r}_i\right)\right] = Z_N(0),$$

т. е. статистический интеграл не зависит от $\vec{\mathcal{A}}$, а следовательно, и от $\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{r}ot\vec{\mathcal{A}}$. Таким образом, магнитный момент единицы объема (намагниченность) системы равен нулю:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{kT}{V} \frac{\partial \ln Z_N(\vec{\mathcal{A}})}{\partial \vec{\mathcal{H}}} = 0.$$

Физическая причина этого заключается в том, что магнитное поле не меняет энергию орбитального движения заряженных частиц и не нарушает однородности пространственного распределения – через каждую точку проходят траектории со всеми возможными импульсами и средний суммарный ток равен нулю (с учетом токов, возникающих вблизи поверхности, ограничивающей объем системы).

Наблюдаемый магнетизм имеет квантовую природу, и в качестве источников магнетизма необходимо назвать два основных фактора:
1) существование собственного магнитного момента заряженной частицы, связанного со спином, взаимодействие которого с магнитным полем приводит к уменьшению энергии системы и парамагнитному эффекту;
2) квантование уровней, связанное с финитным характером орбитального движения заряженной частицы в магнитном поле и приводящее к увеличению энергии и диамагнитному эффекту.

13.2 Парамагнетизм Паули

Классическая теория П. Ланжевена (1905) для парамагнитных веществ дает магнитную восприимчивость в случае слабых магнитных полей в виде $\chi = A/T$ – эта формула известна как закон Кюри (1895). Однако для ряда металлов было обнаружено поведение, не согласующееся с законом Кюри $\chi \equiv \partial\mathcal{M}/\partial\mathcal{H} \simeq \mathrm{const}$ в широком интервале температур. Объяснение этого эффекта было дано В. Паули (1927), который предположил, что парамагнетизм металлов обусловлен не магнитными моментами ионов решетки, а свойствами электронного газа.

Рассмотрим систему N частиц со спином $1/2$, помещенную в магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}$. Одночастичный оператор Гамильтона имеет вид

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \vec{\mu}\vec{\mathcal{H}},$$

где $\vec{\mu} = (e/mc)\vec{s}$ – оператор собственного магнитного момента; $\vec{s} = \hbar\vec{\sigma}/2$ – оператор спина; $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули. Вводя магнетон Бора $\mu_B = e\hbar/2mc$ и направляя ось Z вдоль $\vec{\mathcal{H}}$, получим собственные значения оператора $\hat{H}_1$ – энергетический спектр частицы $\varepsilon_{p\sigma} = p^2/2m - \sigma\mu_B\mathcal{H}$, где $\sigma = +1$ отвечает ориентации спина вдоль направления магнитного поля и $\sigma = -1$ – ориентации против поля $\vec{\mathcal{H}}$. (Мы здесь пренебрегаем влиянием $\vec{\mathcal{H}}$ на орбитальное движение частиц.) Таким образом, внешнее магнитное поле снимает вырождение по спину, и каждому значению p теперь отвечают два энергетических уровня: $\varepsilon_{p,\sigma=+1} = p^2/2m - \mu_B\mathcal{H}$, $\varepsilon_{p,\sigma=-1} = p^2/2m + \mu_B\mathcal{H}$. Соответствующие числа заполнения обозначим n_p^+ и n_p^-. Собственные значения энергии системы N частиц в представлении чисел заполнения даются формулой

$$E_{\{n_p^+,n_p^-\}} = \sum_{p,\sigma} \varepsilon_{p\sigma} n_{p\sigma} = \sum_p \left[(\varepsilon_p - \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}})\, n_p^+ + (\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}})\, n_p^- \right], \qquad (2)$$

а большая статистическая сумма – равенством

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \sum_{\{n_p^+,n_p^-\}} \exp\left\{ -\beta \sum_p \left[(\varepsilon_p - \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}} - \mu)\, n_p^+ + (\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}} - \mu)\, n_p^- \right] \right\} = \\ &= \sum_{\{n_p^+,n_p^-\},} \exp\left\{ -\beta \sum_p \left[\left(\varepsilon_p - \mu^+\right) n_p^+ + \left(\varepsilon_p - \mu^-\right) n_p^- \right] \right\} = \tilde{Z}^{(+)}\tilde{Z}^{(-)}, \qquad (3) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_p = p^2/2m$, $\Delta\varepsilon_{\mathcal{H}} = \mu_B\mathcal{H}$, и

$$\tilde{Z}^{(\pm)} = \sum_{\{n_p^\pm\}} \exp\left[-\beta \sum_p \left(\varepsilon_p - \mu^\pm\right) n_p^\pm \right] = \prod_p Z_p^{(\pm)} \; - \qquad (4)$$

статсуммы подсистем частиц, ориентированных соответственно вдоль $(+)$ и против поля $(-)$. Химические потенциалы этих подсистем есть

$$\mu^+ = \mu + \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}}, \;\; \mu^- = \mu - \Delta\varepsilon_{\mathcal{H}},$$

а

$$Z_p^{(\pm)} = \sum_{n_p^\pm} \exp\left[-\beta \left(\varepsilon_p - \mu^\pm\right) n_p^\pm \right] \; -$$

статсуммы отдельных состояний $(p, \sigma = +1)$ и $(p, \sigma = -1)$.

Покажем теперь, что средний магнитный момент единицы объема системы $\mathcal{M}$ можно найти по формуле $\mathcal{M} = (kT/V)\partial \ln \tilde{Z}/\partial\mathcal{H}$ (что отвечает термодинамическому $\mathcal{M} = -(1/V)\partial J/\partial\mathcal{H}$). Так как

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mathcal{H}} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \ln \tilde{Z}^{(+)}}{\partial \mathcal{H}} + \frac{\partial \ln \tilde{Z}^{(-)}}{\partial \mathcal{H}} \right) =$$

$$= \sum_p \left[\frac{1}{Z_p^{(+)}} \sum_{n_p^+} \mu_B n_p^+ e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu^+) n_p^+} + \frac{1}{Z_p^{(-)}} \sum_{n_p^-} \mu_B n_p^- e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu^-) n_p^-} \right] =$$

$$= \sum_p \left[\sum_{n_p^+} \mu_B n_p^+ P_{n_p^+} + \sum_{n_p^-} \left(-\mu_B n_p^- \right) P_{n_p^-} \right], \qquad (5)$$

то

$$\frac{1}{\beta V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mathcal{H}} = \frac{1}{V} \sum_p \mu_B \left[\langle n_p^+ \rangle - \langle n_p^- \rangle \right] = \frac{1}{V} \left[\langle N^+ \rangle - \langle N^- \rangle \right] \mu_B. \qquad (6)$$

В (5) и (6) мы использовали определение

$$P_{n_p^\pm} = \frac{1}{Z_p^{(\pm)}} \exp \left[-\beta \left(\varepsilon_p - \mu^\pm \right) n_p^\pm \right]$$

вероятности заселения уровня p $n_p^\pm$ частицами. Правая часть равенства (6) и есть средняя проекция магнитного момента единицы объема системы на направление внешнего поля.

Большой потенциал $J_\mathcal{H} = -kT \ln \tilde{Z}$ системы есть сумма двух слагаемых, каждое из которых относится к определенной ориентации спина и формально может быть записано как для случая $\mathcal{H} = 0$, но с переопределенным химическим потенциалом:

$$J_\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[J_0(\mu^+) + J_0(\mu^-) \right], \qquad (7)$$

где множитель $1/2$ учитывает, что в определение J_0 входил фактор $g_s = 2$, который отсутствует здесь из–за снятия вырождения. Все проделанное означает, что мы рассматриваем систему, состоящую из двух подсистем: с $\langle N^+ \rangle$ частицами с проекцией спина $+1/2$ и химическим потенциалом $\mu^+ = \mu + \mu_B \mathcal{H}$ и с $\langle N^- \rangle$ частицами с проекцией спина $-1/2$ и химическим потенциалом $\mu^- = \mu - \mu_B \mathcal{H}$.

Дальнейшие вычисления проделаем в приближении слабого поля $\mu_B \mathcal{H} \ll kT$, разлагая J_0 в ряд по степеням $(\mu^\pm - \mu)$ и ограничиваясь квадратичными по этой разности членами:

$$J_0(\mu^\pm) \approx J_0(\mu) + \frac{\partial J_0(\mu)}{\partial \mu}(\mu^\pm - \mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_0(\mu)}{\partial \mu^2}(\mu^\pm - \mu)^2 =$$

$$= J_0(\mu) \pm \frac{\partial J_0(\mu)}{\partial \mu}\mu_B \mathcal{H} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_0(\mu)}{\partial \mu^2}(\mu_B \mathcal{H})^2. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), найдем:

$$J_{\mathcal{H}} \approx J_0(\mu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_0(\mu)}{\partial \mu^2}(\mu_B \mathcal{H})^2. \tag{9}$$

И магнитная восприимчивость есть

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 J_{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{H}^2} = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 J_0(\mu)}{\partial \mu^2}\mu_B^2. \tag{10}$$

Так как

$$n = -\frac{1}{V}\frac{\partial J_0(\mu)}{\partial \mu},$$

то

$$\chi = \frac{\partial n}{\partial \mu}\mu_B^2. \tag{11}$$

Вычислим $\partial n/\partial \mu$, считая ферми–газ вырожденным: $T \ll T_F$. Из (12.20) находим

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} \approx \frac{4\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\mu^{1/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right].$$

Используя (12.22) и пренебрегая членами $o((kT/\varepsilon_F)^2)$, найдем:

$$\chi \approx \frac{3}{2}\frac{n}{\varepsilon_F}\mu_B^2\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Итак, мы показали, что $\chi \simeq \mathrm{const} > 0$ для вырожденного газа, т. е. спин частицы обеспечивает парамагнетизм.

Легко убедиться, что если бы можно было реализовать условия применимости больцмановского приближения $T \gg T_F$, в котором $\partial n/\partial \mu = n/kT$, то для парамагнитной восприимчивости получили бы закон Кюри

$$\chi = \frac{n\mu_B^2}{kT}. \tag{13}$$

[Докажите (13)].

13.3 Диамагнетизм Ландау

Утверждение Бора – ван Леевен остается в силе и при переходе к распределению Ферми, если не принимать во внимание квантования орбитального движения электронов. Но при наличии магнитного поля движение электронов в плоскости, перпендикулярной полю, является финитным, что приводит к дискретному энергетическому спектру для поперечных степеней свободы.

Пусть частица с зарядом e движется в постоянном однородном магнитном поле, направленном по оси Z. Векторный потенциал можно выбрать в виде $\vec{\mathcal{A}} = (0, \mathcal{H}x, 0)$ (в этом случае $\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{H}\vec{n}_z$, $\vec{n}_z$ – единичный вектор, направленный по оси Z). Функция Гамильтона частицы имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{2m}\left[\mathcal{P}_x^2 + (\mathcal{P}_y - e\mathcal{H}x/c)^2 + \mathcal{P}_z^2\right], \tag{14}$$

где $\mathcal{P}_i = mv_i + \frac{e}{c}\mathcal{A}_i$ – обобщенные импульсы $(i = x, y, z)$. В данном случае $\mathcal{P}_x = p_x$, $\mathcal{P}_z = p_z$. Так как H_1 не зависит от y и z, то $\dot{\mathcal{P}}_y = 0$, $\dot{\mathcal{P}}_z = 0$, т. е. $\mathcal{P}_y = \mathrm{const}$, $\mathcal{P}_z = \mathrm{const}$. Подставив эти интегралы в (14), найдем:

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_o^2(x - x_0)^2}{2} + \frac{p_z^2}{2m}, \tag{15}$$

где $\omega_o = e\mathcal{H}/mc$ – циклотронная частота, $x_0 = c\mathcal{P}_y/e\mathcal{H} = \mathcal{P}_y/(m\omega_o)$ и $0 \le \mathcal{P}_y \le m\omega_o L_x$. Сдвигая H_1 на константу: $\tilde{H}_1 = H_1 - \mathcal{P}_z^2/2m$, получим функцию Гамильтона одномерного осциллятора

$$\tilde{H}_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_o^2(x - x_0)^2}{2}. \tag{16}$$

(Траектория частицы с гамильтонианом (15) есть винтовая линия – равномерное движение вдоль оси Z и вращательное в плоскости XY с частотой ω_o; величина $\mathcal{P}_y$ определяет расстояние x_0 от оси винтовой линии до плоскости ZY.)

Квантование (16) приводит к дискретному спектру "поперечной" энергии

$$\varepsilon_{n\perp} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_o = (2n+1)\mu^*\mathcal{H}, \quad \mu^* = \frac{1}{2}\frac{e\hbar}{mc}, \quad \Delta\varepsilon_\perp = \hbar\omega_o = \frac{e\hbar}{mc}\mathcal{H},$$

где $e\hbar/(mc) = 2\mu^*$ – магнитный момент орбитального движения заряда. Спектр гамильтониана (15) дается формулой Ландау

$$\varepsilon_n(p_z) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_o + \frac{p_z^2}{2m}.$$

Движение вдоль оси Z считаем квазиклассическим для макроскопических размеров ящика, в который поместили частицы.

Найдем число состояний частицы с импульсами вблизи p_z для ящика объемом $V = L_x L_y L_z$. Обозначим квадрат "поперечного" импульса как $p_{n\perp}^2 = (p_x^2 + \mathcal{P}_y^2)_n = 2m(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_o = 2m(2n+1)\mu^*\mathcal{H}$. Для данного p_z число различных "поперечных" состояний, отвечающих двум соседним уровням Ландау, определяется площадью кольца на плоскости $(p_x, \mathcal{P}_y)$ с радиусами $p_{n-1\perp}$ и $p_{n\perp}$:

$$\Delta\nu_{xy}(\mathcal{H}) = \frac{L_x L_y}{h^2}\int\int dp_x d\mathcal{P}_y = \frac{2\pi L_x L_y}{h^2}\int\limits_{p_{n-1\perp}}^{p_{n\perp}} p_\perp dp_\perp = \frac{2\pi m L_x L_y}{h^2}\hbar\omega_o = \frac{L_x L_y}{hc}e\mathcal{H}.$$

Величина $\Delta\nu_{xy}$ есть кратность вырождения состояния с данным n, показывающая, сколько уровней квазинепрерывного спектра при $\mathcal{H} = 0$ соберется в один уровень Ландау. Число состояний с импульсами вблизи p_z с учетом кратности вырождения по спину равно:

$$D_n(p_z)dp_z = g_s\frac{L_z}{h}\Delta\nu_{xy}(\mathcal{H})dp_z = \frac{4\pi V m}{h^3}\hbar\omega_o dp_z.$$

Учитывая

$$\frac{dp_z}{d\varepsilon} = \frac{m}{\sqrt{2m[\varepsilon - \hbar\omega_o(n+1/2)]}},$$

находим плотность числа состояний с энергиями вблизи ε

$$D(\varepsilon) = \sum_n 2\left|\frac{dp_z}{d\varepsilon}\right| D_n(p_z) = \frac{\pi V(2m)^{3/2}\hbar\omega_o}{h^3}\sum_n \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}}.$$

(Здесь мы не учитываем расщепления каждого уровня с данным p_z на два и вытекающий отсюда парамагнетизм, рассмотренный в п. 2.)

Можно также вычислить $D(\varepsilon)$, исходя из определения

$$D(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) = \sum_{\substack{\sigma,n \\ \mathcal{P}_y,p_z}} \delta\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} + (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right):$$

$$D(\varepsilon) = 2\frac{L_yL_z}{(2\pi\hbar)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z\delta\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} + (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right)\int\limits_0^{m\omega_o L_x} d\mathcal{P}_y =$$

$$= \frac{2Vm\omega_o}{(2\pi\hbar)^2}\sum_{n=0}^{\infty} 2\int\limits_0^{\infty} dp_z\delta\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right). \qquad (17)$$

С учетом того, что

$$\sqrt{m/2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}\delta\left(\varepsilon - x - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right) = \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}},$$

где $x = p_z^2/2m,\ dp_z = \sqrt{m/2}dx/\sqrt{x}$, найдем:

$$D(\varepsilon) = \frac{Vm^{3/2}\omega_o}{2\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\sum_n \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}}. \qquad (18)$$

При $\omega_o \to 0$ получаем известный нам результат для свободной системы:

$$\sum_n \longrightarrow \int\limits_{-1/2}^{\varepsilon/\hbar\omega_o - 1/2}\frac{d\xi}{\sqrt{\varepsilon - (\xi+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\hbar\omega_o},$$

$$D(\varepsilon) \underset{\omega_o\to 0}{\longrightarrow} \frac{2Vm^{3/2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Вычислим теперь большой потенциал системы в приближении сильного вырождения и слабого магнитного поля – $\hbar\omega_o \ll kT \ll \varepsilon_F$:

$$J_{\mathcal{H}} = -kT\ln\tilde{Z} = -kT\frac{Vm^{3/2}\omega_o}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\sum_n\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\left[1+\exp\left((\mu-\varepsilon)/kT\right)\right]d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}}. \qquad (19)$$

Интегрируя (19) по частям, найдем:

$$J_{\mathcal{H}} = -2\frac{Vm^{3/2}\omega_o}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\sum_n\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o}}{\exp\left((\varepsilon-\mu)/kT\right)+1}d\varepsilon. \qquad (20)$$

Суммирование здесь ограничено условием $n \le n_0 = \varepsilon/\hbar\omega_o - 1/2$. Воспользовавшись формулой (12.18), в которой мы сохраним только первый член, получим:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{H}} &\approx -\frac{2Vm^{3/2}\omega_o}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\sum_n \int\limits_0^{\mu}\left[\varepsilon - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right]^{1/2} d\varepsilon = \\ &= -\frac{4Vm^{3/2}\omega_o}{3\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\sum_n \left[\mu - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right]^{3/2} = -\hbar\omega_o\sum_n f\left(n+\frac{1}{2}\right). \qquad (21)\end{aligned}$$

Поскольку для слабых полей ($e\mathcal{H}/mc \ll \mu$ или $\hbar\omega_o/\mu \ll 1$) функция

$$f\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi Vm^{3/2}}{3\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\left[\mu - (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o\right]^{3/2} = \frac{2}{3}A\mu^{3/2}\left[1-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_o/\mu\right]^{3/2}$$

мало меняется на одном шаге $n \to n+1$, то для суммирования в (21) можно воспользоваться формулой Эйлера – Маклорена, которую представим в виде

$$\sum_{k=1/2}^{k_0} f(k) = \int\limits_{1/2}^{k_0} f(x)dx + \frac{1}{2}f(1/2) - \frac{1}{12}f'(1/2) + \ldots, \qquad (22)$$

где $k_0 = \mu/\hbar\omega_o$; и мы учли, что $f(k_0) = f'(k_0) = 0$. Используя разложение $f(x) \approx f(0) + xf'(0)$ на отрезке $[0, 1/2]$ и сделав замену $y = \mu - \hbar\omega_o x$, перепишем (22) в виде

$$\sum_{k=1/2}^{k_0} f(k) \approx \int\limits_0^{k_0} f(x)dx + \frac{1}{24}f'(0) = \frac{1}{\hbar\omega_o}\int\limits_0^{\mu} f\left(\frac{\mu-y}{\hbar\omega_o}\right)dy - \frac{1}{24}\hbar\omega_o\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\mu}. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (21), найдем:

$$J_{\mathcal{H}} = -\hbar\omega_o\sum_k f(k) \approx -\int\limits_0^{\mu} f\left(\frac{\mu-y}{\hbar\omega_o}\right)dy + \frac{1}{24}(\hbar\omega_o)^2\frac{\partial f(0)}{\partial\mu}. \qquad (24)$$

Первое слагаемое в (24) есть большой потенциал вырожденной ферми–системы при $\mathcal{H} = 0$

$$J_0(\mu) = -\int\limits_0^{\mu} f\left(\frac{\mu-y}{\hbar\omega_o}\right)dy = -\frac{2}{3}A\int\limits_0^{\mu} y^{3/2}dy = -\frac{4}{15}A\mu^{5/2},$$

а

$$f(0) = -\frac{\partial J_0}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial \mu} = -\frac{\partial^2 J_0}{\partial \mu^2},$$

поэтому (24) есть

$$J_{\mathcal{H}} \approx J_0(\mu) - \frac{1}{24}(\hbar\omega_o)^2 \frac{\partial^2 J_0}{\partial \mu^2} = J_0(\mu) - \frac{1}{6}(\mu^* \mathcal{H})^2 \frac{\partial^2 J_0}{\partial \mu^2}. \tag{25}$$

Сравнивая (9) с (25), видим, что последнее выражение отличается множителем $-1/3$. Для электронов внутри металла влияние периодического потенциала в первом приближении можно учесть, заменяя $m \to m^*$, тогда $\mu^* = e\hbar/2m^*c = \mu_B(m/m^*)$. Поэтому

$$\chi_{\text{диам}} \approx -\frac{1}{3}\frac{n\mu^{*2}}{\varepsilon_F} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m}{m^*}\right)^2 \chi_{\text{парм}}. \tag{26}$$

Таким образом, квантование орбитального движения электронов приводит к диамагнитному эффекту, и диамагнитная восприимчивость свободных электронов равна одной трети спиновой парамагнитной восприимчивости. Этот результат был впервые получен Ландау (1930). Результирующая восприимчивость является парамагнитной:

$$\chi = \chi_{\text{парм}} + \chi_{\text{диам}} = \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{m^*}\right)^2\right] \chi_{\text{парм}}.$$

Отношение $\mid \chi_{\text{диам}}/\chi_{\text{парм}} \mid = (1/3)(m/m^*)^2$ может превосходить единицу для металлов с малыми эффективными массами электронов $m^* < m/\sqrt{3}$; в этом случае получим диамагнитное вещество, подобное, например, висмуту или сурьме.

В сильных полях $\hbar\omega_o > kT$, т. е. тепловое "размытие" уровня Ферми становится меньше расстояния между уровнями Ландау. В этом случае энергия электронного газа перестает быть монотонной функцией $\mathcal{H}$: возникают осцилляции магнитной восприимчивости – эффект де Хааза–ван Альфена.