Задание по квантовой теории излучения.

1 (а) Определить коэффициент затухания пучка света частоты ω в среде (газе) двухуровневых атомов, $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, имеющей фиксированную температуру T, считая, что происходят только резонансные процессы поглощения и (индуцированного) излучения. Найти мощность, отдаваемую термостату. (КС, ГКК, Злв, Бете)

(б) Найти среднее число фотонов в пучке при условии, что газ этих атомов находится в тепловом равновесии с излучением при температуре T (в отсутствие термостата) (Бете, КС, ЛВМ-II, Тар).

2 Найти правило сумм для флуктуаций плотности Z электронов в атоме с зарядом ядра $Z|e|$, т.е. под действием сил не зависящих от их скоростей (НГУ-74, Китт, ЛЛ-III §149, ГКК, ГКК-Ч.2, Злв):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - E_0) \left| \langle n | \left(\sum_{a=1}^{Z} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_a)} \right) | \, 0 \rangle \right|^2 = ?, \quad \text{где:} \;\; U_{\mathrm{a}0}(\mathbf{X}_\mathrm{a}) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{X}_\mathrm{a}|}, \quad \text{и т.д.} \tag{1}$$

$$\widehat{H}_Z \, |n\rangle = E_n \, |n\rangle, \quad \widehat{H}_Z = \sum_{\mathrm{a}=1}^{Z} \left(\frac{\mathbf{P}_a^2}{2m} + U_{\mathrm{a}0}(\mathbf{X}_\mathrm{a}) \right) + \frac{1}{2} \sum_{1=\mathrm{a}}^{Z} \sum_{\neq \mathrm{b}=1}^{Z} U_{\mathrm{ab}}(\mathbf{X}_\mathrm{a} - \mathbf{X}_\mathrm{b}). \tag{2}$$

3 (а) Найти время жизни $2P$ состояния атома водорода с $m = 0, \pm 1$, относительно однофотонных переходов в состояние $1S$ (ЛЛ-IV, ГКК, ГКК-Ч.2, Злв), если: $\Psi_{nlm}(\mathbf{x}) = Y_l^m(\mathbf{n}) \otimes R_{nl}(r)$, где:

$$\Psi_{210}(\mathbf{x}) = i \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \cos\vartheta \otimes \frac{r e^{-r/2a}}{2a\sqrt{6a^3}}, \quad \text{и т.д.,} \quad \Psi_{100}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{1/2} \otimes \frac{2e^{-r/a}}{\sqrt{a^3}}, \quad a = a_Z = \frac{\hbar^2}{me^2 Z}.$$

(б) Уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ расщеплены лишь за счет лэмбовского сдвига $\Delta E_{\mathcal{L}} \sim mc^2\alpha^5 \ln(1/\alpha)$. Найти (ГКК-Ч.2) и оценить вероятность однофотонного перехода между ними (ГКК, Злв).

4 Вывести лоренцинвариантные (где уместно) и нет плотности числа состояний (на единичный интервал энергии) для: (а) однофотонного состояния; (б) одночастичного состояния с полным моментом J; (в) комптон-эффекта; г) ee-рассеяния в с.ц.м.; (д) тормозного излучения в поле ядра; е) рождения e^+e^- в поле ядра; (ж) e^+e^- аннигиляции в 2γ (ЛЛ-IV, Злв, ГКК, БК).

5 π^- мезон захватывается ядром (вместо электрона) на уровень $| \, n, l = n-1\rangle$, а затем совершает радиационные переходы на более низкие уровни.

(а) Для $n = 2$ оценить заряд ядра Z, при котором захват π^- мезона ядром станет вероятнее радиационного перехода (НГУ-74, Злв, ЛЛ-IV §52, СТЖ);

(б) При данном Z для $n \gg 1$ оценить, начиная с какого $n(Z)$ захват станет вероятнее радиационного перехода. Считать, что ядро для π^- мезона является "черным шариком" радиуса $R = Z^{1/3}\hbar/(m_\pi c)$, $a_Z \mapsto \hbar^2/(m_\pi e^2 Z)$ (НГУ-74, Злв, ЛЛ-IV §52, СТЖ).

6 Полный гамильтониан взаимодействия заряда e массой m, со спином s, с ЭМП имеет вид:

$$\widehat{V}\,(\mathbf{X}, t) = -\frac{e}{mc}\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)\cdot\mathbf{P}\right) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2(\mathbf{X}, t) - \frac{\mu_s}{s}\left(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}, t)\right), \quad \mu_s = \frac{e\hbar}{mc}s, \quad \text{и для электрона:}$$

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \;\; e \Rightarrow -|e|; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega L^3} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\, e^{i\omega t - i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}; \quad \omega = kc; \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\right).$$

Найти вероятность однофотонного перехода $2S_{1/2} \to 1S_{1/2}$ в атоме водорода в длинноволновом приближении. Какое слагаемое в $\widehat{V}$ дает такой переход между этими состояниями:

$$\langle \mathbf{x} \mid 2S_{1/2}\rangle \equiv \Psi_{200}(\mathbf{x})\,\chi_{1/2,1/2} = \frac{e^{-r/(2a)}}{\sqrt{\pi(2a)^3}}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = |\mathbf{x}|,$$

$$\langle \mathbf{x} \mid 1S_{1/2}\rangle \equiv \Psi_{100}(\mathbf{x})\,\widetilde{\chi}_{1/2} = \frac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Сравнить полученное время жизни с оценкой в задаче 3 и с оценкой для двухфотонного перехода (ГКК, ЛЛ-III-IV, ГКК-Ч.2).

7 Атом водорода в состоянии $2S_{1/2}$ влетает со скоростью $v = 10^{-4}c$ в перпендикулярное ей однородное магнитное поле $\mathcal{H} = 400$ эрстед. Найти его время жизни в этом состоянии и объяснить причину его изменения по сравнению с случаем отсутствия поля (НГУ-74, Бете, Злв, ГКК-Ч.2).

8 Для произвольного представления оператора момента $\boldsymbol{J}$ найти выражения для

(a) следов: $Tr\,(J_\alpha)\,; \quad Tr\,(J_\alpha J_\beta)\,; \quad Tr\,(J_\alpha J_\beta J_\gamma)\,; \quad Tr\,(J_\alpha J_\beta J_\gamma J_\lambda)\,;$ (ГКК-Ч.1)

(b) результата поворота: $\exp\{-i\vartheta(\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{n})\}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varrho})\exp\{i\vartheta(\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{n})\} = ?$ (ЛЛ-III, Мессиа, Кис)

9 Найти поляризуемость атома водорода в основном состоянии (ЛЛ-III, Злв, ГКК).

10 Для любой системы, где силы зависят только от относительных расстояний между зарядами и не зависят от их относительных скоростей (см. зад. 2) вывести правила сумм ТРК для "сил осцилляторов" $F_{fi}^{(x,y,z)}$ в атоме с Z электронами:

$$F_{fi}^{(x)} = \frac{2m(E_f - E_i)}{\hbar^2}\left|\left\langle f\left|\sum_{a=1}^{Z} x_a\right|i\right\rangle\right|^2, \qquad \sum_{f=1}^{\infty} F_{fi}^{(x)} = ?. \tag{3}$$

Как изменятся эти правила сумм ТРК для электронов в атоме или нуклонов в ядре при учете принципа Паули (КС, НГУ-74, Злв, ГКК-Ч.2)?

11 Между Z протонами и N нейтронами в ядре с $A = Z + N$ нуклонами, благодаря обмену заряженным пи- мезоном, существуют, кроме обычных, еще пространственно обменные силы, переводящие нейтрон ν в протон π и обратно действием соответствующего обменивающего оператора $\widehat{\mathcal{P}}_{\nu\pi}$. Найти обобщение правил сумм ТРК (3) для нуклонов в ядре с учетом соответствующей добавки к Гамильтониану их взаимодействия $\widehat{H}_A$ вида (2), при $Z \mapsto A = Z + N$, и:

$$\Delta H_{\text{обм}} = -\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\pi=1}^{Z} U(r_{\nu\pi})\widehat{\mathcal{P}}_{\nu\pi}, \quad r_{\nu\pi}^2 = (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\pi)^2.\ \text{И, если}\ \ \mathbf{R} = \frac{1}{A}\sum_{a=1}^{A}\mathbf{x}_a,\ \ \text{– оператор}$$

радиус-вектора центра масс, который не может вызывать внутренние возбуждения ядра, например, в его системе покоя, найти оператор эффективного дипольного момента ядра (НГУ-74, Злв).

12 Найти квазиклассический спектр энергий E_n и спектральную плотность $\varrho(E) = dn(E)/dE$ связанных состояний при $n \gg 1$ для потенциала $U(x) = gx^\nu$ (Мгд-Кр).

13 Используя модель Томаса-Ферми, найти, значение атомного номера Z, при котором начинают заполняться состояния с данным значением орбитального момента l (ЛЛ-III, ЛВМ-II, Бете).

14 Используя квазиклассическое представление волновых функций связанных состояний электронов найти квазиклассическое выражение плотности электронов в данной точке нейтрального многоэлектронного атома через потенциал самосогласованного поля в этой точке. Как связано это выражение со статистикой ферми? Чему равно ε_F? (Мгд, Мгд-Кр, КС).

15 Вывести формулу Крамера для диагональных матричных элементов оператора r (Киселев, ГКК, ГКК-Ч.2), $\left(r^k\right)_{nl} = \langle n,l|r^k|n,l\rangle$:

$$\frac{(k+1)}{n^2}\left(r^k\right)_{nl} = (2k+1)a\left(r^{k-1}\right)_{nl} + \frac{k}{4}\left[k^2 - (2l+1)^2\right]a^2\left(r^{k-2}\right)_{nl}, \tag{4}$$

по кулоновским состояниям $|n,l\rangle$, где: $a = \hbar^2/(MZe^2)$ - боровский радиус.

Задание по квантовой теории рассеяния.

1 В борновском приближении вычислить амплитуду и сечение рассеяния на потенциалах:

$$(a)\ U_\mu(r) = g\frac{e^{-\mu r}}{r}; \qquad (b)\ U_b(r) = \frac{g}{r}e^{-b^2r^2}; \qquad (c)\ U_\lambda(r) = \frac{g}{r^\lambda}, \quad 1 < \lambda < 3.$$

и сравнить найденные сечения с их полуклассической оценкой – как суммы "классического" и "волнового" (Мигдал).

2 Найти **детерминант Йоста–Фредгольма, T-матрицу, сечение, в.ф. рассеяния и связанных состояний** для сепарабельного потенциала конечного ранга $\langle \mathbf{p}|U|\mathbf{q}\rangle = \chi(\mathbf{p})\chi^*(\mathbf{q})\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$, где $\chi(\mathbf{p})$- скалярная функция. Какому рангу и орбитальному моменту l он соответствует? (Ньютон, Ситенко, Тейлор).

3 **Тоже** для сепарабельного потенциала второго ранга с эрмитовой матрицей λ_{lj}:

$$\langle \mathbf{p}|\widehat{\mathbf{U}}|\mathbf{q}\rangle = \chi_l(\mathbf{p})\lambda_{lj}\chi_j^*(\mathbf{q}); \quad l, j = 1, 2.$$

4 **Тоже** для сепарабельного потенциала ранга n, то есть при $l, j = 1, 2, \ldots n$ (Ньютон, Ситенко).

5 Разделив переменные, получить радиальное Ур. Шр. в пространстве произвольной размерности N. (Бейтмен-Эрдейи, Градштейн-Рыжик, Виленкин, К-Т).

6 Вычислить функции Грина оператора свободного Ур. Шр. в порстранстве произвольной размерности N и найти связь между ними при разных значениях N. Что получится для $N = 1, 2, 3, 4$?: Найти ее асимтотику при $|\mathbf{x}| \to \infty$, и ее связь с размерностью сечения. (Бейтмен-Эрдейи, Градштейн-Рыжик, Виленкин, К-Т):

$$\langle \mathbf{x}|\frac{1}{-\nabla^2 - k^2 \mp i0}|\mathbf{y}\rangle, \qquad \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{e^{i(\mathbf{px})}}{(2\pi)^{N/2}},$$

7 Исходя из решений предыдущей задачи построить теорию рассеяния в пространстве 1-го (Липкин) и 2-х (ГКК) измерений.

8 Для сингулярного дельта-потенциала в двухмерном пространстве: $U(\mathbf{x}) = \gamma_0\delta_2(\mathbf{x})$, найти "перенормированные" T-матрицу, в.ф. рассеяния и связанных состояний, “сечение” рассеяния, используя как прцедуру “вычитания”, так и считая его пределом при $\Lambda \to \infty$ сепарабельного потенциала (в импульсном представлении): $\langle \mathbf{p}|U_\Lambda|\mathbf{q}\rangle = \Upsilon(\Lambda)\,\chi_\Lambda(\mathbf{p})\chi_\Lambda^*(\mathbf{q}), \quad \chi_\Lambda(\mathbf{p}) = \Theta(\Lambda - |\mathbf{p}|)$, при подходящей зависимости $\gamma_0 \to \Upsilon(\Lambda)$ и найти ее (Хуанг; S.A. Coon and B.R. Holstein, Am. J. Phys., Vol.70, No.5, 2002, pp. 513-519).

9 Проверить выполнение оптической теоремы для амплитуды рассеяния в приближении эйконала при рассеянии почти вперед, используя, что при $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \mathbf{k}_{||} + \mathbf{k}_\perp$, $d^3\mathrm{k} = k^2dkd\Omega(\mathbf{n}) = dk_{||}d^2\mathrm{k}_\perp$, для $k_{||} \approx k$ имеем $d\Omega(\mathbf{n}) \approx$? (Сунакава, Киселев):

10 Доказать теорему Левинсона исходя из известных аналитических свойств функции Йоста $F_l(-ik)$ в верхней полуплоскости k. Пояснить различие случаев $l = 0$ и $l \neq 0$ (Ньютон, Сунакава, Альфаро-Редже, Ситенко).

11 В борновском приближении вычислить фазовые сдвиги $\delta_l(k)$ для произвольных l и найти их пороговое и асимптотическое поведение, при $k \to 0$ и $k \to \infty$ (может ли оно оказаться точным?) для потенциалов (Флюгге, Ситенко, Бейтмен-Эрдейи, Елютин-Кривченко, ГКК, Злв):

$$(a)\ U_a(r) = U_0\exp\left[-\frac{r^2}{a^2}\right], \quad (b)\ U_b(r) = U_0\frac{b^2}{r^2+b^2}, \quad (c)\ U_\mu(r) = \frac{U_0}{\mu r}e^{-\mu r}, \quad (d)\ U_\lambda(r) = \frac{g}{r^\lambda}.$$

12 Найти точное выражение для $S_{l=0}(k)$ для потенциалов (Флюгге, Ситенко, ГКК, К-П):

$$(a)\ \ U_d(r) = U_0 e^{-r/a}, \qquad (b)\ \ U_h(r) = U_0(e^{r/a} - 1)^{-1}.$$

13 Найти точные фазы рассеяния $\delta_l(k)$ на потенциале $U(r) = g/r^2$. При каких l и g гамильтониан будет самосопряженным оператором (S.A. Coon and B.R. Holstein, Am. J. Phys., Vol.70, No.5, 2002, pp. 513-519; Бейтмен-Эрдейи, Елютин-Кривченко, ГКК)?

14 Проверить, что функция Грина парциального оператора Ур.Шр. (Ньютон):

$$\widehat{\mathrm{h}}_l^r = -\partial_r^2 + l(l+1)r^{-2} + U(r); \quad \left(\widehat{\mathrm{h}}_l^r - k^2\right) G_l^{\pm}(r.y;k^2) = \delta(r-y),$$

в терминах физического решения $\Psi_l^{\pm}(k,r)$ и решения Йоста $f_l(\mp ik, r)$ имеет вид:

$$G_l^{\pm}(r.y;k^2) = \Theta(r-y)\frac{i^{\mp l}}{k} f_l(\mp ik, r)\Psi_l^{\pm}(k,y) + (r \rightleftharpoons y), \text{ где : } \left(f_l(\mp ik, r) \overset{\leftrightarrow}{\partial_r} \Psi_l^{\pm}(k,r)\right) = i^{\pm l}k.$$

15 Исходя из представления парциальной $S_l(k)$-матрицы, получить представление для фазы рассеяния через решения Йоста при вещественных k, l (Ньютона – не смотреть!):

$$\text{т.е. из} \quad S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} = \lim_{r\to 0} e^{i\pi l}\frac{f_l(ik,r)}{f_l(-ik,r)}, \quad \text{получить} \quad \delta_l(k) = \frac{\pi l}{2} - k\int_0^\infty dr r \frac{d}{dr}\frac{1}{|f_l(ik,r)|^2}.$$

16 Используя свойства вронскианов, непосредственно из Ур. Шр. найти выражения для функции Йоста и парциальной амплитуды (Ньютон, Сунакава, Альфаро-Редже):

$$f_l(\kappa) \Longrightarrow \left(f_l(\kappa, r) \overset{\leftrightarrow}{\partial_r} \varphi_l(0,r)\right)\Big|_{r=0} = \kappa^2 \int_0^\infty dr \varphi_l(0,r) f_l(\kappa, r). \tag{5}$$

$$k\eta_l(k) = e^{\pm i\delta_l(k)}\sin\delta_l(k) = -\frac{1}{k}\int_0^\infty dr \Psi_l^0(k,r)U(r)\Psi_l^{\pm}(k,r), \tag{6}$$

17 Для прямоугольной потенциальной ямы $U(r)$ глубины $-U_0$ и ширины R исследовать поведение s-волновой фазы $\delta_{l=0}(k)$ при $k \to 0$ при появлении связанных состояний или "резонансов" с нулевой энергией. Найти длину рассеяния и эффективный радиус (Ньютон, Сунакава, Ситенко, Киселев, ЛЛ-III).

18 Найти спектр и точную фазу рассеяния $\delta_{l=0}(k)$ и проверить выполнение теоремы Левинсона с изменением U_0 на потенциале (ГКК- **2.12, 2.52**; Флюгге v.I- **39**; ГК §1- **11**, §2- **5**, §8- **11**):

$$U(r) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha r}, \quad r > 0,$$

19 Доказать неравенство Баргмана для числа N_l связанных состояний с данным значением l углового момента: $N_l(2l+1) \leq \int_0^\infty dr r|V(r)|$ (Ситенко, Альфаро-Редже, Елютин-Кривченков).

20 Найти амплитуду радужного рассеяния (Ньютон, §§5.5, 18.2; Сыщенко)

21 Найти амплитуду рассеяния в случае глории (Ньютон, §§5.5, 18.2)

22 При (ср. (4)): $\left\langle r^k \right\rangle_{nl} \equiv \int_0^\infty dr r^k u_{nl}^2(r)$ для $u_{nl}''(r) = \mathcal{L}_{nl}(r)u_{nl}(r)$, где $\mathcal{L}_{nl}(r) = b_{nl}^2 + V(r) + l(l+1)/r^2$, с: $u_{nl}(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} a_{ln}^0 r^{l+1}$ для $r^2V(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, и $u(b^2;r) \underset{r\to\infty}{\sim\sim} e^{-br}$, $u_{nl}(b^2=0;r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} A_{ln}^\infty r^{-l}$ для $rV(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\text{доказать:} \quad \frac{k}{4}\left[(2l+1)^2 - k^2\right]\left\langle r^{k-2}\right\rangle_{nl} + (k+1)\left[b_{nl}^2\left\langle r^k\right\rangle_{nl} + \left\langle r^k V(r)\right\rangle_{nl}\right] + \frac{1}{2}\left\langle r^{k+1}V'(r)\right\rangle_{nl} =$$

$$= \frac{(2l+1)^2}{2}\left[\left(a_{ln}^0\right)^2 \delta_{k,-2l-1} - \left(A_{ln}^\infty\right)^2 \delta_{k,2l+1}\Big|_{b^2=0}\right], \qquad -2l-1 \leq k.$$

Вывести отсюда теорему вириала. Что изменится для потенциала $U_\lambda(r)$ из 11.(d) (Киселев)?