ЛЕКЦИИ

Ряды

Числовые ряды: Сходимость и сумма числового ряда. Критерий Коши. Расходимость гармонического ряда. Признаки для знакоположительных рядов: сравнения, Коши, Даламбера. Доказательство теоремы о том, что признак Коши сильнее признака Даламбера. Интегральный признак Коши. Теорема Лейбница о сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Абеля и Дирихле. Действия над рядами. Теорема Римана (формулировка).

Функциональные ряды: Равномерная сходимость и критерий Коши. Признаки Вейсрштрасса, Абеля, Дирихле. Теоремы о предельном переходе (непрерывности), почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Степенные ряды:. Радиус сходимости. Формула Коши - Адамара. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда, почленное интегрирование и дифференцирование. Достаточное условие разложимости функций в степенные ряды, разложение в ряд Тейлора элементарных функций, область сходимости.

Ряды Фурье: Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Комплексная форма ряда Фурье, нахождение коэффициентов ряда. Пример: разложение пилообразной функции в ряд Фурье. Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Фурье-образ волнового пакета (кусок синусоиды). Преобразование Фурье для производной.

Векторный и тензорный анализ

Вращения векторов и тензоров: Преобразование компонент трехмерного вектора при вращении системы координат, ортогональность матрицы вращения. Определение тензора n-го ранга. Алгебра тензоров: внешнее произведение, теорема о свертке. Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} (символ Леви-Чивита) и теория детерминантов. Векторное и смешанное произведение векторов как свертка с ε_{ijk}. Свойства. Геометрический смысл. Свертки $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$, формула BAC-CAB. Отражение системы координат. Тензоры и псевдотензоры. Скаляры и псевдоскаляры.

Вращения полей: Скалярные поля (преобразование, индуцированное инвариантностью). Векторные поля (закон преобразования). Градиент - векторное поле, дивергенция - скалярное поле. Ротор. Геометрический смысл, примеры вычисления.

Криволинейные и поверхностные интегралы I-го и II-го рода: Приемы вычисления. Теорема Гаусса. Теорема Стокса. Физический смысл ротора. Три условия потенциальности поля. Ортогональные криволинейные системы координат. Выражения для градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в криволинейных ортогональных системах координат.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифф--го и интегрального исчисления. Т.1-3,1970.
2. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ, т.1-2, 1973.
3. Рудин У. Основы математического анализа, 1975.
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды, 1967.
5. Сокольников И.С. Тензорный анализ. И его применения 1971. 2007
6. Арфкен Г. Математические методы в физике, 1970.
7. **Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу, 1990**. **<u>Отделы V, VII и VIII</u>**
8. **Батыгин В.В., Топтыгин Н.Н. Сборник задач по электродинамике, М. Наука 1970.**
9. **Мангазеев Б.В., Афанасьев А.Д. Векторный анализ для физиков. Методич. пособие, ИГУ, 1992**.
10. Никольский С.М., Математический анализ, т.1-2, 1975.
11. Гелбаум, Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе, 1967.
12. Мак-Коннел Дж. Введение в векторный и тензорный анализ.
13. Победря В.Е. Лекции по тензорному анализу. (МГУ 1986)
14. М. Г. Иванов. Введение в тензоры в теории поля (МИФИ 2011)

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$, так как: $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$, и: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] = C$ --Эйлера.

II--Математич. Анализ: $\left\|\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right)=\frac{\sigma}{(n+\vartheta)^{\sigma+1}},\ \frac{\sigma}{(n-\vartheta)^{\sigma+1}}=\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right)\right.$, $0<\vartheta<1$, т.к.

для $f(x)=x^{-\sigma}$: $f'(x)=(-\sigma)x^{-\sigma-1}$; $\frac{2}{\pi}z\le\sin z\le z$, при $0\le z\le\frac{\pi}{2}$.|| **I.Ряды: Демидович, V §1-10, №№::**

Частич. суммы:2546-2549➔Если: $a_n=u_n-u_{n+1}$, то $S_N=\sum_{n=m}^{N}a_n=u_m-u_{N+1}$ ➔2552,2554+2556+2555.**II§6 т.Лж.**➔

➔ $\frac{f(x\pm1)-f(x)}{(\pm1)}=f'(x\pm\vartheta)$➔ **Приз. сравн:** $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right)\le\frac{1}{n^{\sigma+1}}\le\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right)$ **←2 Мент➔** $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$

↑ $a_n=f(n)$,2557--2565, 2568, 2569, 2570+2571**== 1-е;[Д**: 2547-2552,2555-2564,2574,2575.1,2578-2585.1,2590,2591**]**

Крит. Коши–эквивалент: $\left(\lim_{n\to\infty}S_n=S\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\right.$, такое, что: $\left.\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow|S-S_n|\equiv|R_n|<\varepsilon\right)$ 2573=82, **2575**,

Невып. Кр.К: $\exists\varepsilon>0$, такое, что: $\forall N>1,\exists p=p(N)$, и $\left|S_{N+p(N)}-S_N\right|>\varepsilon$, 2576←88+2220,2577.1.**Призн. Даламбера и Коши➔ сравнен. с** q^n **:**2578-2584, 2586-2589**(0-2)**,2590!**==2-е; Д и К для немонотон**: 2592+2593+2594➔2597, 2597.1

Призн. сравнения со всеми: 2606(н)←*3102*➔2605(н)+2600,2610, 2611, 2613, 2614, 2617. **Интегральн. призн**: *2623+* **+Замена перемен**: 2620, 2622**!**, 2618.**== [Д**:(**Рабе**-Гаусс) 2595-2604(н), 2626-2627-2629-2630-2631-2645**]==3-е; 2623, Знакопер. Лейбниц**: 2660,2661←*2656+2220+146+75+147*,2665,2666➔*2657*,2666.1,2671,2673,2675➔2677!+2681**==4-е;** *2674*←*2606(н)* +2689+2699,2672!+*2705*,**2656: *S*>0 ➔ *An*>0**, **2657**: $\left|S_L(a)-S_{p_n}(a)\right|<q\max_j|a_j|,<|A_n|;\ L,j\in[p_n+1,p_{n+1}]$➔

➔ 2662(б)+**2704←2658**, 2693(q=p), 2703(*S*<1,1<*p*). **Знакопер-ные:** Суммир. по частям➔Абель+Дирихле➔Лейбниц. **==5-е [Д**: 2676-2680, 2683-2685,**2687**, 2688, 2704+**2662(а)**←2694➔**2695! 2696**, 2668,2673.1,2686, **2690! 2703(*p*<1)←2623] ==**

$\left|\sum_{l=1}^{n}\sin lx=\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)[\sin(x/2)]^{-1}\right|\le|\sin(x/2)|^{-1}$ ➔2698←*2697*, 2698.1(а,б,в=2682), 2668, 2703.1(а,б).

Действия над рядами: формула умножения: 2712+2711(н), 2714➔2713, ***2715!* ==6-е; [Д**: 2707—2715, 2716-2736**]**
Функциональные ряды: Область сходимости: 2717-2719-2722-2724-2726, 2728, 2730, 2735!, 2736. **Равномерная сходимость:** послед-ти: 2741+2746+2747+2748+2753,*2758*, 2783! **== 7-е; Область**, ряды: 2743+2769+2767+2770+ 2768➔Признак Веерштраса: 2774(а,и,г,л,к,м) **[Не]Равн-рная** сход-сть: **Кр. Коши.** Остаток ряда: 2777, 2779, **2776!** [Д: 2752,2767,2745+2768.1-2773,2774]**==8-е;** Дирихле+Абель: 2782, **2781, 2775! Непр-ность** 2807+*2794*. **Дифферен -мость:** 2792, 2809, 2797. **Интегр-мость:** 2810! **Степенные ряды:** радиус, интервал сходимости 2812, 2816, 2819 = [Д: 2778-2780, **2787**, 2795, 2798, 2805-2808, 2811**]==9-е;** 2820, 2821, 2828, 2830! 2832! **Разложение и действия над степенными рядами** 3°,4°**:** 2839, 2840➔2877+2857, 2855+2860, 2862.1, 2867, 2868;(перемножь) 2888➔2884**==10-е;** 2869, 2871.**Разложение в ряды Тейлора**: **оператор➔** 2874(а), 2849, 2894+*Производящая функция Чисел Фибоначчи*:

$$F_0=0,\ F_1=1\ ,\ \sum_{n=2}^{\infty}x^n\otimes\left(F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\right)\ \text{➔}\ f-x=xf+x^2f\text{, откуда, при } R=q_-:\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=x\otimes 2861=$$

$$=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(q_++x)(q_--x)}=\frac{x}{(1+xq_-)(1-xq_+)}=\left[\frac{1}{(1-xq_+)}-\frac{1}{(1+xq_-)}\right]\frac{1}{(q_++q_-)},\quad q_+-q_-=1,\quad q_+q_-=1,$$

$$q_\pm=\frac{\sqrt5\pm1}{2},\quad q_++q_-=\sqrt5,\quad F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[(q_+)^n-(-1)^n(q_-)^n\right],\quad \frac{F_{n-1}}{F_n}\to\frac{1}{q_+}=q_-=\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b}=\textit{золотое сечение.}]$$

[Д: 2813--2837, 2841-2844, **2849**, 2851, 2854, 2857, 2870, 2878, 2879, 2882-2890, 2894**!**, 2874 (б)**]** **[было ==10-е;]**
Суммирование рядов 3°: 3018+3019**==11-е;** 2913+*3012*,2906, 2909, *2908*, 2990+*2661+146*. Числен. Оценки Остатка: 2744, **Фл.Тлр:** 2921+2922(б), 2901+2932(а), 3044! [**Д:** 2906-2908,2911,2912,2986--2999,3008,3012,2924,2932**]==12-е;**
Ряды Фурье: 2940(в лоб)➔2941+3018➔2962+2961! (ср. §7-1°), 2963(а,б)!← (L^2 базис) 2966(**q**)+*2551(а)*+*2864*, 2965 **==13-е;**
2945 (резонанс), 2948, 2976, 2978, 2984, 2985. **Интеграл Фурье:** $e^{\pm i\lambda x}$ - преобр. Фурье из ряда при $n=(l/\pi)\nu$, где $m,n,2l=L\to\infty$ дает дельта-функцию: $(l/\pi)\delta_{n\,m}\mapsto\delta(\nu-\mu)$. **[Д:**2936-2930,2949,2958,2968,2970-2973,2975**]==14-е;**

VII §5-1°,2°. 3896➔3890➔3885➔3886➔3895!➔3897; 3803➔3898=3893➔3894, 3889(пакет)! 3899, Парсеваль.**==15-е;**
[Д: 3891-3900]. **Контрольная работа после 14-го зан.;** (не позднее (1-го ноября) 24 декабря) **== 16-е;**

Примечания: Подчеркнутые №№ необходимо сделать на занятиях. *причем, №№ делать/обсуждать быстро.* Указаны лишь некоторые домашние задания [Д: №--№], **к ним же относятся и не сделанные на занятиях.** №➔№, №←№, № +№ - означает общую идею или логически связанные задачи (порядок важен). Связаны и выделенные рядом одним цветом по вертикали. №! – наиболее поучительные, №=№ -одна и та же задача. Подсказки.+←*№№.*

I.-- Векторн. и тензорн. анализ: № задач: Мангазев--Афанасьев, {Демидович} (или [БТ]...)

1) Повороты, Векторы, Тензоры: Начать с [1]: $\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $(\vec{n}\cdot\vec{n}') = ?$

δ_{jk} :4,1,16, 3,*17*+9, 8, 5э,10: $(\vec{x}^{T}\cdot\hat{a}\cdot\vec{y}) \equiv (\vec{x}^{T}\cdot\vec{Z})$,11**==1-е;**18,13+34,14=33**←**19, **12,** ε_{jkl} :15+ $\varepsilon_{\alpha\beta....\xi}$ **→** $\varepsilon_{....}|\hat{a}| = \varepsilon_{....}a...a$ **→**

(↓ [25][27]или[БТ]:[20][17] **(Д: 2=[16] , 5, 6, 7, 8U, 10, 11)** [8] [7] **[9] (Д:** $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{jkl}$ **,** $\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\lambda\gamma}$ **)** [24])

→22, 21, $|\hat{a}|^2 = 1$, $\det(\hat{a}\hat{T}\hat{a}^{T}) = \det(\hat{T})$ **==2-е; 20,** 22,21**→** $(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, 23**→**24(а,б)=[2] **→**det**→**27**→**

→ $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{jkl}$ **,** 26(б,а)= [28] **==3-е; (Д:** $\varepsilon_{\alpha\beta....\xi}$ = det? **26(б)=[28], 30, 31=[34], 35 → все до 36)**) (ориентирован? Где?)[30]

35, $\vec{x}' = \hat{a}\vec{x} \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}') = \hat{a}\vec{A}(\vec{x})$, или $\vec{x}' = -\vec{x} \rightarrow \varphi'(\vec{x}') = \varphi(\vec{x}),\ \psi'(\vec{x}') = -\psi(\vec{x})$, 31+32,**28!→**29+30+25+ d^3x =inv.**==4-е;**

$\varphi'(\vec{x}' = \hat{a}\vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \updownarrow \psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x})$, т.е. $\varphi' = \varphi$, $\updownarrow$ $\psi' = -\psi$. (или [БТ]: **[25]** [34][35][31] [32][33][14] (psevdo?))

2) Дифференциальные операции набла, градиент, ротор в декартовых координатах:

1. Начать с: ↓ Набла $\vec{\nabla}$ -- при вращениях преобразуется как вектор, т.е.: $d\Phi(\vec{x}) = (d\vec{x}^{T}\cdot\vec{\nabla}_{x}\Phi(\vec{x}))$=inv.**{VIII** §17-1º,2º**}**

$dF(u(\vec{x}), v(\vec{x}), w(\vec{x}))$ +51**→**37, 38!**→**39+40+56(а,б)+[46], div grad $= \vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}) = \Delta$, $(\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)) = u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u$,

$\vec{\nabla}^2 uv = v\vec{\nabla}^2 u + 2(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v) + u\vec{\nabla}^2 v$ ([39][40]или[БТ] [46]) **(Д:теж №)** На гладких полях rot grad= $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})$=0**←**div rot.**==5-е;**

2. **Вычисления:**[37]+41+55+43**←**(42=53)**→** $4\pi\delta_3(\vec{x})$ +45(а)+45(б)+ $4\pi\delta^{lk}\delta_3(\vec{x})$,44, 46 **(Д: 47--50, 52, 54--56(б)) ==6-е;**

(или [БТ]: [37] [41] [43] [42] [45] [44])**(Д: [45] [43], а также уметь все из {4408--4440})**

3) Теоремы Гаусса и Стокса, поверхностные и криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, способы их вычисления: нужны и {Демидович VIII}, и М-А обязательно!!

Гаусс==>4 занятия: Ориентир. элемент площади $d\vec{S}(\vec{x}) = (d\vec{x}\times d\vec{x}') = \vec{e}_j\varepsilon_{jlk}dx_l dx'_k$, $d\vec{x}$, $d\vec{x}'$ -разные! **{§17-2º-3º}**

Начать с II-го рода=потоку $d\Phi_A(dS) = (\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{S}(\vec{x}))$, $d\vec{S} = \vec{N}(\vec{x})\,|\,d\vec{S}\,| \mapsto (dydz, dzdx, dxdy)$, $dS_j \Rightarrow \varepsilon_{jlk}dx_l dx'_k$, где

$\varepsilon_{jlk} \Rightarrow 1$ без суммы! {4363}**→**57={4362=4382}**→§16,** 58={4381},62={4380**→§15 (*P,Q,R*) →A},**60, 59={4390}, 61**==7-е;**

61,63, {4379 = 4393а+4394}+87+86, $F_S(x,y,z) = 0 = dF(\vec{x}) = (d\vec{x}\cdot\vec{\nabla}F(\vec{x}))$, $\vec{N} = \vec{\nabla}F/|\vec{\nabla}F|$ **→**{4362}, 64(а,б). **==8-е;**

(или [БТ]:**Другие** ⇑ **формы** ⇑ **Гаусса** [51][50]) $S_V \mapsto V_S$ **(Д: 61, 64 (в, г) -- без поворота, {4376,4387,4393+4394+4395+4396})**

{4365+4446+**§14-2º**}**→** $d\vec{S}(\vec{x}) = (d\vec{x}\times d\vec{x}') = (\dot{\vec{x}}_u(\vec{x})\times\dot{\vec{x}}_v(\vec{x}))dudv$; 64(а,б,в)-без пов.(в,г)-пов.: $\vec{A}'(\vec{x}') = \hat{a}\vec{A}(\hat{a}^{-1}\vec{x}')$ **== 9-е;**

{4366,4376=4388**→**4445.1+сфер. коорд.,4378=4391**→**4392**←** $dS_{\perp}^{n} = dS\cos(\vec{N},\vec{n})$, $d\Omega(\vec{n}) = dS_{\perp}^{n}/R^2 \leftrightarrow 4\pi\delta_3(\vec{x})$;

{§14-1º**-I-го рода = массе:** 4358, 4357} **(Д:{4357, 4364-4366, 4377+4442--4387-4389!-4390-4400, 4441-4449}) ==10-е;**

Стокс==>3 занятия: абс. велич. $dS = |(\dot{\vec{x}}_u\times\dot{\vec{x}}_v)|dudv = \sqrt{\dot{\vec{x}}_u^2\dot{\vec{x}}_v^2 - (\dot{\vec{x}}_u\cdot\dot{\vec{x}}_v)^2}\,dudv = \dfrac{dxdy}{\cos\gamma} = \dfrac{dzdx}{\cos\beta} = \dfrac{dydz}{\cos\alpha}$ **,** т.е.

част. сл. $dS_{\perp}^{n} = dS(\vec{N}\cdot\vec{n})$,**{§15 [(*P,Q,R*)→A]=4380}=62+{§14-2º}** $\ell \mapsto S_\ell$, $d\vec{x} = \vec{\tau}d\ell$, $\vec{\tau} \mapsto \vec{N}$,65,70+{4367}**→**71+{4369},

68+{4307**→**4455}+78а,б. Произвольность S_ℓ - из теоремы Гаусса. **(Д: 66,72,73,76 ,77,{4329,4371,4452-4460}) ==11-е;**

67+69,**{**§17-4º-5º**}, 4-ре условия потенциальности векторного поля:→***75=78в* +*74+76+77*,{4370+4368},*73*, **{**§17-3º-4º-5º**}→**66**→**(граница границы = 0) ↵**== 12-е;** {4371+4372! Другой вид Стокса: **4340=4375!**+**4392, 4456!]** **== 13-е;**

4) Криволинейные ортогональные системы координат=>2зан. Цилиндрическ. и Сферические:

Коэффициенты Ламе: 80+79, grad $\phi = \vec{\nabla}\phi$, div $\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$, rot $\vec{A} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})$, $\vec{\nabla}^2$ **- в цилиндр. координ**. 82(цилн).**== 14-е;**

Сферические координ.: 81, 83, $\vec{\nabla} = \vec{n}\partial_r + (1/r)\partial_{\vec{n}}$, $\vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})$, 84+85, 82 (сферич)**==15-е; Повторение:**{4357, 4364, 4396} 72 {4329,4389! 4400! 4377+4442}. Вихрь $\vec{A} = (\vec{\nabla}\times\vec{B})$ вихревого $\vec{B}$ – ? . $(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}) \equiv \partial_r$. Давление на поверхность заряженного проводника. Скопление заряда на острие.**==16-е; +?**Формулы Френе. Электр. заряд в поле магнитного монополя. Шар в цилиндре. **(Д: 79-82-85,{4440.1,4440.2,!4321,**4322,**4323--4325!** 4329,4389!4400!4377+4442**})==16+?**

Контрольная работа ==17-е; (не позднее 01.11.) **Гаусс:** $dS_j \mapsto d^3x\,\nabla_j$ **, Стокс:** $dx_j \mapsto (d\vec{S}\times\vec{\nabla}_x)_j$ **Зачет==18-е?**

Примечания: Подчеркнутые №№ необходимо успеть на занятиях, *причем, №№ делать быстро.*
Указаны лишь некоторые домашние задания **(Д: №--№), к ним же относятся и не сделанные на занятиях.**
№**→**№, №**←**№, №+№ -- означает общую идею или логически связанные задания (порядок важен!). Связаны и соседние по вертикали, выделенные одним цветом. №! – весьма поучительные задания. №=№ -- означает разные формулировки одной и той же задачи. Подсказки.+**←**№№. (План доц. Коренблита С.Э.)