

УДК 530.145, 539.12

С.Э. КОРЕНЬЛИТ, В.В. СЕМЁНОВ

О ТЕРМОПОЛЕВОЙ БОЗОНИЗАЦИИ В МОДЕЛИ ТИРРИНГА, ПРАВИЛАХ ТИЛЬДА-СОПРЯЖЕНИЯ И ТЕРМОПОЛЕВЫХ ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ

Показано, что правила тильда-сопряжения Ожимы для ферми-полей вытекают из структуры термополевого вакуума как когерентного состояния на группе $SU(2)$. Введение «горячих» и «холодных» физических термополей приводит к нормальной форме термополевых решений модели Тирринга с правильными свойствами симметрии, антикоммутации, перенормировки и суперотбора для их вакуумных средних, позволяя различать представления над разными вакуумами и устанавливать связи между различными решениями при нулевой и конечной температурах.

Ключевые слова: термополя, динамическое отображение, бозонизация, термический вакуум, преобразования Боголюбова.

1. О термодинамике идеальных одномерных газов

Следуя стандартному курсу статистической физики [1], легко показать, что равновесная термодинамика свободных безмассовых бозонов в одномерном ящике длины L совпадает с термодинамикой свободных безмассовых фермионов спина $1/2$, при той же температуре $k_B T = 1/\zeta$, только при тождественно равных нулю химических потенциалах, $\mu_{(B)} = \mu_{(F)} = 0$, что дает простейший пример [2] термополево-бозонизации для давления P и плотностей внутренней энергии U и энтропии S : $P_{(B),(F)} = U_{(B),(F)}/L = \pi^2/(3\zeta^2 hc)$, $S_{(B),(F)}/(k_B L) = 2\pi^2/(3\zeta^2 hc)$, $h = 2\pi\hbar$, где c – скорость света. При заданных плотностях частиц $\bar{n}_{(B)} = N_{(B)}/L$, $\bar{n}_{(F)}^\pm = N_{(F)}^\pm/L$ в такой равновесной картине $\zeta\mu_{(B)}(T, \bar{n}_{(B)}) = \ln\left(1 - e^{-\bar{n}_{(B)}\zeta hc/2}\right)$, $\zeta\mu_{(F)}^\pm(T, \bar{n}_{(F)}^\pm) = \pm \ln\left(e^{\bar{n}_{(F)}^\pm\zeta hc/2} - 1\right)$. Но обе системы при тех же ζ и L имеют одинаковые P, U, S и другие термодинамические потенциалы, и $\mu_{(B)} \equiv 0$ при любой температуре означает бесконечную плотность бозонов, $\bar{n}_{(B)} = \infty$, то есть специфику термодинамического предела: $N_{(B)} \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, в бозонной картине. Равновесное давление в фермионной картине является, на самом деле, суммой парциальных давлений: $P_{(F)}(T, \mu_{(F)}) = P_{(F)}^+(T, \mu_{(F)}^+) + P_{(F)}^-(T, \mu_{(F)}^-) = \pi^2/(3\zeta^2 hc) + \mu_{(F)}^2/(hc)$ – от $N_{(F)}^+$ фермионов и $N_{(F)}^-$ антифермионов, с противоположными значениями химических потенциалов $\mu_{(F)}^\pm = \pm\mu_{(F)}$ и зарядов [2], с зарядовой плотностью $Q_{(F)}/L = \bar{n}_{(F)}^+ - \bar{n}_{(F)}^- = 2\mu_{(F)}/(hc)$, где $Q_{(F)}$ – усредненный полный заряд. При любых $\mu_{(B)}$ и $\mu_{(F)}$ это определяет равновесные потенциалы Гиббса как $G_{(B)} = N_{(B)}\mu_{(B)}$ и $G_{(F)} = N_{(F)}^+\mu_{(F)}^+ + N_{(F)}^-\mu_{(F)}^- = (N_{(F)}^+ - N_{(F)}^-)\mu_{(F)} = Q_{(F)}\mu_{(F)}$, т.е. $G_{(B)} = G_{(F)} = 0$ для $\mu_{(B)} = \mu_{(F)}^\pm = 0$ при $\bar{n}_{(F)}^+ = \bar{n}_{(F)}^- = 2 \ln 2/(\zeta hc)$ – в роли закона действующих масс, т.е. лишь в секторе с нулевым полным зарядом $Q_{(F)} = 0$. При $\mu_{(B)} = \mu_{(F)} = 0$ давление безмассовых частиц на стенку связано с их равновесным поглощением и эмиссией аналогично равновесному излучению [1]. Пусть, например, левая стенка в единицу времени поглощает N_L^+ левых фермионов и N_L^- левых антифермионов, летящих влево с суммарным зарядом $Q_L = N_L^+ - N_L^-$, а излучает N_R^+ правых фермионов и N_R^- правых антифермионов, летящих вправо с суммарным зарядом $Q_R = N_R^+ - N_R^-$ [3]. Но в равновесии стенка остается незаряженной и $Q_R - Q_L \equiv Q_{S(F)} = 0$. А так как и полный

заряд для $\mu_{(F)} = 0$ также обращается в ноль: $Q_R + Q_L \equiv Q_{(F)} = 0$, то приходим к выводу, что в таком равновесном состоянии $N_R^+ = N_R^-$, $N_L^+ = N_L^-$, что обеспечивает точную полную конверсию правых и левых фермион-антифермионных пар $\chi_{R,L}^+ + \chi_{R,L}^- \leftrightarrow$ в некоторое число бозонов, летящих вправо и влево соответственно. В то же время такое качественное описание равновесной бозонизации допускает наличие при $T > 0$ ненулевой плотности фермионов $\bar{n}_{(F)}^\pm(T, 0)$, обращающейся в ноль лишь при $T = 0$, что отвечает уже «абсолютной» бозонизации с нулевой энергией Ферми: $\mu_{(F)}(0, \bar{n}_{(F)}^+) = \bar{n}_{(F)}^+ \hbar c / 2$. Как видим, формальный параметр [2] инфракрасной регуляризации L приобретает при $T > 0$ физический смысл макроскопического термодинамического параметра [1] как реального или эффективного размера данной системы.

2. О фермионных правилах тильда-сопряжения

Следуя Ожиге [4], начнем со случая простейшего фермионного осциллятора для одной фиксированной моды k^1 , который имеет только два нормированных состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, с энергией 0 и ω , и ферми-операторами уничтожения/рождения $b, b^\dagger$: $b|0\rangle = 0$, $|1\rangle = b^\dagger|0\rangle$, $\{b, b^\dagger\} = 1$, $\{b, b\} = 0$. Термический вакуум является нормированной суммой тензорных произведений двух независимых копий этих состояний системы: $|0\tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$, $|1\tilde{1}\rangle = |1\rangle \otimes |\tilde{1}\rangle$, взвешенных с соответствующими экспоненциальными факторами Гиббса и относительной фазы, так что при $\{b, \tilde{b}^\# \} = 0$, $(\tilde{b}^\# = \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger)$ [4] (индекс моды k^1 пока систематически опускается)

$$|0(\zeta)\rangle_{(F)} = \frac{|0\tilde{0}\rangle + e^{i\Phi} e^{-\zeta\omega/2} |1\tilde{1}\rangle}{[\langle 0\tilde{0}|0\tilde{0}\rangle + e^{-\zeta\omega} \langle 1\tilde{1}|1\tilde{1}\rangle]^{1/2}} \equiv \cos \vartheta \left(1 + e^{i\Phi} \operatorname{tg} \vartheta b^\dagger \tilde{b}^\dagger\right) |0\tilde{0}\rangle = V_{9(F)}^{-1} |0\tilde{0}\rangle, \quad (1)$$

где $V_{9(F)}^{-1} = \exp\left\{e^{i\Phi} \operatorname{tg} \vartheta G_+\right\} \exp\left\{-\ln(\cos^2 \vartheta) G_3\right\} \exp\left\{-e^{-i\Phi} \operatorname{tg} \vartheta G_-\right\}$, $\vartheta = \vartheta(k^1, \zeta)$,

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta(k^1, \zeta) = e^{-\zeta\omega}, \quad \omega = \omega(k^1), \quad G_+ = b^\dagger \tilde{b}^\dagger, \quad G_- = \tilde{b} b = (G_+)^{\dagger}, \quad G_3 = (b^\dagger b - \tilde{b} \tilde{b}^\dagger)/2,$$

$$[G_+, G_-] = 2G_3, \quad [G_3, G_\pm] = \pm G_\pm, \quad G_\pm = G_1 \pm iG_2, \quad (2)$$

откуда $V_{9(F)}^{-1} = \exp\left\{\vartheta(k^1, \zeta) [e^{i\Phi} G_+ - e^{-i\Phi} G_-]\right\} = V_{-\vartheta(F)} = V_{9(F)}^\dagger$, (3)

что есть стандартная форма оператора когерентного состояния на группе $SU(2)$ [5]. Это наблюдение позволяет идентифицировать алгебру (2) как алгебру «квазиспина» [6] с «холодным» вакуумом $|0\tilde{0}\rangle \mapsto |s, -s\rangle$ – в качестве низшего, а $|1\tilde{1}\rangle \mapsto |s, s\rangle$ – в качестве высшего состояний ее фундаментального представления с квазиспином $s \equiv 1/2$: $G_3|s, \pm s\rangle = \pm s|s, \pm s\rangle$, $G_\pm|s, \pm s\rangle = 0$. Оставшаяся произвольной, единственная относительная фаза Φ отражает тот факт, что квантовое состояние в гильбертовом пространстве задается на самом деле не вектором, а лучом [7]. В итоге, термовакuum (3) как когерентное состояние [5] аннигилируется оператором

$$V_{9(F)}^{-1} G_- V_{9(F)} = G_- \cos^2 \vartheta + G_3 e^{i\Phi} \sin 2\vartheta - G_+ e^{2i\Phi} \sin^2 \vartheta = \underline{b}(\zeta) b(\zeta), \text{ то есть операторами}$$

$$b(\zeta) = V_{9(F)}^{-1} b V_{9(F)} = b \cos \vartheta - \tilde{b}^\dagger e^{i\Phi} \sin \vartheta \quad \text{и} \quad \underline{b}(\zeta) = V_{9(F)}^{-1} \tilde{b} V_{9(F)} = \tilde{b} \cos \vartheta + b^\dagger e^{i\Phi} \sin \vartheta. \quad (4)$$

До сих пор $\tilde{b}^\#$ было лишь обозначением, не задающим никакой операции. Чтобы определить его как операцию $\underline{b}(\zeta) \mapsto \tilde{b}(\zeta)$, следует выбрать значение Φ . Популярный выбор $\Phi = 0$ [8] приводит к сложным правилам тильда-сопряжения для фермионов, отличающимся от бозонных. Выбор Ожиге $\Phi = -\pi/2$ приводит к одинаковым правилам для бозонов и фермионов [4]. Как видим, выбор $\Phi = \pi/2$ ничем не хуже и также удовлетворяет условиям для антилинейного гомоморфизма и $\tilde{\tilde{b}}(\zeta) = b(\zeta)$, что представляется удобным для целей бозонизации. При этом термовакuum, определенный преобразованием Боголюбова (1), оказывается когерентным

состоянием, полученным когерентным $SU(2)$ -вращением вакуумов $|0_{k^1}\tilde{0}_{k^1}\rangle$ отдельных ферми-осцилляторов как низших квазиспиновых состояний вокруг одного и того же единичного вектора $\mathbf{u} = (\sin \Phi, \cos \Phi, 0)$, но на разные углы, равные $-2\vartheta(k^1, \varsigma)$: $V_{\vartheta(F)}^{-1} = \exp[2i\vartheta(k^1, \varsigma)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{G})]$ [5].

Аналогичная картина будет иметь место и для бозонного термоваккуума, полученного соответствующим термическим преобразованием Боголюбова $V_{\vartheta(B)}$ бозонных операторов $c(k^1)$, задающим его как когерентное состояние для представлений дискретной серии группы $SU(1,1)$ [5, 12]. Однако в этом случае числитель в (1) содержит счетное число членов со счетным числом произвольных фаз Φ_n [4]. Когерентное состояние типа (1), (3) возникает только тогда, когда уже для одной осцилляторной моды счетное число раз когерентно выбрано $\Phi_n \mapsto n\Phi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. У нас нет оснований предпочесть этот выбор обычному выбору: $\Phi_n \equiv 0$ [4, 8].

3. «Горячие» и «холодные» физические термополя

Итак, при конечной температуре, в рамках термополевой динамики [8] необходимо удвоить число степеней свободы, сопоставляя каждому физическому $\psi(x)$ и гейзенберговскому полю (ГП) $\Psi(x)$ его тильда-партнера $\tilde{\Psi}(x)$. Согласно [8], полученная таким образом теория при $H[\Psi] = H_{0[\Psi]}(x^0) + H_{I[\Psi]}(x^0)$ будет определяться гамильтонианом $\hat{H}[\Psi, \tilde{\Psi}] = H[\Psi] - \tilde{H}[\tilde{\Psi}]$, где $\tilde{H}[\tilde{\Psi}] = H^*[\tilde{\Psi}^*]$, а для модели Тирринга [9] $\tilde{H}_{I[\tilde{\Psi}]} = H_{I[\tilde{\Psi}]}$ и $\tilde{H}_{0[\tilde{\Psi}]} = -H_{0[\tilde{\Psi}]}$. Хотя подобная (4) подстановка для свободных безмассовых дираковских термополей $\chi(x) \mapsto \chi(x, \varsigma)$ также не меняет [8] вид свободного оператора: $\hat{H}_0[\chi, \tilde{\chi}] = H_0[\chi] - \tilde{H}_0[\tilde{\chi}]$, эти свободные поля, вообще говоря, не являются физическими полями данной квантово-полевой модели [2, 7], и каждый член $H[\Psi]$ в $\hat{H}[\Psi, \tilde{\Psi}]$ должен быть эквивалентен в слабом смысле [8] свободному гамильтониану безмассовых (псевдо-) скалярных полей ($\phi(x)$), $\phi(x)$ и их тильда-партнеров уже при $T = 0$.

Для любого функционала $F[\Psi]$ от гейзенберговских полей в заданном представлении физических полей $\psi(x)$ – для заданного динамического отображения (ДО) $\Psi(x) = \Upsilon[\psi(x)]$ [8] при нулевой температуре, используя вакуумные средние (ВС) по термоваккууму $0(\varsigma)$ вида

$$\langle 0(\varsigma) | F[\Psi(x)] | 0(\varsigma) \rangle = \langle 0\tilde{0} | V_{\vartheta} F[\Psi(x)] V_{\vartheta}^{-1} | 0\tilde{0} \rangle = \langle 0\tilde{0} | F[V_{\vartheta} \Psi(x) V_{\vartheta}^{-1}] | 0\tilde{0} \rangle, \quad (5)$$

приходим к следующему формальному отображению на «холодные» физические термополя:

$$\Psi(x, [-]\varsigma) = V_{\vartheta} \Psi(x) V_{\vartheta}^{-1} = \Upsilon[V_{\vartheta} \psi(x) V_{\vartheta}^{-1}] = \Upsilon[\psi(x, [-]\varsigma)] \quad \text{вида} \quad \psi(x, [-]\varsigma) = V_{\vartheta} \psi(x) V_{\vartheta}^{-1}, \quad (6)$$

по существу с теми же коэффициентными функциями, что и в исходном ДО $\Psi(x) = \Upsilon[\psi(x)]$. Это, в отличие от работ [4, 8], полностью переносит всю температурную зависимость [10] с состояния термоваккуума $|0(\varsigma)\rangle$ (1) на «холодные» физические термополя $\psi(x, [-]\varsigma)$ (6). Однако для вычисления ВС (5) надо подставить в правые части (5), (6) выражения для «холодных» физических термополей (6) снова в терминах исходных физических полей $\psi(x)$ с помощью полученных из второго уравнения (6) их линейных комбинаций, аналогичных уравнениям (4) (но отличающихся знаком ϑ !), и вновь переупорядочить полученный оператор [10] по исходным физическим полям $\psi(x)$. Те же операции превращают формальное отображение (6) в зависящее от температуры ДО над «холодным» вакуумом $|0\tilde{0}\rangle$, и именно в таком смысле и будем снова называть далее правую часть первого уравнения (6) новым ДО $\hat{\Upsilon}$ (где под $c(k^1)$ понимается или $c(k^1)$, или $b(k^1)$):

$$\Psi(x, [-]\varsigma) = \Upsilon[\psi(x, [-]\varsigma)] = \Upsilon[V_{\vartheta} \psi(x) V_{\vartheta}^{-1}] \mapsto \hat{\Upsilon}[-]\varsigma; \psi(x) \equiv \hat{\Upsilon}[-]\varsigma; c(k^1), \tilde{c}(k^1)]. \quad (7)$$

Напротив, стандартный способ вычислений [4, 8] подразумевает подстановку обратных к (4) линейных комбинаций физических полей $\psi(x) = V_{\vartheta} \psi(x, [+]\varsigma) V_{\vartheta}^{-1}$ в терминах «горячих» физичес-

ких термополей, определенных соотношениями (4) $\psi(x, [+]\zeta) = V_9^{-1}\psi(x)V_9$, в левую часть уравнения (5) и переупорядочение полученного таким образом оператора по этим «горячим» физическим термополям над «горячим» – термическим вакуумом $|0(\zeta)\rangle$ (1). Эти же операции дадут тогда новое ДО $\hat{Y}$ для исходного ГП над тем же «горячим» термоваккуумом [8]: $\Psi(x) = Y[\psi(x)] = Y[V_9\psi(x, [+]\zeta)V_9^{-1}] \mapsto \hat{Y}[[+]\zeta; \psi(x, [+]\zeta)] \equiv \hat{Y}[[+]\zeta; c(k^1, [+]\zeta), \tilde{c}(k^1, [+]\zeta)]$. Подчеркнем, что это – исходное ГП, а не термополе $\Psi(x, [+]\zeta) = V_9^{-1}\Psi(x)V_9$. Во избежание недоразумений [10] необходимо отличать «горячие» и «холодные» физические термополя $\psi(x, [\pm]\zeta)$ над соответствующими вакуумами, где теперь $V_{9(F)} \mapsto \prod_{k^1} V_{9(k^1, \zeta)(F)}$, и аналогично для $V_{9(B)}$ ниже в (19) [4, 8, 12].

Кинематическая независимость тильда-сопряженных полей $\tilde{\Psi} : \{\Psi_\xi(x), \tilde{\Psi}_\xi^\#(y)\}_{|x^0=y^0=0} = 0$, $\{\Psi_\xi(x), \tilde{\Psi}_\xi^\#(y)\}_{|(x-y)^2 < 0} = 0$, соответствует указанной выше независимости их гамильтонианов, а следовательно, и гейзенберговских уравнений (ГУ). Это позволяет сосредоточиться на решении только для одного из них. Поскольку термополевые преобразования $V_{9(F)}$, $V_{9(B)}$ (1), (3) не зависят от координат и времени [8], то их можно применить непосредственно к этим соотношениям и ГУ модели Тирринга¹ при нулевой температуре [9, 11], что дает те же соотношения и ГУ теперь уже для термополей $\Psi(x, [\pm]\zeta)$ вида (7): $i\partial_0\Psi(x, \zeta) = [E(P^1) + g\gamma^0\gamma_\nu J_\nu^\Psi(x, \zeta)]\Psi(x, \zeta)$, или

$$2\partial_\xi\Psi_\xi(x, \zeta) = -igJ_{(\Psi)}^{-\xi}(x, \zeta)\Psi_\xi(x, \zeta), \quad 2\partial_\xi\tilde{\Psi}_\xi(x, \zeta) = ig\tilde{J}_{(\Psi)}^{-\xi}(x, \zeta)\tilde{\Psi}_\xi(x, \zeta), \quad \xi = \pm, \quad (8)$$

для каждой ξ -компоненты ГП, которые, в свою очередь, формально связаны с соответствующими компонентами гейзенберговского тока: $J_{(\Psi)}^\xi(x, \zeta) = J_{(\Psi)}^0(x, \zeta) + \xi J_{(\Psi)}^1(x, \zeta) \mapsto 2\Psi_\xi^\dagger(x, \zeta)\Psi_\xi(x, \zeta)$. Последовательно повторяя все этапы работ [11, 12] для случая $T=0$, можно вновь проинтегрировать эти ГУ, с теми же начальными условиями при $t=0$. Действительно, исходя из условий сохранения гейзенберговских токов: $\partial_\xi J_{(\Psi)}^\xi(x, \zeta) = 0$, снова придем уже для обоих ГУ (8) к условиям линеаризации в слабом («и») смысле вида [11, 12]

$$\gamma^0\gamma_\nu J_\nu^\Psi(x, \zeta) \mapsto \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma^0\gamma_\nu \hat{J}_\nu^\Psi(x, \zeta) \quad \text{при} \quad \hat{J}_\nu^\Psi(x, \zeta) = \lim_{\varepsilon, (\tilde{\varepsilon}) \rightarrow 0} \hat{J}_\nu^\Psi(x; \varepsilon(\tilde{\varepsilon}), \zeta) \equiv J_\nu^\Psi(x, \zeta); \quad (9)$$

и $Z_{(\chi)}(z) = 1$, где компоненты векторного тока, перенормированные далее нормальным упорядочением, определены швингеровской раздвижкой [7] с вычитанием ВС по «холодному» вакууму:

$$\hat{J}_\nu^\Psi(x; z, \zeta) = Z_{(\Psi)}^{-1}(z) \left[\overline{\Psi}(x+z, \zeta) \gamma^\nu \Psi(x, \zeta) - \langle 00 | \overline{\Psi}(x+z, \zeta) \gamma^\nu \Psi(x, \zeta) | 00 \rangle \right]; \quad (10)$$

$$J_{(\Psi)}^0(x, \zeta) \mapsto \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \hat{J}_{(\Psi)}^0(x; \tilde{\varepsilon}, \zeta) = \hat{J}_{(\Psi)}^0(x, \zeta), \quad J_{(\Psi)}^1(x, \zeta) \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{J}_{(\Psi)}^1(x; \varepsilon, \zeta) = \hat{J}_{(\Psi)}^1(x, \zeta), \quad (11)$$

где сначала $\tilde{\varepsilon}^0 = \varepsilon^1 \rightarrow 0$ при $\tilde{\varepsilon}^1 = \varepsilon^0 > 0$, $\varepsilon^2 = -\tilde{\varepsilon}^2 > 0$ с явно указанной ниже константой перенормировки $Z_{(\Psi)}(z)$. Линеаризация ГУ в представлении свободных полей $\chi(x, \zeta)$ вновь приводит к тому, что для их решения достаточно задать лишь бозонизацию для операторов этих свободных полей на соответствующие свободные бозонные безмассовые физические термополя [11, 12]:

$$\hat{J}_{(\chi)}^\mu(x, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \phi(x, \zeta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x, \zeta) \quad \text{или} \quad \hat{J}_{(\chi)}^{-\xi}(x, \zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_\xi \phi^\xi(x^\xi, \zeta). \quad (12)$$

Свободные бозонные термополя $\phi(x, \zeta)$ и $\phi(x, \zeta)$ определены ниже в (19) как неэквивалентные представления физических безмассовых скалярных и псевдоскалярных полей Клейна – Гордона:

¹ Здесь $x^\mu = (x^0, x^1)$; $x^0 = t$; $\hbar = c = 1$; $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1)$. Для $g^{\mu\nu}$: $g^{00} = -g^{11} = 1$. Для $\varepsilon^{\mu\nu}$: $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$; $\overline{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$; $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = -i\sigma_2$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$, $\gamma^\mu\gamma^5 = -\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$, где σ_i – матрицы Паули; I – единичная матрица; $x^\xi = x^0 + \xi x^1$, $2\partial_\xi = 2\partial/\partial x^\xi = \partial_0 + \xi\partial_1$, $P^1 = -i\partial_1$; суммирование по ξ нигде не подразумевается.

$\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x, \zeta) = 0$, $\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, \zeta) = 0$. Они выбираются взаимно дуальными и связаны симметричными интегральными соотношениями [11, 12], содержащими знаковую функцию $\varepsilon(s) = \text{sign}(s)$:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, \zeta) \\ \varphi(x, \zeta) \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \varepsilon(x^1 - y^1) \partial_0 \left\{ \begin{aligned} \phi(y^1, x^0, \zeta), \\ \varphi(y^1, x^0, \zeta), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

и с асимптотическими условиями $\varphi(-\infty, x^0, \zeta) + \varphi(\infty, x^0, \zeta) = 0$, $\phi(-\infty, x^0, \zeta) + \phi(\infty, x^0, \zeta) = 0$ – типа солитонных. Соответствующие сохраняющиеся заряды записываются в виде [7, 11, 12]

$$\left. \begin{aligned} O(\zeta) \\ O_5(\zeta) \end{aligned} \right\} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \Delta\left(\frac{y^1}{L}\right) \partial_0 \left\{ \begin{aligned} \phi(y^1, x^0, \zeta) \\ \varphi(y^1, x^0, \zeta) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\Delta=1} \left\{ \begin{aligned} \phi(-\infty, x^0, \zeta) - \phi(\infty, x^0, \zeta), \\ \varphi(-\infty, x^0, \zeta) - \varphi(\infty, x^0, \zeta) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

и регуляризованы обрезанием по объему функцией $\Delta(y^1/L)$ с фурье-образом $\delta_L(k^1)$ (см. (28) далее). Правые ($\xi = -$) и левые ($\xi = +$) термополя $\varphi^\xi(x^\xi, \zeta)$ и их заряды $Q^\xi(\zeta)$ определяются также аналогично [7, 11, 12] линейными комбинациями при $\xi = \pm$:

$$\varphi^\xi(x^\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [\varphi(x, \zeta) - \xi \phi(x, \zeta)], \quad Q^\xi(\zeta) = \frac{1}{2} [O(\zeta) - \xi O_5(\zeta)] = \pm 2\varphi^\xi(x^0 \pm \infty, \zeta). \quad (15)$$

Эти операторы подчиняются не зависящим от температуры коммутационным соотношениям [7]

$$[\varphi(x, \zeta), \partial_0 \varphi(y, \zeta)]|_{x^0=y^0} = [\phi(x, \zeta), \partial_0 \phi(y, \zeta)]|_{x^0=y^0} = i\delta(x^1 - y^1), \quad [O(\zeta), O_5(\zeta)] = 0; \quad (16)$$

$$[\varphi(x, \zeta), \varphi(y, \zeta)] = [\phi(x, \zeta), \phi(y, \zeta)] = -i \frac{\varepsilon(x^0 - y^0)}{2} \theta((x - y)^2); \quad (17)$$

$$[\varphi^\xi(s, \zeta), \varphi^{\xi'}(\tau, \zeta)] = -\frac{i}{4} \varepsilon(s - \tau) \delta_{\xi, \xi'}, \quad [\varphi^\xi(s, \zeta), Q^{\xi'}(\zeta)] = \frac{i}{2} \delta_{\xi, \xi'}. \quad (18)$$

Аналогичные коммутационные соотношения имеют место и для их тильда-партнеров, которые остаются кинематически независимыми и при конечной температуре: $[A(\zeta), \tilde{B}(\zeta)] = 0$. То есть различие «горячих» и «холодных» физических термополей здесь не проявляется. Нарушение условий кинематической независимости тильда-партнеров и различие «горячих» и «холодных» физических термополей возникает при переходе к частотным частям соответствующих полей $\varphi^{\xi(\pm)}(x^\xi, \zeta)$ и их зарядов $Q^{\xi(\pm)}(\zeta)$ и проявляется в коммутаторах положительно (+) и отрицательно (−) частотных частей, определенных здесь, как и в [11], операторами уничтожения/рождения псевдоскалярного поля: $Pc(k^1)P^{-1} = -c(-k^1)$, $[c(k^1), c^\dagger(q^1)] = 2\pi 2k^0 \delta(k^1 - q^1)$, над исходным «холодным» вакуумом $|0\tilde{0}\rangle$: $c(k^1)|0\tilde{0}\rangle = \tilde{c}(k^1)|0\tilde{0}\rangle = 0$, для обоих: «горячих» $[+]$ и «холодных» $[-]$ физических термополей в виде

$$|0(\zeta)\rangle = V_{9(B)}^{-1} |0\tilde{0}\rangle \equiv V_{(B)}[-9] |0\tilde{0}\rangle, \quad \text{th}^2 9 = e^{-\zeta k^0}, \quad 9 = 9(k^1; \zeta),$$

$$\varphi(x; [\pm]\zeta) = V_{9(B)}^{\mp 1} \varphi(x) V_{9(B)}^{\pm 1} = \varphi^{(+)}(x; [\pm]\zeta) + \varphi^{(-)}(x; [\pm]\zeta), \quad (19)$$

и то же для остальных бозе-полей $\phi(x), \varphi^\xi(x^\xi), Q^\xi$ с соответствующими разложениями Фурье и коммутаторами. Далее всюду заключаем каждый из $\pm$ в соответствующие ему скобки: $(\pm)$ или $[\pm]$, полагая $k^0 = |k^1|$, $\varphi^{\xi(-)}(x^\xi; [\pm]\zeta) = \left\{ \varphi^{\xi(+)}(x^\xi; [\pm]\zeta) \right\}^\dagger$, $\tilde{\varphi}^{\xi(-)}(x^\xi; [\pm]\zeta) = \left\{ \tilde{\varphi}^{\xi(+)}(x^\xi; [\pm]\zeta) \right\}^\dagger$ при

$$\varphi^{\xi(+)}(x^\xi; [\pm]\zeta) = -\frac{\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{2k^0} \theta(-\xi k^1) \left[\text{ch } 9 c(k^1) e^{-ik^0 x^\xi} \mp \text{sh } 9 \tilde{c}(k^1) e^{ik^0 x^\xi} \right]; \quad (20)$$

$$\tilde{\varphi}^{\xi(+)}(x^\xi; [\pm]\zeta) = -\frac{\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{2k^0} \theta(-\xi k^1) \left[\text{ch } 9 \tilde{c}(k^1) e^{ik^0 x^\xi} \mp \text{sh } 9 c(k^1) e^{-ik^0 x^\xi} \right]; \quad (21)$$

$$Q^{\xi(+)}([\pm]\varsigma) = \lim_{L \rightarrow \infty} i \frac{\xi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk^1 \theta(-\xi k^1) \left[\operatorname{ch} \vartheta c(k^1) e^{-ik^0 \hat{x}^0} \pm \operatorname{sh} \vartheta \tilde{c}(k^1) e^{ik^0 \hat{x}^0} \right] \delta_L(k^1); \quad (22)$$

$$\tilde{Q}^{\xi(+)}([\pm]\varsigma) = \lim_{L \rightarrow \infty} -i \frac{\xi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk^1 \theta(-\xi k^1) \left[\operatorname{ch} \vartheta \tilde{c}(k^1) e^{ik^0 \hat{x}^0} \pm \operatorname{sh} \vartheta c(k^1) e^{-ik^0 \hat{x}^0} \right] \delta_L(k^1); \quad (22a)$$

$$Q^{\xi(-)}([\pm]\varsigma) = \left\{ Q^{\xi(+)}([\pm]\varsigma) \right\}^{\dagger}, \quad \tilde{Q}^{\xi(-)}([\pm]\varsigma) = \left\{ \tilde{Q}^{\xi(+)}([\pm]\varsigma) \right\}^{\dagger}. \quad (22б)$$

Возникшая фиктивная $\hat{x}^0$ -зависимость частотных частей зарядов является артефактом объемной регуляризации (14) и, согласно (25), (26), (28), исчезает в конце вычислений. Для «горячих» $[+]$ термополей над $|0(\varsigma)\rangle$ имеем обычное выражение [7] для двухточечной функции (Вайтмана):

$$\begin{aligned} \langle 0(\varsigma) | \varphi^{\xi}(s; [+]\varsigma) \varphi^{\xi'}(\tau; [+]\varsigma) | 0(\varsigma) \rangle &= \langle 0 | \varphi^{\xi}(s) \varphi^{\xi'}(\tau) | 0 \rangle = \\ &= \left[\varphi^{\xi(+)}(s), \varphi^{\xi'(-)}(\tau) \right] = -i \delta_{\xi, \xi'} D^{(-)}(s - \tau). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $D^{(-)}(s) = \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} D^{(-)}(s, \varsigma; \mu_1)$ при $i \left[\varphi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), \varphi^{\xi'(\mp)}(\tau; [\pm]\varsigma) \right] \equiv (\pm 1) \delta_{\xi, \xi'} D^{(-)}(\pm(s - \tau), \varsigma; \mu_1)$ и

для обоих $[\pm]$ термополей $\langle 0\tilde{0} | \varphi^{\xi}(s; [\pm]\varsigma) \varphi^{\xi'}(\tau; [\pm]\varsigma) | 0\tilde{0} \rangle = \left[\varphi^{\xi(+)}(s; [\pm]\varsigma), \varphi^{\xi'(-)}(\tau; [\pm]\varsigma) \right]$ при

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), \varphi^{\xi'(\mp)}(\tau; [\pm]\varsigma) \right] = (\mp 1) \frac{1}{4\pi} \delta_{\xi, \xi'} \left\{ \ln \left(i \bar{\mu} \frac{\varsigma}{\pi} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{\varsigma} (\pm(s - \tau) - i0) \right) \right) - g(\varsigma, \mu_1) \right\}; \quad (24)$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), Q^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma) \right] = \delta_{\xi, \xi'} \left[\frac{i}{4} - (\pm 1) \left(\frac{\hat{x}^0 - s}{2\varsigma} \right) \right], \quad \left[Q^{\xi(\pm)}([\pm]\varsigma), Q^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma) \right] = (\pm 1) a_1 \delta_{\xi, \xi'}; \quad (25)$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), \tilde{\varphi}^{\xi'(\mp)}(\tau; [\pm]\varsigma) \right] = (\pm 1) [\pm 1] \frac{1}{4\pi} \delta_{\xi, \xi'} \left\{ \ln \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{\varsigma} (s - \tau) \right) \right) - f(\varsigma, \mu_2) \right\},$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), \tilde{Q}^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma) \right] = (\pm 1) [\pm 1] \delta_{\xi, \xi'} \left(\frac{\hat{x}^0 - s}{2\varsigma} \right), \quad \left[Q^{\xi(\pm)}([\pm]\varsigma), \tilde{Q}^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma) \right] = (\pm 1) [\mp 1] a_2 \delta_{\xi, \xi'}, \quad (26)$$

где введены функции со следующими свойствами при $\bar{\mu} = \mu e^{C_3} \rightarrow 0$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1 e^{C_3} \rightarrow 0$, $\mu_2 \rightarrow 0$:

$$g(\varsigma, \mu_1) = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{dk^1}{k^0} \left(\frac{2}{e^{\varsigma k^0} - 1} \right) \mapsto \frac{2}{\varsigma \mu_1} - \ln \left(\frac{2\pi}{\varsigma \mu_1} \right), \quad \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} g(\varsigma, \mu_1) = 0,$$

$$f(\varsigma, \mu_2) = \int_{\mu_2}^{\infty} \frac{dk^1}{k^0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(\varsigma k^0/2)} \right) \mapsto \frac{2}{\varsigma \mu_2} - \ln 2, \quad \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} f(\varsigma, \mu_2) = 0, \quad I_n^{\Delta} = \int_0^{\infty} dt t^n (\bar{\Delta}(t))^2; \quad (27)$$

$$L \bar{\Delta}(k^1 L) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx^1}{2\pi} \Delta \left(\frac{x^1}{L} \right) e^{\pm i k^1 x^1} = \delta_L(k^1), \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \delta_L(k^1) = \delta(k^1), \quad a_0 = \pi \int_0^{\infty} dk^1 k^1 (\delta_L(k^1))^2 = \pi I_1^{\Delta}; \quad (28)$$

$$a_1 = a_0 + 2\pi \int_0^{\infty} dk^1 k^1 \frac{(\delta_L(k^1))^2}{e^{\varsigma k^0} - 1} = a_0 + 2\pi \int_0^{\infty} dt t \frac{(\bar{\Delta}(t))^2}{e^{\varsigma t/L} - 1} = 2\pi I_0^{\Delta} \frac{L}{\varsigma} + \frac{\pi}{6} I_2^{\Delta} \frac{\varsigma}{L} + O \left(\left(\frac{\varsigma}{L} \right)^3 \right), \quad \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} a_1 = a_0,$$

$$a_2 = \pi \int_0^{\infty} dk^1 k^1 \frac{(\delta_L(k^1))^2}{\operatorname{sh}(\varsigma k^0/2)} = \pi \int_0^{\infty} dt t \frac{(\bar{\Delta}(t))^2}{\operatorname{sh}(\varsigma t/2L)} = 2\pi I_0^{\Delta} \frac{L}{\varsigma} - \frac{\pi}{12} I_2^{\Delta} \frac{\varsigma}{L} + O \left(\left(\frac{\varsigma}{L} \right)^3 \right), \quad \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} a_2 = 0, \quad (29)$$

где C_3 – константа Эйлера – Маскерони, а $L \rightarrow \infty$ при $\varsigma = \text{const}$. Можно показать [12], что для любой разумной регуляризации разность $a_1 - a_2$ не зависит от L при $L \rightarrow \infty$. Если в (28) $a_0 < \infty$, как для любой непрерывной кусочно-гладкой $\Delta(x^1/L)$, то в (29) $a_1 - a_2 \rightarrow 0$ в этом пределе.

4. Тирринговские термополя и вакуумные средние

Следуя [7], из введенных выше бозе-полей можно построить различные унитарно неэквивалентные представления решений уравнения Дирака для свободного безмассового «пробного» поля при конечной температуре, $\partial_\xi \chi_\xi(x^{-\xi}, \varsigma) = 0$, в виде локальных нормально упорядоченных экспонент левых и правых бозонных термополей $\phi^\xi(x^\xi, \varsigma)$ и их зарядов $Q^\xi(\varsigma)$. При этом кинематической независимости тильда-партнеров можно добиться лишь путем «подмешивания» клейновских факторов, включающих заряды $\tilde{Q}^\xi(\varsigma)$, $\tilde{Q}^{-\xi}(\varsigma)$. Искомое термополе должно быть также хорошо определено при $T > 0$ и в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$, согласно указанному выше макроскопическому смыслу параметра L , и приводить к соотношениям бозонизации (12) для перенормированных, нормально упорядоченных токов (10), (11) полей $\chi(x, \varsigma)$ при $Z_{(\chi)}(z) = 1$. Такое свободное термополе с опущенным вкладом в (32) от $a_1 - a_2 \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\chi_\xi(x^{-\xi}; [\pm]\varsigma) = N_\phi \left(\exp \left\{ R_\xi(x^{-\xi}; [\pm]\varsigma) \right\} \right) u_\xi(\mu_1, [\pm]\varsigma); \quad (30)$$

$$R_\xi(x^{-\xi}; [\pm]\varsigma) = -i2\sqrt{\pi} \left[\phi^{-\xi}(x^{-\xi}; [\pm]\varsigma) + G^{-\xi}([\pm]\varsigma) \sigma_0^\xi / 4 + G^\xi([\pm]\varsigma) \sigma_1^\xi / 4 \right]; \quad (31)$$

$$u_\xi(\mu_1, [\pm]\varsigma) = (\bar{\mu}/2\pi)^{1/2} e^{i\varpi - i\xi\Theta/4} \exp\{-g(\varsigma, \mu_1)/2\} \quad \text{при} \quad \sigma_0^\xi = -\xi\sigma, \quad \sigma_1^\xi = \xi 1 + \rho. \quad (32)$$

Здесь ϖ и Θ – произвольные общая и относительная фазы, а параметры σ и ρ определяются ниже антикоммутационными соотношениями (КАС) (40) и условиями кинематической независимости, и введены новые заряды, имеющие, согласно (25), (26), простые свойства коммутации с полями:

$$G^\xi([\pm]\varsigma) = Q^\xi([\pm]\varsigma) + [\pm 1] \tilde{Q}^\xi([\pm]\varsigma), \quad [G^{\xi(\pm)}([\pm]\varsigma), G^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma)] = (\pm 1) 2(a_1 - a_2) \delta_{\xi, \xi'}; \quad (33)$$

$$[\phi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), G^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma)] = \frac{i}{4} \delta_{\xi, \xi'}, \quad [\phi^{\xi(\pm)}(s; [\pm]\varsigma), \tilde{G}^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma)] = [\pm 1] \frac{i}{4} \delta_{\xi, \xi'}; \quad (34)$$

$$[G^{\xi(\pm)}([\pm]\varsigma), \tilde{G}^{\xi'(\mp)}([\pm]\varsigma)] = (\pm 1) [\pm 1] 2(a_1 - a_2) \delta_{\xi, \xi'}. \quad (35)$$

Интегрируя линеаризованные ГУ (8), (9), следуя работе [11], получим нормально упорядоченную экспоненту ДО для термополя Тирринга в пределе $L \rightarrow \infty$ в форме, аналогичной [7, 11], с параметром ультрафиолетового обрезания Λ [11] и $\Sigma_0^\xi = \bar{\alpha}\sigma_0^\xi - \bar{\beta}\sigma_1^\xi$, $\Sigma_1^\xi = \bar{\alpha}\sigma_1^\xi - \bar{\beta}\sigma_0^\xi$ при $\xi = \pm$:

$$\Psi_\xi(x; [\pm]\varsigma) = N_\phi \left(\exp \left\{ \mathfrak{R}_\xi(x; [\pm]\varsigma) \right\} \right) w_\xi(\mu_1, \varsigma); \quad (36)$$

$$\mathfrak{R}_\xi(x; [\pm]\varsigma) = -i \left[\Xi^{-\xi}(x; [\pm]\varsigma) + G^{-\xi}([\pm]\varsigma) \Sigma_0^\xi / 4 + G^\xi([\pm]\varsigma) \Sigma_1^\xi / 4 \right]; \quad (37)$$

$$\Xi^{-\xi}(x; [\pm]\varsigma) = \bar{\alpha} \phi^{-\xi}(x^{-\xi}; [\pm]\varsigma) + \bar{\beta} \phi^\xi(x^\xi; [\pm]\varsigma),$$

$$w_\xi(\mu_1, \varsigma) = (\bar{\mu}/2\pi)^{1/2} (\bar{\mu}/\Lambda)^{\bar{\beta}^2/4\pi} e^{i\varpi - i\xi\Theta/4} \exp \left\{ -g(\varsigma, \mu_1) \left[1/2 + \bar{\beta}^2/4\pi \right] \right\} \quad (38)$$

$$\text{при} \quad \sigma_0^\xi = -\xi\sigma \mapsto \xi(2\ell + 1), \quad \sigma_1^\xi = \xi 1 + \rho \mapsto \xi 1 + (2n + 1), \quad \text{где } \ell, n - \text{любые целые числа.} \quad (39)$$

Правильные лоренц-трансформационные свойства для спина 1/2 и выполнение КАС (см. (40)) вновь налагают связи [11] на введенные параметры: $\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 = 4\pi$, $\bar{\beta} - \beta g/2\pi = 0$. Условия (39) также обеспечивают выполнение КАС (40), а также взаимную локальность и кинематическую независимость одновременно и для свободных (30) – (32), и для тирринговских термополей (36) – (39) с их тильда-партнерами. Непосредственное вычисление перенормированных операторов векторного тока (10), (11) для решения (36) – (39), с учетом соотношений (18), (23) – (29) и того, что при $z \rightarrow 0$

$$Z_{(\Psi)}(z) = \left[\left(i\Lambda \frac{\varsigma}{\pi} \right)^2 \text{sh} \left(\frac{\pi}{\varsigma} (z^\xi - i0) \right) \text{sh} \left(\frac{\pi}{\varsigma} (z^{-\xi} - i0) \right) \right]^{-\bar{\beta}^2/4\pi} \underset{z \rightarrow 0}{=} \left(-\Lambda^2 z^2 \right)^{-\bar{\beta}^2/4\pi}, \text{ а } Z_{(\chi)}(z) \equiv 1,$$

воспроизводит те же соотношения бозонизации и линеаризации (9), (12) в виде соответствующих слабых равенств: $\hat{J}_{(\Psi)}^v(x, \varsigma) \stackrel{w}{=} -(\beta/2\pi) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x, \varsigma) \stackrel{w}{=} (\beta/2\sqrt{\pi}) \hat{J}_{(\chi)}^v(x, \varsigma)$, фиксирующих такие же связи [11] между параметрами, как $\bar{\alpha} = (2\pi/\beta + \beta/2)$, $\bar{\beta} = (2\pi/\beta - \beta/2)$ при $e^\eta \equiv 2\sqrt{\pi}/\beta = \sqrt{1 + g/\pi}$, и вновь демонстрирует самосогласованность приведенных вычислений. Как и при $T = 0$ в [11], найденная нормальная форма термополя модели Тирринга (36)–(39) определяет $Z_{(\Psi)}(z)$ в качестве его константы перенормировки, чем задается та же динамическая размерность [9] термополя:

$$\left\{ \Psi_\xi(x, \varsigma), \Psi_\xi^\dagger(y, \varsigma) \right\} \Big|_{x^0=y^0} = \left[\Lambda^2 (x^1 - y^1)^2 \right]^{-\bar{\beta}^2/4\pi} \delta_{\xi, \xi'} \delta(x^1 - y^1), \quad d_{(\Psi)} = 1/2 + \bar{\beta}^2/4\pi, \quad (40)$$

где $\bar{\beta} = 2\sqrt{\pi} \operatorname{sh} \eta$ [11, 12] и $Z_{(\Psi)}(x - y) \Big|_{x^0=y^0} \cong 1$ при $x^1 - y^1 \cong 1/\Lambda$.

Отбрасывание при $T = 0$ тильдованных зарядов $\tilde{Q}^\xi$ в (33), согласно (25), (26), (29), приводит как свободное поле (30) – (32), так и решения (36) – (39) к двухпараметрическим обобщениям соответствующих решений Оксака [7] с произвольными σ и ρ в (32) и (39), уже как непрерывными параметрами преобразований, обобщающих преобразования конформного сдвига [7] в виде

$$K_\sigma = \exp \left\{ \frac{i}{4} \sigma O O_5 \right\}, \quad Y_\rho = \exp \left\{ \frac{i}{8} \rho (O_5^2 - O^2) \right\}, \quad \Psi(x; \sigma, \rho) = Y_\rho^{-1} K_\sigma^{-1} \Psi^{Ok}(x) K_\sigma Y_\rho. \quad (41)$$

Известные решения для $T = 0$ отвечают $\rho = 0$ и частным значениям σ , отличным от допустимых условиями (39) при $T > 0$, [12]: $\sigma = 0$ для решения Оксака [7]; $\sigma = \pm 1$ для двух возможных вариантов решений Мандельстама [13]; $\sigma = -\operatorname{ch} 2\eta$ для решения Морчио и др. [14].

Приводя к нормальной форме произведение нормальных экспонент (36) – (39), найдем, что с учетом опущенных в (32), (38) вкладов, пропорциональных $a_1 - a_2$, несмешанное p -точечное ВС для термополей Тирринга при $l_j \Re_{\xi_j}(x_j; [\pm]\varsigma) \equiv \Im_j$, где $l = +1$ для Ψ и $l = -1$ для $\Psi^\dagger$, и при

$$\sum_{i=1}^p l_i \equiv \Omega, \quad \sum_{i=1}^p l_i \xi_i \equiv \Omega_5, \quad \Gamma_\pm = \ln \bar{\mu} - g(\varsigma, \mu_1) - (a_1 - a_2) \frac{\pi}{2} \left[(1 \pm \sigma)^2 + \left(\frac{\beta^2}{4\pi} \right)^{\pm 2} \rho^2 \right] \quad (42)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\Lambda^{\bar{\beta}^2/4\pi \sqrt{2\pi}} \right)^p \left\langle 00 \left| \prod_{i=1}^p \Psi_{\xi_i}^{(l_i)}(x_i; [\pm]\varsigma) \right| 00 \right\rangle = \exp \left\{ -(a_1 - a_2) \frac{\pi}{4} \rho \left[\frac{4\pi}{\beta^2} (1 + \sigma) + \frac{\beta^2}{4\pi} (1 - \sigma) \right] \Omega \Omega_5 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\Gamma_+}{4} \Omega^2 \frac{4\pi}{\beta^2} \right\} \exp \left\{ \frac{\Gamma_-}{4} \Omega_5^2 \frac{\beta^2}{4\pi} \right\} \exp \left\{ i\varpi \Omega - i \frac{\Theta}{4} \Omega_5 \right\} \times \\ & \times \left\langle 00 \left| N_\varphi \left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^p \Im_j \right) \right\} \right| 00 \right\rangle \prod_{i < k}^p \left\{ e^{i\pi(\xi_i - \xi_k)} \left[\frac{\operatorname{sh}(\pi(x_i^- - x_k^- - i0)/\varsigma)}{\operatorname{sh}(\pi(x_i^+ - x_k^+ - i0)/\varsigma)} \right]^{\xi_i + \xi_k} \times \right. \\ & \left. \times \left[(i\varsigma/\pi)^2 \sinh(\pi(x_i^- - x_k^- - i0)/\varsigma) \operatorname{sh}(\pi(x_i^+ - x_k^+ - i0)/\varsigma) \right]^{(4\pi/\beta^2) + \xi_i \xi_k (\beta^2/4\pi)} \right\}^{l_i l_k / 4}, \quad (43) \end{aligned}$$

в котором при $L \rightarrow \infty$, $a_1 - a_2 \rightarrow 0$ исчезает вся зависимость от параметров σ , ρ (39). В то же время учет обоих правил суперотбора [7] из (42): $\Omega = 0$, $\Omega_5 = 0$, устраняет, кроме того, и все инфракрасные расходимости $\Gamma_\pm$ (42), и нефизические фазовые множители, оставляя в свободной уже и от ультрафиолетовых расходимостей правой части (43) лишь две последние строки с произведением фигурных скобок по $i < k \leq p$, чей предел при $T \rightarrow 0$ совпадает тогда с соответствующими p -точечными ВС (функциями Вайтмана) поля Тирринга при нулевой температуре [7].

Заключение

Основные уроки данной работы таковы. Определенное температурное ГП, как и при $T = 0$ [7], – это вполне нормально упорядоченный оператор в смысле ДО [8] на неприводимый набор физических полей [7]. Лишь такая форма явно обеспечивает правильные свойства перенормировки, коммутации и симметрии, вскрывая простые связи между различными типами решений при нулевой и конечной температурах, а выбор представления в пространстве свободных безмассовых *псевдоскалярных* полей заметно снижает [12] остроту проблемы неположительности метрики, индуцированной их функцией Вайтмана $D^{(-)}$ (23) [14]. Как и для $T = 0$ в [11], линеаризация ГУ и нелинейность ДО на *свободные* физические бозонные термополя позволяют обойти запрет теоремы Хаага на начальное условие при $t = 0$, сближая этот подход с методами диагонализации [17].

В отличие от [10, 16], учет произвольной регуляризации зарядов и всех их коммутационных соотношений с бозонными термополями позволил однозначно зафиксировать процедуру удвоения числа степеней свободы, согласованную для бозе- и ферми-полей, удалив одновременно все фиктивные нефизические зависимости, и выявить новые источники и важную роль правил суперотбора [7, 10, 12]. Введение «горячих» и «холодных» физических термополей позволяет различать представления ДО над соответствующими вакуумами, избегая недоразумений работ [10, 15, 16]. Полученное решение (36) – (39) показывает также, что прямая термализация решений Мандельстама в [10, 15, 16] не является корректной, поскольку преобразования (41) при $T > 0$ допускают лишь дискретные нечетные параметры (39), вместо непрерывных при $T = 0$. Причиной этой дискретизации является появление указанных выше дополнительных условий взаимной локальности и кинематической независимости фермионных тильда-партнеров.

Авторы выражают благодарность И. Фришману, А.Н. Валлу, Я.М. Шниру и В.М. Левианту за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квасников И.А. Статическая физика. Т. 2. – М.: УРСС, 2002.
2. Gómez Nicola A. and Steer D. // Nucl. Phys. – 1999. – V. B549. – P. 409.
3. Рубаков В.А. Классические калибровочные поля. Теории с фермионами. – М.: УРСС, 2005.
4. Ojima I. // Ann. Phys. – 1981. – V. 137. – P. 1.
5. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. – М.: Наука, 1987.
6. Липкин Г. Квантовая механика. – М.: Мир, 1977.
7. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. – М.: Наука, 1987; Оксак А.И. // ТМФ. – 1981. – Т. 48. – С. 297.
8. Умэдзава Х., Мацумото Х., Татики М. Термополевая динамика и конденсированные состояния. – М.: Мир, 1984.
9. Dell'Antonio G.F., Frishman Y., and Zwanziger D. // Phys. Rev. D. – 1972. – V. 6. – No. 4. – P. 988.
10. Amaral R.L.P.G., Belvedere L.V., and Rothe K.D. // Ann. Phys. – 2005. – V. 320. – P. 399.
11. Korenblit S.E. and Semenov V.V. // J. Nonlin. Math. Phys. – 2011. – V. 18. – No. 1. – P. 65; arXiv: hep-th/1003.1439 v.2.
12. Коренблит С.Э., Семенов В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 6. – С. 79; arXiv: hep-th/1109.2278, arXiv: hep-th/1108.5392.
13. Mandelstam S. // Phys. Rev. D. – 1975. – V. 11. – P. 3026.
14. Morchio G., Pierotti D., and Strocchi F. // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – P. 777.
15. Amaral R.L.P.G., Belvedere L.V., and Rothe K.D. // Ann. Phys. – 2008. – V. 323. – P. 2662.
16. Amaral R.L.P.G., Belvedere L.V., Rothe K.D., and Rodrigues A.F. // J. Phys. – 2011. – V. A44. – P. 025401.
17. Fujita T., Hiramoto M., Homma T., and Takahashi H. // J. Phys. Soc. Jpn. – 2005. – V. 74. – P. 1143.

Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия
E-mail: korenbl@ic.isu.ru

Поступила в редакцию 25.05.12.