МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 530.145; 539.12

Коренблит Сергей Эммануилович

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

01.04.02 - теоретическая физика

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант -
доктор физ.-мат. наук,
профессор Валл А.Н.

Иркутск–2001

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Основные сокращения и обозначения

(КЭД), КХД– квантовая (электро) хромо/динамика

НЙЛ– Намбу-Йона-Лазинио (модель)

(КАС) ККС– канонические (анти) коммутационные соотношения

ГУ– гейзенберговские уравнения

ГП– гейзенберговские поля

ЭМП– электромагнитное поле

БС– Бете-Солпитера (уравнение, амплитуда, матричный элемент)

БКШ– Бардина-Купера-Шриффера (модель)

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$– трехмерные вектора координат; $\mathbf{v}$– вектор скорости

$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\kappa}$– вектора импульсов

$\mathcal{E}(\mathbf{k}),\ E(\mathbf{k})$– "голый" и физический одночастичные спектры

$E_q^{\mathcal{P}},\ E_2(\mathcal{P}, \mathbf{k})$– двухчастичные спектры (главы 1–5)

$m_0,\ m$, и/или $\mathcal{M},\ M$– "голые" и/или перенормированные массы

$\epsilon_{\alpha\beta},\ \epsilon_{12} = 1$, – антисимметричный тензор (главы 2, 4, 5)

$\epsilon_\nu,\ \epsilon^2 = 1$, – вектор Маркова-Юкавы (глава 3)

$i\epsilon,\ \epsilon \to +0$, – малая мнимая добавка (глава 3)

$\epsilon_{0,1,2}$ – коэффициенты разложения (5.16) (глава 5)

$\Psi_\alpha^a(x)$– гейзенберговские ферми-поля

$\psi_\alpha^a(x)$– физические (пробные) ферми-поля (главы 2, 3, 4)

$\psi^a(x)$– биспинорное ферми- поле (глава 4)

$\mathrm{H}_{[\Psi]}(t)$– заданный исходный гамильтониан

$H_{[\psi]}(t),\ H\{A\}$– гамильтониан в диагональной и/или в нормальной форме

$\dagger$– эрмитово сопряжение (главы 1, 2, 3, 4)

$\mathbf{A}_\alpha^\dagger(\mathbf{k}),\ \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k})$– операторы рождения и уничтожения физических полей

$\mathbf{A}_\alpha^\#(\mathbf{k}, t),\ a_\alpha^\#(\mathbf{k}, t)$ – гейзенберговские оперторы

$\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})$– поле билинейного источника (главы 2, 3)

$\phi(x)$ – грассмановы поля (глава 3)

$\phi_\zeta(x)$– компоненты кирального физического поля (глава 3)

$\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})$, $\phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})_{\alpha\beta}$– волновые функции в импульсном представлении

$\psi_{q,b}(\mathbf{x})$– волновые функции в координатном представлении (главы 5, 6)

$\delta_3(\mathbf{x}=0) \longmapsto \int^{\Lambda} \frac{d^3\mathrm{k}}{(2\pi)^3} = \frac{\Lambda^3}{6\pi^2} = \frac{1}{V^*}$,– регуляризация обрезанием Λ

$\mathbf{P}$– оператор импульса

$\mathbf{G}$– оператор (генератор) преобразования Боголюбова (глава 4)

$\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}$– составной оператор (голдстоуновского бозона) (главы 4, 5)

$S_\Psi(x)$, $\boldsymbol{J}_\Psi(x)$ $j^{\nu}_{(\Psi)}(x)$– гейзенберговские токи (главы 2, 3, 4)

$S_\psi(x)$, $j^{\nu}_{(\psi)}(x)$, $j^{\zeta}_{\phi}(x)$– токи физических (пробных) полей (главы 2, 3)

γ^ν, $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\widehat{O}^A$– матрицы Дирака и их комбинации (главы 3, 4)

$*$– комплексное, операторное, матричное сопряжение (главы 4, 5, 6)

$\overline{T}$– замыкание оператора или замыкание области (глава 6)

$\overline{z}$– комплексное сопряжение (глава 6)

$\phi_{\pm}(\mathbf{x})$– дефектные элементы (глава 6)

ϕ_m– вектора пространства $\mathcal{H}_m$, $m > 0$ (глава 6)

$R_T(z)$– резольвента оператора T (глава 6)

$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$– метрический тензор пространства Понтрягина (глава 6)

$\chi^{(-n)}_j$– обобщенные дефектные элементы из пространства $\mathcal{H}_{-n}$ (глава 6)

$|\boldsymbol{\psi}\rangle$– абстрактный бра-вектор произвольного пространства (глава 6)

$[\boldsymbol{\psi}]$– вектор-столбец пространства Понтрягина (глава 6)

Введение

Общая характеристика и актуальность работы.

Фундаментальной теоретической проблемой современной квантовой физики являются механизмы формирования связанных состояний и перестройки вакуума в различных, в том числе неперенормируемых моделях квантовой теории поля (КТП). Непертурбативная природа связанных состояний в квантовой хромодинамике (КХД) и в физике конденсированного состояния вызывает многочисленные попытки развития непертурбативных методов в КТП, нацеленных прежде всего на получение явных непертурбативных решений соответствующих теоретических моделей [1].

В частности, модели с 4-х фермионным взаимодействием естественно возникают при решении широкого класса задач, как в теории элементарных частиц, так и в теории конденсированных сред. Они используются для описания таких непертурбативных эффектов, как спонтанного нарушения симметрии и режима низкоэнергетической адронизации в КХД, или возникновения щели в спектре сверхпроводника. Популярным примером является модель Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ), [2] -[10], первоначально возникшая еще до появления концепции кварков, как теория эффективного взаимодействия нуклонов.

В современной формулировке - это модель с кварковыми степенями свободы, плотность лагранжиана которой построена с учетом наблюдаемых в природе симметрий КХД, где, кроме точной динамической – цветовой симметрии, имеется ряд приближенных симметрий. В секторе самых легких кварков это ароматовая – изотопическая $SU(2)$ и тесно связанная с ней киральная $SU_L(2)\times SU_R(2)$ симметрии, признанные существенными для понимания свойств самых легких адронов. Модели контактного четырех фермионного взаимодействия оказываются особенно полезны для выявления механизма нарушения этих симметрий, в частности, динамической генерации фермионных масс, вызванной спонтанным нарушением киральной симметрии.

Попытки построения математически корректной но физически содержательной теории на основе 4-х фермионного взаимодействия с помощью теории возмущений и/или метода Тамма-Данкова предпринимались еще Гейзенбергом [11] и Ландау [12].

Известно, однако, что к неперенормируемым контактным взаимодействиям типа НЙЛ не могут быть применены подходы и оценки на базе методов обычной теории возмущений: вычисления на основе 4-х фермионных моделей сталкиваются с "размножающимися" ультрафиолетовыми расходимостями интегралов по 3-х или 4-х мерному импульсному пространству. Эти расходимости интерпретируются, как правило, путем введениея параметра обрезания Λ, что не только ограничивает область применимости модели [7], но и является не вполне корректной математической процедурой.

В 4-х фермионных моделях теории конденсированного состояния реальный фермион всегда движется при температуре $T \geq 0$ в более или менее известной, реальной среде либо из таких же как он фермионов, либо в решетке с более или менее равномерно распределенным зарядом противоположного знака, что приводит к естественному обрезанию либо на энергии Ферми, либо на дебаевской частоте, замораживающих Λ. В то же время, простое обрезание расходящихся интегралов в полевых моделях типа НЙЛ требует дополнительных математических предписаний и их определенного физического истолкования. Если же допустить возможность *самосогласованного* описания эффективным контактным четырехфермионным взаимодействием области низкоэнергетической адронизации, то, по видимому, следует избегать внесения заранее дополнительных "больших внутренних параметров" в такую, "неизлечимо" нерелятивистскую теорию и потребовать от основных возникающих физических характеристик, чтобы они оставались конечными в пределе $\Lambda \to \infty$. Другими словами, необходимо указать естественный механизм "размерной трансмутации" нефизического для данной области энергий параметра Λ в наблюдемые физические величины.

Оказывается, что такой механизм и математическая природа "неперенормируемых" ультрафиолетовых расходимостей вскрываются в рамках теории расширений: сильная сингулярность полевого взаимодействия в этих моделях не допускает построения корректного квантовомеханического гамильтониана в Гильбертовом пространстве. Поэтому гамильтониан в каждом N-частичном Фоковском секторе должен рассматриваться в рамках предписаний, основанных на теории самосопряженных расширений симметрических операторов [13], [14], в том числе, с выходом в пространства с индефинитной метрикой [15], например, в пространства Понтрягина [16]-[25]. Как указано в [15], только таким путем можно уйти от тривиального нульзарядного решения [12] в этих моделях.

С этой точки зрения весьма привлекательны оказываются нерелятивистские контактные 4-х фермионные модели, которые в рамках теории расширений допускают наличие точных аналитических решений в трехмерном пространстве, в одно- и двух- частичном секторе. Эти решения, в свою очередь, позволяют исследовать и трехчастичный сектор, и могут послужить основой как для изучения механизмов бозонизации и конденсации, так и для возможных релятивистских обобщений в духе [26].

Следует отметить, что предлагаемые здесь точно решаемые в двухчастичном секторе полевые модели контактного взаимодействия с участием векторных токов приводят к сильно сингулярным парным потенциалам, которые в современной теории расширений проявляются как локальные и, в тоже время, сепарабельные возмущения конечного ранга, содержащие конечное число произвольных параметров расширения, имеющих ясный физический смысл.

Таким образом, контактное 4-х фермионное полевое взаимодействие может оказаться физически даже более содержательным, и, в то же время, более предсказательным чем популярное нелокальное сепарабельное 4-х фермионное взаимодействие, допускающее бесконечно параметрический произвол [27]-[30].

Описание адронов на основе эффективного 4-х фермионного лагранжиана обычно связано с различными вариантами процедуры бозонизации. Например, локальная бозонизация [31]-[33] приводит к различным типам сигма - моделей [34] - [45], достоинства и недостатки которых хорошо известны. Другой существующий подход к этой задаче основан на суммировании диаграмм для 2-х фермионной (четырехточечной) функции Грина в релятивистской КТП, что по сути эквивалентно решению уравнения Бете-Солпитера (БС) [46], к которому, фактически, приводит и метод билокальной бозонизации [47]-[60].

Не вдаваясь в детальный анализ этого подхода, заметим лишь, что прямое применение уравнения БС сопряжено со значительными принципиальными и техническими сложностями [46], [61], [62], [63]. Поскольку, по образному выражению Эддингтона, "электрон вчера и протон сегодня не могут образовывать связанного состояния", практическое использование этого уравнения для описания связанных состояний, даже с простым лесничным ядром, предполагает (за редкими исключениями [63], [64]) ту [47], или иную [65]-[69] (приближенную) *одновременну́ю редукцию* его к точно решаемому и, как правило, нерелятивистскому уравнению Шредингера (или Липпмана-Швингера). Лишь имея такие явные (хотя и приближенные) спектры и волновые функции связанных состояний, уже описывающие, однако, главный – непертурбативный эффект "связанности", можно затем вычислять различные релятивистские поправки на запаздывание, отдачу и т.д. [70], [71]. Для позитрония, например, роль такого точно решаемого уравнения играет уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом [73]. По существу, все известные точные решения в КЭД, как самих уравнений БС в лесничном приближении (в том числе [63], [64]), так и их одновременны́х (квазипотенциальных) аналогов [74], являются тем или иным способом релятивизации все того же нерелятивистского кулоновского решения для атома водорода [72]. С другой стороны, масштаб собственно квантовополевого процесса e^+e^- -аннигиляции, – комптоновская длина волны электрона, в КЭД в 137 раз меньше боровского радиуса соответствующего связанного состояния. Такая иерархия масштабов позволяет, с одной стороны, при определении связанного состояния, в первом приближении пренебречь его аннигиляцией, а, с другой стороны, позволяет не отличать "точечную" аннигиляцию связанных e^+e^- от аннигиляции свободных [70], [73]. Полагая, что, при подходящем выборе "диагонализующих конституентов", эта качественная картина формирования связанных состояний должна так или иначе воспроизводиться в любой квантовой теории поля, неизбежно приходим к заключению, что они формируются, в первую очередь, "упругими" вкладами, содержащими одинаковое число операторов рождения и уничтожения "диагонализующих конституентов", а не аннигиляционными (флуктуационными) членами в ее гамильтониане, изменяющими число этих частиц.

С другой стороны, хорошо известно, что решения уравнений Гейзенберга являются операторными обобщенными функциями, произведение которых уже в самих уравнениях плохо определено, тогда как корректное определение уравнений поля подразумевает знание качественных свойств их решений, которые, в свою очередь, весьма сингулярным образом зависят от вида этих уравнений [75]-[80] (далее всюду $\hbar = 1$):

$$i\partial_t \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = [\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\,, \mathrm{H}\{\Psi\}] \Longrightarrow ?! \qquad (0.1)$$

Подход стандартной теории возмущений основан на *предположении*, что произведение гейзенберговских полей может быть определено через произведение исходных свободных полей, а решения гейзенберговских уравнений могут быть построены по теории возмущений *в представлении взаимодействия* в пространстве Фока перенормированных (по теории возмущений) свободных полей [76], [81]. Однако, на этом пути сложно иметь дело с неперенормируемыми (по теории возмущений), в частности, 4-х фермионными моделями и получать описание связанных состояний и указанных выше непертурбативных эффектов, а само существование представления взаимодействия оказывается запрещено теоремой Хаага.

Поэтому, здесь представляется более уместным более последовательное использование процедуры канонического квантования [76], [79], [82], применимой, в равной степени, как к перенормируемым, так и к неперенормируемым (по теории возмущений) сингулярным теориям поля.

Такая попытка предпринята в настоящей работе. Развиваемый подход, использует идею разложения Хаага или "динамического отображения", сводящего произведения гейзенберговских полей к нормально упорядоченным произведениям выбранных определенным образом физических полей, и тесно связан с процедурой "одевания" Л.Д.Фаддеева. Подобные методы берут начало в работах Р.Хаага [84], Л.Д.Фаддеева [85], М.И.Широкова [86]-[89], и др. [90], и развивались А.С.Шварцем [91], Х.Умедзавой с сотрудниками [92], и О.В.Гринбергом [94]-[96].

Проблема придания смысла гейзенберговскому полю распадается, таким образом, на две части.

Первая часть состоит в выборе *представления* коммутационных соотношений, в пространстве которого гамильтониан являлся бы самосопряженным оператором [91]. Для этого достаточно построения операторной реализации (0.2) начальных гейзенберговских полей $\Psi(\mathbf{x}, t_0)$ через начальные физические поля $\psi(\mathbf{x}, t_0) = \psi[A]$, которая, с одной стороны, была бы "как-то" согласована с одновременны́ми каноническими (анти) коммутационными соотношениями ((КАС), ККС) как для гейзенберговских $\Psi(\mathbf{x}, t)$, так и для физичеких полей $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\Psi(\mathbf{x}, t_0) \Longrightarrow \Psi[\psi(\mathbf{x}, t_0)], \tag{0.2}$$

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\, ,\, \Psi^\dagger_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\; \delta_{\alpha\beta} = \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\, ,\, \psi^\dagger_\beta(\mathbf{y}, t)\}, \tag{0.3}$$

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\, ,\, \Psi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = 0 = \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)\, ,\, \psi_\beta(\mathbf{y}, t)\},$$

$$\{A_\alpha(\mathbf{k})\, ,\, A^\dagger_\beta(\mathbf{q})\} = \delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{q})\, \delta_{\alpha\beta}, \quad \{A_\alpha(\mathbf{k})\, ,\, A_\beta(\mathbf{q})\} = 0; \tag{0.4}$$

а, с другой стороны, должна быть ассоциирована с определенной операторной реализацией для заданного функционалом полей $\Psi(\mathbf{x}, t)$ гамильтониана:

$$\mathrm{H}\{\Psi(\mathbf{x}, t)\} \Longrightarrow H[A], \tag{0.5}$$

приводящей к единственному стабильному вакууму $|0\rangle$ и стабильному одночастичному состоянию $|\,1, \mathbf{k}\rangle$ с определенным спектром $E(\mathbf{k})$ [91]:

$$H[A]\;|0\rangle = \mathcal{V} w_0\;|0\rangle; \quad A_\alpha(\mathbf{k})\;|0\rangle = 0; \quad \mathcal{V} - \text{объем пространства}; \tag{0.6}$$

$$\left[H, A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\right]|0\rangle = E(k) A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\;|0\rangle = E(k)\;|\,1, \mathbf{k}\rangle = (H - \mathcal{V}\, w_0)\;|\,1, \mathbf{k}\rangle. \tag{0.7}$$

Это позволяет, во-первых, в качестве базиса для построения сепарабельного гильбертова пространства представления использовать фоковское пространство, натянутое на вакуум и прямые произведения собственных одночастичных состояний полного гамильтониана, и последовательно определять в нем динамику 2,3,...n – частичных возможных собственных состояний полного гамильтониана, избегая трудностей связанных с теоремой Хаага [75]-[83]. Во-вторых, поскольку рассматриваемый полный гамильтониан *по определению* не зависит от времени, он имеет один и тот же вид в терминах гейзенберговских и начальных полей, а сами гейзенберговские поля получаются простым сдвигом по времени начальных полей, генератором которого является полный гамильтониан.

Таким образом, физические поля, – это, по определению, одночастичные поля, построенные по *выбранному* вакууму (0.6) и одночастичному спектру *полного* гамильтониана (0.7), собственные для его квадратичной кинетической части и "максимально" диагонализующие его в высших секторах, если только таковые имеются.

Выделяются два существенно различных выбора начального момента времени t_0, приводящих, соответственно, к принципиально различным наборам физических полей:

(Гринберг, Умедзава) $t_0 \to -\infty$:	(Фаддеев, Широков) $t_0 = 0$:
неоператорное начальное условие	операторное начальное условие
(w) $\lim\limits_{t\to-\infty} \langle a \mid \Psi(\mathbf{x}, t) - \psi_{in}(\mathbf{x}, t) \mid b\rangle = 0$	(s) $\lim\limits_{t\to 0} \Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi\left[\psi(\mathbf{x}.0)\right]$
$\{\psi_{in}[A_{in}]\}$ = неполное пространство Фока	$\{\psi[A]\}$ = полное пространство Фока
необходимо новое поле V_{in} для каждого нового связанного состояния	отсутствие дополнительных полей для связанных состояний
$\widehat{H} \overset{(w)}{=} \widehat{H}_0\{A_{in}\} + \widehat{H}_0\{V_{in}\} + ?\ldots, \ (\star)$	$\widehat{H} \overset{(s)}{=} \widehat{H}_0\{A\} + \widehat{H}_I\{A\}, \qquad (\star\star)$

Здесь $\mid a\rangle$, $\mid b\rangle$ произвольные нормируемые состояния; A-операторы рождения, уничтожения физических состояний; (w) и (s) отмечают слабые и сильные (операторные) равенства соответственно.

Диагональные операторные реализации с требуемыми свойствами (0.5)–(0.7) вида $(\star\star)$ всегда существуют, по крайней мере, для нерелятивистских (нековариантных) моделей типа Ли [76], [92]. Причем, как показано в главе 4 настоящей работы, для них оказывается возможным, ценой спонтанного нарушения одной из внутренних симметрий, объединить в одном поле и операторы рождения и уничтожения; для фермионов такая операторная реализация (0.2) может даваться, например, преобразованием Боголюбова (4.15), изменяющим глубину "дираковского подвала" для отдельных компонент фермионного поля.

Для релятивистски ковариантных моделей наличие такой операторной реализации, по-видимому всегда, означает или сильную (операторную), или слабую (на матричных элементах), эквивалентность ее какой либо свободной теории поля ($\star$).

При построении теории возмущений в представлении взаимодействия [76], [81], *предполагается*, что в момент $t_0 = 0$ представление ККС для гейзенберговских полей можно выбрать *совпадающим* с фоковским представлением для свободных полей $\psi^{(0)}$. Однако, для поля $\psi^{(0)}\left[A^{(0)}\right]$, содержащего вместе операторы и рождения $A^{(0)\dagger}$ и уничтожения $A^{(0)}$ это запрещено непосредственно теоремой Хаага [82], если только полный гамильтониан не совпадает со свободным гамильтонианом этих полей.

Столь жесткая совместимость процедуры квантования с релятивистской ковариантностью, – фактически, только на свободных теориях поля, побуждает отказаться либо от явного соблюдения этой ковариантности при описания связанных состояний как составных обьектов в квантовой теории поля, либо, так или иначе, пожертвовать все же точной операторной диагонализуемостью полного гамильтониана (смотри главу 3).

Другой характерной чертой вторично квантованных теорий для систем с бесконечным числом степеней свободы, также тесно связанной с теоремой Хаага [84], является несчетность базиса в пространстве допустимых квантовых состояний и, как следствие, наличие в теории унитарно неэквивалентных представлений ККС для операторов рождения и уничтожения частиц [92], [83], в том смысле, что базисные вектора одного представления не являются линейной суперпозицией базисных векторов другого представления. Требование единственности вакуума (0.6) выделяет представления Фока, в которых просто контролировать самосопряженность (гамильтониана), но оно не является, вообще говоря, необходимым.

Возможность вырождения вакуумных состояний приводит к спонтанному нарушению симметрии и появлению в теории голдстоуновских бозонов. В отсутствие фундаментальных скалярных полей нарушение осуществляется динамичкски и проявляется через ненулевые вакуумные средние операторов соответствующих составных состояний,– фермионные конденсаты. Заметим, что интерпретация голдстоуновских бозонов, как обычных связанных состояний сталкивается с определенными трудностями. В релятивистской теории это – безмассовость и, следовательно, отсутствие для них системы покоя, т.е. отсутствие системы центра масс для составляющих частиц. Казалось бы, в нерелятивистской теории поля, где условие равенства нулю энергии голдстоуновского бозона при нулевом импульсе легко удовлетворяется обычным нерелятивистским спектром, никаких проблем с ним быть не должно. Однако, при детальном рассмотрении выясняется, что, как связанному состоянию с нулевой энергией связи при нулевом угловом моменте, ему нет места и среди обычных нормируемых решений уравнения Шредингера с произвольным короткодействующим потенциалом, удовлетворяющим условиям теоремы Левинсона [98]. Проявлением точечного характера эффективного потенциала 4-х фермионного взаимодействия, формирующего годстоуновское состояние, можно считать, в частности, то, что комптоновская длина волны этой частицы значительно больше ее характерного размера и ее волновая функция имеет характер дельта-функции [52]-[55]. Как показано в главах 5, 6, для достаточно сильно сингулярного точечного потенциала в теории расширений открывается новая возможность интерпретации такой голдстоуновской моды, как собственного решения в расширенном пространстве состояний с индефинитной метрикой.

Отображение одного представления ККС на другое, вообще говоря, унитарно неэквивалентное первому, не является, вообще говоря, изоморфизмом [99]. Однако, в случае, когда одно из этих представлений есть представление гейзенберговских полей в произвольный момент времени t, а другое, – представление физических полей в фиксированный момент времени t_0, такое отображение носит название динамического отображения [92]. Так как динамические уравнения квантовой теории поля пишутся для гейзенберговских операторов, а наблюдаемые величины выражаются их матричными элементами по физическим состояниям, построенным над физическим вакуумом в терминах операторов физических полей, то любую квантово-полевую задачу можно, таким образом, свести к задаче определения гейзенберговских операторов в представлении физических полей. Выбор этого представления неединственнен и определяется дополнительными условиями, связанными со свойствами пространства интересуемых физических состояний. В отсутствие сколь нибудь полного описания всех возможных представлений ККС [82], [93], в общем случае, остается либо деформировать исходный гамильтониан, отбрасывая в нем "плохие" – несохраняющие число частиц (флуктуационные [81]) члены, либо, *предположив* существование представления $\Psi(\mathbf{x}, t_0)$ с нужными свойствами (0.3)-(0.7) (но, возможно, с неединственным вакуумом), сосредоточиться на следствиях такого способа квантования, связанных непосредственно лишь с видом функционалов $\Psi[\psi(\mathbf{x}, t)]$ и $\psi[A]$ [92], [102]. Такая постановка задачи рассмотрена в первых трех главах настоящей работы.

Вторая часть проблемы, таким образом, состоит в построении соответствующего *динамического отображения* гейзенберговских полей на физические в виде степенного ряда нормальных произведений физических полей (разложения Хаага):

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x},t) = e^{iH(t-t_0)}\,\Psi_\alpha(\mathbf{x},t_0)\,e^{-iH(t-t_0)} \Longrightarrow \mathbf{N}_\psi\left\{\mathcal{F}^t_{t_0}\left[\psi(\mathbf{x},t_0)\right]\right\} = \mathbf{N}_A\left\{\widetilde{\mathcal{F}}^t_{t_0}[A]\right\}, \tag{0.8}$$

которое, как показано в данной работе, для t- локальных взаимодействий, в случае конечных t_0, решает проблему доопределения произведения гейзенберговских полей путем фиксации (только в гамильтониане!) процедуры одновременнóго упорядочения [гейзенберговских полей, однозначно связанной с хорошо определенным нормальным упорядочением] физических полей. Операторная реализация (0.2) играет, очевидно, роль начального условия к этой задаче.

Несмотря на внешнюю формальную простоту (0.8) и, казалось бы, по сути технический характер, эта часть проблемы, как показывает ее обсуждение в первой главе данной работы, уже для одной и той же модели требует отдельного рассмотрения для различных динамических отображений и может порождать принципиальные ошибки даже в серьезных монографиях по КТП [92].

В недавних работах Гринберга [94]-[96], вслед за Умедзавой и др. [92] сделана интересная попытка создания на основе динамического отображения на "in"- поля эффективного вычислительного метода непертурбативного анализа в квантовой теории поля. Его преимущества обусловлены тем, что соответствующие коэффициентные функции отвечают "минимальному" сходу с массовой поверхности лишь по одной из частиц, автоматически соответствуют связным графам и дают одновременно трехмерное и ковариантное описание, не сталкиваясь с проблемой относительного времени, в отличие от Бете-Солпитеровского подхода. Появление дополнительных $in-$ (out) операторов связанных состояний $(\star)$ обусловлено несохранением ККС в случае слабых (w) начальных условий и позволяет как раз согласовать ККС для гейзенберговских и асимптотических полей [92]. Поскольку, в терминах этих асимптотических полей полный гамильтониан, по определению, выглядит в слабом смысле как свободный [81], то, казалось бы, естественно выбрать эти поля в качестве физических. Такой подход, тесно связанный с S- матричной постановкой задачи рассеяния, является господствующей парадигмой в квантовой теории поля уже на протяжении многих лет. Трудность его, однако, состоит в том, что именно при наличии связанных состояний *полный* набор асимптотических $in-$ (out) полей оказывается шире *полного* набора гейзенберговских (или шредингеровских) полей и является заранее неизвестным [92]! В частности, не известны ни спектры связанных состояний, фигурирующих в этом асимптотическом гамильтониане $(\star)$, например, вида (1.93), ни само их количество. Эта проблема приобретает особую остроту в КХД, где физические кварки, если и существуют, то не могут быть получены из затравочных кварковых полей по теории возмущений [100], [101]. Это побуждает в данной работе выбрать в качестве физических полей шредингеровские поля, совпадающие с гейзенберговскими при $t = t_0 = 0$.

Предлагаемую здесь концепцию пробных физических полей, как "диагонализующих конституентов", можно, таким образом, рассматривать как попытку синтеза известной концепции квазичастиц [97] и концепции асимптотических $in-$, $(out-)$ полей [79], [80].

Цели работы.

- Развитие непертурбативного метода динамических отображений для неперенормируемых моделей четырехфермионного взаимодействия путем последовательного использования процедуры канонического квантования.

- Выяснение смысла коэффициентных функций динамического отображения на шредингеровские поля с последующим использованием их для решения задачи о рассеянии и связанных состояниях в конкретных моделях КТП.

- Получение явных решений для гейзенберговских полей в терминах физических полей.

- Построение и исследование 4-х фермионных полевых моделей, допускающих точные решения и предельный переход $\Lambda \to \infty$,

- Построение последовательной процедуры перенормировки для неперенормируемых (в обычном смысле) моделей четырехфермионного взаимодействия на языке $\Lambda-$ обрезания.

- Обоснование этой процедуры перенормировки в рамках теории самосопряженных расширений с выходом в пространства с индефинитной метрикой.

- Качественное описание легких адронов, как связанных состояний кварков на основе таких моделей 4-х фермионного взаимодействия. Первоочередной целью здесь является ответ на сакраментальный вопрос Э.Ферми: "Что же для этой задачи играет роль атома водорода?"

Поэтому основное из используемых при этом приближений, - это нерелятивистское приближение, сделано в предположении, что, при подходящем выборе "конституентов", диагонализующих гамильтониан (см. ниже), искомый эффект "связанности" по своей сути должен быть *одновременны́м* [47]-[60] и сохраняться в соответствующем нерелятивистском пределе.

По этой же причине в основу рассмотрения положена нерелятивистская полевая модель со взаимодействием типа ”ток $\otimes$ ток”, которая, при наличии взаимодействия векторных токов, содержит основные ультрафиолетовые расходимости релятивистской полевой модели, связанные с сингулярным характером взаимодействия. Однако, сохранение (при подходящем выборе диагонализующих ”конституентов”) числа частиц позволяет явно реализовать фоковское пространство и перевести проблему на язык потенциальной теории.

Второе, неявно используемое здесь предположение, состоит в том, что радиус взаимодействия для этих диагонализующих ”конституентов” и их комптоновская длина волны считаются (как и для тяжелых кварков) значительно меньше характерного масштаба конфаймента КХД. То есть, при определении их связанных состояний конфаймент не учитывается, их 4-х фермионное взаимодействие считается контактным, а соответствующий потенциал, – точечным.

Научная новизна.

1. В диссертации впервые построены точные операторные решения двухчастичного сектора для нерелятивистской 3D модели 4-х фермионного взаимодействия с участием векторных токов, со спонтанным нарушением симметрии, для полей, содержащих как операторы рождения так и уничтожения. Получен положительный ответ на вопрос о существовании связанных состояний в этой модели в пределе $\Lambda \to \infty$.

2. Дано обоснование соответсвующей процедуры перенормировки ”тонкой подстройкой” в рамках теории самосопряженных расширений с выходом в пространства состояний с индефинитной метрикой путем явного построения подходящей редукции пространства Понтря-

гина.

3. Установлена связь голдстоуновской степени свободы с дополнительными компонентами этого пространства.

4. На этой точно решаемой модели удалось проследить непосредственный предельный переход различных совокупностей унитарно неэквивалентных гильбертовых пространств когерентных состояний "кварковых пар" в пространства когерентных состояний различных "адронов", и соответствующий ему переход от унитарно неэквивалентных представлений "кварковых" КАС к представлениям "адронных" ККС.

5. Путем аналитического и численного анализа обнаружено, что трехчастичные связанные состояния этой модели в Ефимовском случае [1] практически сразу выходят на соответствующий экспоненциальный асимптотический режим.

6. На примерах различных моделей теории поля показано, что эффективным средством анализа связанных состояний, в том числе и в неперенормируемых теориях, является динамическое отображение на соответственно подобранные *шредингеровские* поля ($t_0 = 0$), которые и выбираются в качестве физических полей (0.2) указанных выше "диагонализующих конституентов". Такой выбор представляется физически более адекватным проблеме связанных состояний, поскольку для них взаимодействие никогда не "выключается". Он оказывается, также, наиболее экономным, поскольку дает описание как связанных состояний так и состояний рассеяния в терминах коэффициентных функций динамического отображения.

[1]Виртуальный уровень с нулевой энергией хотя бы в двух двухчастичных подсистемах приводит к бесконечной серии сгущающихся к нулю трехчастичных связанных состояний

7. Показано, что коэффициентные функции этого динамического отображения определяют собственные волновые функции полного гамильтониана, содержат детальную информацию о динамике системы, и, таким образом, дают решение как S-матричной задачи рассеяния, так и проблемы связанных (стационарных) и нестабильных (квазистационарных) состояний. Существенно, что можно получить замкнутые уравнения на низшие коэффициентные функции (например, двухчастичные) и при наличии несохраняющих число частиц (начиная с трех) "плохих" - флуктуационных членов высшего порядка. Это позволяет надеяться, что обобщение на случай релятивистского взаимодействия общего вида может быть получено на пути частичной диагонализации гамильтониана с помощью подходящего *фаддеевского* преобразования [91], "сдвигающего" плохие флуктуационные члены в высшие порядки по операторам рождения, уничтожения.

8. В рамках этого подхода, в некоторых решаемых случаях, в том числе и для релятивистских моделей, показана возможность "естественной" линеаризации гейзенберговских уравнений, позволяющая получить замкнутые выражения для гейзенберговских полей в терминах физических полей, аналогичные решениям 2D моделей Тирринга, Швингера и Федербуша [75], [80], [96].

9. В случае одновременнóй релятивистской 4-х фермионной потенциальной модели В.Н. Первушина с δ- потенциальным взаимодействием [49] получена нормальная форма операторных решений для этих гейзенберговских полей в виде континуальных интегралов по траекториям в фазовом $\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\}$- пространстве.

Заметим также, что в релятивистских моделях 4-х фермионного взаимодействия как для дираковских так и для майорановских фермионов на этом пути удалось получить новые одночастичные решения, отличные от известных решений НЙЛ [105], [106].

Положения выносимые на защиту:

- Явные выражения для первых коэффициентных функций динамического отображения гейзенберговских полей на шредингеровские поля как в нерелятивистской (N, Θ)– модели, так и в модели четырехфермионного контактного взаимодействия при наличии векторных токов.

- Связь коэффициентных функций динамического отображения гейзенберговских полей на шредингеровские поля с точными волновыми функциями 2-х-частичных состояний и оператором Меллера в этих моделях.

- Условия унитарной эквивалентности динамических отображений гейзенберговских полей на шредингеровские и на асимптотические физические поля.

- Метод линеаризации уравнений Гейзенберга с помощью динамического отображения на шредингеровские физические поля.

- Замкнутое выражение для нормального символа функционала динамического отображения гейзенберговского поля на физические поля, для коэффициентных функций его нормальной формы и их производящего функционала в виде функционального интеграла по фазовому пространству для нерелятивистской модели 4-х фермионного взаимодействия и в виде Т- упорядоченной экспоненты – для (N, Θ)-модели.

- Замкнутое выражение для гейзенберговского поля в виде функционального интеграла по фазовому пространству от T- упорядоченного функционала физических полей для (3+1)D моделей Гросса-Невье и Намбу-Йона-Лазинио, аналогичное решению 2D моделей Тирринга и Швингера.

- Замкнутое выражение для нормального символа функционала динамического отображения гейзенберговского поля на физические поля в виде функционального интеграла по фазовому пространству для различных вариантов одновременно́й релятивистской потенциальной модели В.Н. Первушина с δ- потенциальным взаимодействием.

- Явное описание предельного перехода от совокупности унитарно неэквивалентных представлений "кварковых" КАС при наличии спонтанного нарушения симметрии к представлению "адронных" ККС и выражения для операторов, осуществляющих замену одной спонтанно нарушенной симметрии $SU(2)$ другой симметрией $SU(2)$.

- Математическая формулировка механизма размерной трансмутации, отвечающего перенормировочной процедуре для "неперенормируемых", но операторно диагонализуемых 4-х фермионных полевых гамильтонианов, путем простой регуляризации обрезанием с естественной вычитательной процедурой совместно с "тонкой подстройкой" зависимости от обрезания затравочных массы и константы связи, которая в пределе снятия обрезания выделяет единственное решение в N-частичных секторах N=0,1,2,3.

- Математическое обоснование перенормировочной процедуры "тонкой подстройкой" путем построения самосопряженного расширения соответствующих квантовомеанических гамильтонианов в каждом N-частичном секторе N=0,1,2,3, с выходом в пространства состояний с индефинитной метрикой и построения соответствующей этому расширению редукции пространства Понтрягина в двухчастичном секторе.

- Точное решение для Голдстоуновской моды и механизм его трансформации в дополнительную "дефектную компоненту" решения в теории расширений. Связь массы Голдстоуновского бозона с кинетической массой (нерелятивистских) конституентных кварков.

- Точные решения для волновых функций двухчастичных связанных состояний, состояний рассеяния и Т-матрицы для нерелятивистских 4-х фермионных полевых гамильтонианов со взаимодействием векторных токов.

- Асимптотические и численные решения для спектра и волновых функций трехчастичных связанных состояний в этой модели.

Личный вклад автора.

Вклад автора в разработку защищаемых положений и соответствующие публикации является определяющим.

Апробация работы.

Результаты, представленные в настоящей диссертации докладывались на семинарах ЛТФ ОИЯИ и ИЯФ им. Будкера, на международных семинарах "IX International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory" (Звенигород, 1994), "X International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory" (Звенигород, 1995), "XI International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory" (Санкт-Петербург, 1996), IX International Seminar QUARKS-96 (Ярославль, 1996), на международных конференциях "Problems of Quantum Field Theory"

(Алушта, 1996), "Quantum Systems: New Trends and Methods" (Минск, 1996), "XXV Зимней школе ИТЭФ" (Мосва 1997), Байкальской школе по фундаментальной физике "Астрофизика и физика микромира" (Иркутск 1998).

Публикации.

Результаты, представленные в настоящей диссертации, опубликованы в 11 работах [107] - [117].

Содержание работы.

Диссертация состоит из Введения, 7 глав, Заключения и Приложения и содержит 226 страниц и 2 рисунка. Список литературы включает 189 наименований.

В Главе 1, преследующей, в первую очередь, методические цели, построение динамического отображения на шредингеровские поля подробно отрабатывается на примере гамильтониана частично решаемой (N, Θ) - модели. Устанавливается связь его коэффициентных функций с волновыми функциями рассеяния и связанных состояний. Демонстрируется возможность линеаризации гейзенберговских уравнений и ее связь с диагонализацией гамильтониана. Проведено сравнение различных динамических отображений и показано, что как сама операторная реализация так и вид динамического отображения существенно зависят от выбора начального момента времени t_0, определяющего начальные условия динамической задачи. Указано на принципиальную ошибочность формулы (3.1.62) и неправомерность связанных с ней рассуждений в монографии [92] (между формулами (3.1.82б) и (3.1.82в)).

В Главе 2 аналогичный анализ проведен для различных нерелятивистских моделей контактного 4-х фермионного взаимодействия, в том числе при наличии векторного тока. Для всех упомянутых моделей установлено, что коэффициентные функции динамического отображения как степенного ряда по нормальным произведениям физических полей $A(\mathbf{k})$ (или $\psi(\mathbf{x},0)$) полностью определяют динамику последовательно в каждом n- частичном секторе. Найдены явные выражения для первых коэффициентных функций в этих моделях. Показано что, как в случае $N-\Theta$ модели, так и некоторых контактных 4-х фермионных взаимодействий удается полностью линеаризовать задачу и получить замкнутое выражение для динамического отображения. Установлено сходство коэффициентных функций для этих моделей. Получены простые уравнения для производящих функционалов этих функций и их формальные решения.

В Главе 3 показана применимость метода линеаризации к некоторым релятивистским моделям четырехфермионного взаимодействия. Получены выражения для гейзенберговского оператора и коэффициентных функций его динамического отображения в виде функциональных интегралов по траекториям в фазовом пространстве и развиты методы их вычисления. Прослежена реализация этого подхода в релятивистской потенциальной модели взаимодействия киральных фермионов и ее двумерного аналога – модели Тирринга. Обсуждается возможность использования этих представлений для решения релятивисткой проблемы связанных состояний.

В Главе 4 предложена "КХД-мотивированная" нерелятивистская четырехфермионная модель со взаимодействием векторных токов с нетривиальной внутренней $SU(2)\times SU(2)\times U(1)$ симметрией, допускающая непосредственную постановку и точное решение задачи на собственные значения гамильтониана в N – частичном секторе при $N=0,1,2,$ и исследование сектора $N=3$.

Рассмотрены три различных операторных реализации, отвечающие различным представлениям КАС. Получены энергии вакуумного и одночастичного состояний. Проведен анализ исходной $SU(2)\times SU(2)\times U(1)$

- симметрии гамильтониана для всех трех реализаций. Показано, как в одной из них происходит спонтанное нарушение симметрии. Получен оператор соответствующего голдстоуновского бозона как составного состояния двухфермионой системы. Построено обобщение квазиспиновой алгебры. Путем построения подходящих когерентных состояний проклассифицированы различные унитарно неэквивалентные секторы модели, прослежены механизмы восстановления симметрии при замене одной спонтанно нарушенной симметрии другой и предельный переход от унитарно неэквивалентных "кварковых" базисов к "адронному" базису.

В Главе 5 исследуются двухчастичные состояния в этой модели. Установлен магнонный энергетический спектр и структура состояний, соответствующих составным голдстоуновским бозонам. Развита процедура перенормировки "тонкой подстройкой" на основе предельного перехода $\Lambda \to \infty$. Найдены волновые функции и энергетические спектры собственных одно- и двух- частичных состояний гамильтониана, отвечающих рассеянию и нормируемым связанным состояниям.

В Главе 6 развитая процедура перенормировки обосновывается в рамках теории самосопряженных расширений с выходом в пространства состояний с индефинитной метрикой,– математически наиболее последовательного способа анализа сильно сингулярных возмущений. Приведены основные элементы используемых вариантов теории расширений в гильбертовы пространства и пространства с индефинитной метрикой. Построена подходящая редукция пространства Понтрягина. Установлена связь голдстоуновской степени свободы с дополнительными компонентами этого пространства.

В Главе 7 изучаются трехчастичные связанные состояния этой модели, производится их классификация по изоспину, получается и анализируется система уравнений на волновые функции для каждого из значений изоспина. Обсуждается самосопряженное расширение гамильтониана в трехчастичном секторе и численное решение соответствующих уравнеий Фаддеева.

В Заключении перечислены основные особенности развиваемого подхода и выводы из полученных результатов.

В Приложении приведены: решение систем уравнений для коэффициентных функций динамического отображения; операторные формулы для преобразования Фурье; вывод формулы приведения к "нормальной форме" для экспонент от операторов алгебры $SU(2)$; вывод выражения для нормировки "обесцвечивающих" операторов; вывод комбинаторных соотношений для кратных интегралов.

Глава 1

(N, Θ) - модель

В этой главе построение динамического отображения на шредингеровские поля отрабатывается в деталях на хорошо известной частично решаемой модели квантовой теории поля. В первом параграфе на языке этих полей воспроизведены известные решения двухчастичного сектора этой модели [92]. Во втором параграфе построено динамическое отображение на шредингеровские поля, которое в третьем параграфе сравнивается с отображением на асимптотические поля [92].

1 Физические поля и собственные состояния

1.1 Определение физических полей

Под (N, Θ) - моделью здесь понимается X-модель типа Ли, – с четырехлинейным взаимодействием [76], которая определяется двумя гейзенберговскими полями: фермионным $N(x)$ и бозонным $\Theta(x)$, $x = (\mathbf{x}, t)$. Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = \int d^3\mathrm{x} \Big\{ N^\dagger(x)\mu(\nabla^2)N(x) + \Theta^\dagger(x)w(\nabla^2)\Theta(x) +$$
$$+\lambda \int d^4y \int d^4z \bar{\alpha}(x-y)\bar{\alpha}(x-z)N^\dagger(x)N(x)\Theta^\dagger(y)\Theta(z) \Big\}, \qquad (1.1)$$

где $\bar{\alpha}(x-y)=\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t_x-t_y)$, а $\mu(\nabla^2)$ и $w(\nabla^2)$ определены соотношениями:

$$\mu(\nabla^2)e^{i\mathbf{kx}}=m(k)e^{i\mathbf{kx}};\quad w(\nabla^2)e^{i\mathbf{kx}}=\omega(k)e^{i\mathbf{kx}}. \tag{1.2}$$

ККС таковы:

$$\begin{aligned}
&\{N(x),N^\dagger(y)\}\delta(t_x-t_y)=[\Theta(x),\Theta^\dagger(y)]\delta(t_x-t_y)=\delta_4(x-y), \quad (1.3)\\
&\{N(x),N(y)\}\delta(t_x-t_y)=[\Theta(x),\Theta(y)]\delta(t_x-t_y)=0,\\
&[N(x),\Theta(y)]\delta(t_x-t_y)=[N(x),\Theta^\dagger(y)]\delta(t_x-t_y)=0.
\end{aligned}$$

А уравнения Гейзенберга

$$i\partial_t N(x)=[N(x),H],\qquad i\partial_t\Theta(x)=[\Theta(x),H], \tag{1.4}$$

приводят к следующим уравнениям движения :

$$(i\partial_t-\mu(\nabla^2))N(x)=\left\{\lambda\int d^4y\int d^4z\bar{\alpha}(x-y)\bar{\alpha}(x-z)\Theta^\dagger(y)\Theta(z)\right\}N(x), \tag{1.5}$$

$$(i\partial_t-w(\nabla^2))\Theta(x)=\lambda\int d^4y\int d^4z\bar{\alpha}(y-x)\bar{\alpha}(y-z)N^\dagger(y)N(y)\Theta(z). \tag{1.6}$$

Заметим, что гамильтониан и уравнения Гейзенберга инвариантны относительно двух независимых преобразований фазы:

$$\begin{aligned}
&\text{преобразования фазы}\quad N: N(x)\longrightarrow e^{i\alpha_1}N(x),\\
&\text{преобразования фазы}\quad \Theta: \Theta(x)\longrightarrow e^{i\alpha_2}\Theta(x). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Перейдем к импульсному представлению гейзенберговских полей:

$$\begin{aligned}
N(x)&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,n(k,t)e^{i\mathbf{kx}-im(k)t},\\
\Theta(x)&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,o(k,t)e^{i\mathbf{kx}-i\omega(k)t}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Наш способ построения динамического отображения стартует с очевидных тождеств для гейзенберговских операторов:

$$n(k,t)=e^{im(k)(t-t_0)}e^{iH(t-t_0)}n(k,t_0)e^{-iH(t-t_0)},$$

$$o(k,t) = e^{i\omega(k)(t-t_0)} e^{iH(t-t_0)} o(k,t_0) e^{-iH(t-t_0)}. \tag{1.9}$$

$$i\partial_t n(k,t) = -m(k)n(k,t) + [n(k,t), H],$$

$$i\partial_t o(k,t) = -\omega(k)o(k,t) + [o(k,t), H]. \tag{1.10}$$

Следующим шагом является операторная реализация гамильтониана (1.1) в терминах полей $n(k,t_0)$, $o(k,t_0)$. Выбор момента времени t_0 диктуется физической постановкой задачи. Принято считать, что для построения S- матрицы необходима реализация в терминах этих полей при $t_0 \longrightarrow -\infty$ (in-полей). Ниже будет показано, что для решения как задачи рассеяния, так и задачи на связанные собственные состояния полного гамильтониана весьма удобен иной выбор: $t_0 = 0$. В дальнейшем именно эти поля будем называть физическими полями. Тогда, для этих *физических* полей

$$N(k) \equiv n(k,t_0), \qquad \Theta(k) \equiv o(k,t_0), \tag{1.11}$$

справедливы следующие коммутационные соотношения [1]:

$$\{N(k), N^\dagger(l)\} = \delta_3(k-l), \qquad [\Theta(k), \Theta^\dagger(l)] = \delta_3(k-l), \tag{1.12}$$

$$\{N(k), N(l)\} = [\Theta(k), \Theta(l)] = 0, \qquad [N(k), \Theta(l)] = [N(k), \Theta^\dagger(l)] = 0.$$

Определим вакуум по отношению к физическим полям

$$N(k) \mid 0\rangle = 0, \quad \Theta(k) \mid 0\rangle = 0. \tag{1.13}$$

Гамильтониан (1.1) (по определению не зависящий от времени) и в терминах физических полей можно представить в виде суммы свободного гамильтониана H_0 и гамильтониана взаимодействия H_I: $(t_0 = 0)$

$$H_I = \lambda \int d^3p \int d^3k \int d^3q \tilde{\alpha}(-q)\tilde{\alpha}(k+q-p)\, N^\dagger(p)N(k)\Theta^\dagger(k+q-p)\Theta(q),$$

[1]Следуя [92], использованы одинаковые буквы N, Θ для обозначения зависящих от координат x, y, z гейзенберговских полей и зависящих от импульсов q, k, p, l, s, r физических полей.

$$H_0 = \int d^3p \left[m(p)\, N^\dagger(p) N(p) + \omega(p)\, \Theta^\dagger(p)\Theta(p) \right],$$
$$H = H_0 + H_I. \tag{1.14}$$

где фурье-образ функции $\alpha(\mathbf{x})$ определен как:

$$\tilde{\alpha}(p) = \int \frac{d^3\mathrm{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{px}} \alpha(\mathbf{x}), \qquad \alpha(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{px}} \tilde{\alpha}(p), \tag{1.15}$$
$$\alpha^*(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}), \qquad \widetilde{\alpha^*}(p) = \tilde{\alpha}(-p). \tag{1.16}$$

Локальный предел будет означать для нее, что:

$$\alpha(\mathbf{x}) \Rightarrow \delta_3(\mathrm{x}), \qquad \tilde{\alpha}(p) \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{1.17}$$

Легко видеть, что определенное выше вакуумное состояние является собственным состоянием полного гамильтониана с энергией равной нулю.

$$H \mid 0\rangle = 0. \tag{1.18}$$

Следующие низшие сектора этой модели также легко выстраиваются для этой реализации, аналогично [92].

1.2 Одночастичные состояния

Определим одночастичные состояния:

$$\mid N(p)\rangle = N^\dagger(p) \mid 0\rangle, \quad \mid \Theta(p)\rangle = \Theta^\dagger(p) \mid 0\rangle. \tag{1.19}$$

Используя (1.14),(1.18) нетрудно убедиться, что они также будут собственными состояниями полного гамильтониана:

$$H \mid N(p)\rangle = [H, N^\dagger(p)] \mid 0\rangle = m(p) \mid N(p)\rangle,$$
$$H \mid \Theta(p)\rangle = [H, \Theta^\dagger(p)] \mid 0\rangle = \omega(p) \mid \Theta(p)\rangle. \tag{1.20}$$

Теперь с помощью тождеств (1.9),(1.10),(1.18) легко определить действие гейзенберговских полей на вакуум:

$$\begin{aligned} n(k,t) \mid 0\rangle = N(k) \mid 0\rangle = 0, \qquad & o(k,t) \mid 0\rangle = \Theta(k) \mid 0\rangle = 0; \\ n^{\dagger}(k,t) \mid 0\rangle = N^{\dagger}(k) \mid 0\rangle, \qquad & o^{\dagger}(k,t) \mid 0\rangle = \Theta^{\dagger}(k) \mid 0\rangle; \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} &[H,\, n^{\dagger}(p,t)]\,|0\rangle = e^{iHt-im(p)t}[H,\, N^{\dagger}(p)]e^{-iHt}\,|0\rangle = m(p)N^{\dagger}(p)\,|0\rangle = \\ &= m(p) \mid N(p)\rangle, \\ &[H,\, o^{\dagger}(k,t)]\,|0\rangle = e^{iHt-i\omega(k)t}[H,\, \Theta^{\dagger}(k)]e^{-iHt}\,|0\rangle = \omega(k)\Theta^{\dagger}(k)\,|0\rangle = \\ &= \omega(k) \mid \Theta(k)\rangle, \end{aligned} \tag{1.22}$$

Используя (1.9), можно ввести затем процедуру "нормального упорядочения" непосредственно для гейзенберговских полей в гамильтониане, поскольку независимость H от времени означает что:

$$:\mathrm{H}\left\{e^{-im(p)t}n(p,t)\,;\, e^{-i\omega(k)t}o(k,t)\right\} :=: H\left\{N(p)\,;\,\Theta(k)\right\}:, \tag{1.23}$$

т.е. "нормальная форма" гамильтониана в терминах гейзенберговских полей получается простой заменой в (1.14) физических полей $N(p), \Theta(k)$ на гейзенберговские поля $e^{-im(p)t}n(p,t)$ и $e^{-i\omega(k)t}o(k,t)$ соответственно и будет теперь корректно определять нелинейные члены в правой части редуцированных гейзенберговских уравнений (0.1). Введенное таким образом определение нормальной формы в терминах гейзенберговских полей по сути аналогично приему введения некоммутирующих символов, использованному в Добавлении 1 работы [99] при выводе теоремы Вика для хронологических произведений.

1.3 Двухчастичные собственные состояния

Состояния $\mid NN\rangle$, $\mid \Theta\Theta\rangle$ и $\mid N\Theta\rangle$ определим равенствами:

$$\mid \Theta(q)\Theta(k)\rangle \;=\; \Theta^{\dagger}(q)\Theta^{\dagger}(k) \mid 0\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
\mid N(q)N(k)\rangle &= N^\dagger(q)N^\dagger(k)\mid 0\rangle,\\
\mid N(q)\Theta(k)\rangle &= N^\dagger(q)\Theta^\dagger(k)\mid 0\rangle.
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

В силу перестановочных соотношений (1.12), имеем:

$$
\begin{aligned}
H\mid\Theta(q)\Theta(k)\rangle = H_0\mid\Theta(q)\Theta(k)\rangle &= (\omega(q)+\omega(k))\mid\Theta(q)\Theta(k)\rangle,\\
H_I\mid\Theta(q)\Theta(k)\rangle &= 0,\\
H\mid N(q)N(k)\rangle = H_0\mid N(q)N(k)\rangle &= (m(q)+m(k))\mid N(q)N(k)\rangle,\\
H_I\mid N(q)N(k)\rangle &= 0.
\end{aligned}
\qquad (1.25)
$$

Таким образом, состояния $\mid\Theta(q)\Theta(k)\rangle$ и $\mid N(q)N(k)\rangle$ являются собственными состояниями нашего гамильтониана, в силу отсутствия взаимодействия между частицами одной природы. То же самое, очевидно, можно сказать и о произвольных состояниях типа:

$$
\prod_{i=1}^{n}\Theta^\dagger(q_i)\,|0\rangle;\qquad \prod_{i=1}^{n}N^\dagger(q_i)\,|0\rangle,
\qquad (1.26)
$$

т.е. сохраняются по отдельности числа частиц Θ и N. Действие гамильтониана на состояние $\mid N(q)\Theta(k)\rangle$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
H_I\mid N(q)\Theta(k)\rangle &= \lambda\int d^3p\,\tilde{\alpha}(-k)\tilde{\alpha}(p)\mid N(q+k-p)\Theta(p)\rangle,\\
H_0\mid N(q)\Theta(k)\rangle &= (m(q)+\omega(k))\mid N(q)\Theta(k)\rangle.
\end{aligned}
\qquad (1.27)
$$

т.е. состояние $\mid N(q)\Theta(k)\rangle$ при произвольных q и k не является собственным состоянием гамильтониана (1.14).

1.4 Состояния рассеяния

Для построения состояния рассеяния $\mid R^\pm\{N(p)\Theta(q)\}\rangle$ воспользуемся стационарным уравнением Шредингера:

$$
H\mid R^\pm\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = E_q^{p+q}\mid R^\pm\{N(p)\Theta(q)\}\rangle,\ \text{ где: }\ E_q^{p+q}=\omega(q)+m(p).
\qquad (1.28)
$$

В соответствии с граничными условиями задачи рассеяния будем искать состояние рассеяния $\mid R^{\pm}\{N(p)\Theta(q)\}\rangle$ в следующем виде:

$$\mid R^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle = \mid N(q)\Theta(k)\rangle + \mid S^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle, \tag{1.29}$$

где $\mid N(q)\Theta(k)\rangle \equiv N^{\dagger}(q)\Theta^{\dagger}(k) \mid 0\rangle$ - свободная падающая волна, а $\mid S^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle$ - рассеянная волна (сходящаяся, или расходящаяся). Подставляя представление (1.29) в уравнение (1.28), получим прежде всего соотношения:

$$(H - E_q^{p+q}) \mid S^{\pm}\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = -\left[\left[H,\, N^{\dagger}(p)\right], \Theta^{\dagger}(q)\right] \mid 0\rangle = \tag{1.30}$$
$$= -H_I \mid N(p)\Theta(q)\rangle; \;\; \mid S^{\pm}\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = \frac{-1}{H - E_q^{p+q} \mp i\delta} H_I \mid N(p)\Theta(q)\rangle.$$

Как хорошо известно [81], вытекающее из (1.29) и (1.30) представление для $\mid R^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle$ эквивалентно обычному линейному уравнению Липпмана - Швингера:

$$\mid R^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle = \mid N(q)\Theta(k)\rangle + \frac{1}{E_k^{q+k} - H_0 \pm i\delta} H_I \mid R^{\pm}\{N(q)\Theta(k)\}\rangle. \tag{1.31}$$

Определим волновую функцию состояния рассеяния $R_{\pm}^{p,k}(q)$ следующим образом:

$$\mid R^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\}\rangle = \int d^3q R_{\pm}^{p,k}(q) \mid N(p-q)\Theta(q)\rangle, \tag{1.32}$$

Подставляя (1.32) в (1.31) запишем уравнение Липпмана-Швингера в виде:

$$\int d^3q R_{\pm}^{p,k}(q) \mid N(p-q)\Theta(q)\rangle = \tag{1.33}$$
$$= \mid N(p-k)\Theta(k)\rangle + \frac{1}{E_k^p - H_0 \pm i\delta} H_I \int d^3r R_{\pm}^{p,k}(r) \mid N(p-r)\Theta(r)\rangle,$$

где: $E_k^p \equiv \omega(k) + m(p-k)$. С помощью (1.27) находим:

$$H_I \int d^3q R_{\pm}^{p,k}(q) \mid N(p-q)\Theta(q)\rangle = \lambda \int d^3q \tilde{\alpha}(-q) R_{\pm}^{p,k}(q) \int d^3l \tilde{\alpha}(l) \mid N(p-l)\Theta(l)\rangle.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
&\mid S^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\}\rangle = \\
&= \lambda \int d^3 l \tilde{\alpha}(-l) R_{\pm}^{p,k}(l) \int d^3 q \frac{\tilde{\alpha}(q)}{E_k^p - E_q^p \pm i\delta} \mid N(p-q)\Theta(q)\rangle. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

После подстановки (1.34) в (1.33), приходим к уравнению Фредгольма второго рода с вырожденным ядром: $A^{\pm}(p,k) = \int d^3 l R_{\pm}^{p,k}(l)\tilde{\alpha}(-l)$.

$$R_{\pm}^{p,k}(q) = \delta_3(k-q) + A^{\pm}(p,k)\frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)}{E_k^p - E_q^p \pm i\delta}, \qquad (1.35)$$

Домножая (1.35) на $\tilde{\alpha}(-q)$ и интегрируя по d^3q, получаем:

$$A^{\pm}(p,k) = \tilde{\alpha}(-k) Q_k^{p(\pm)}, \qquad Q_k^{p(\pm)} = \left[1 + \lambda \int d^3 q \frac{\mid \tilde{\alpha}(q) \mid^2}{E_q^p - E_k^p \mp i\delta}\right]^{-1}. \qquad (1.36)$$

Таким образом, состояние рассеяния принимает вид:

$$R_{\pm}^{p,k}(q) = \delta_3(k-q) + \frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-k)}{E_k^p - E_q^p \pm i\delta} Q_k^{p(\pm)}. \qquad (1.37)$$

Проверим правильность нормировки полученного состояния:

$$\begin{aligned}
&\langle R^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\} \mid R^{\pm}\{N(p_1-k_1)\Theta(k_1)\}\rangle = \\
&= \delta_3(p-p_1) \int d^3 q \left[\delta_3(k-q)\delta_3(k_1-q) + \delta_3(k-q)\frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-k_1)}{E_{k_1}^p - E_q^p \pm i\delta} Q_{k_1}^{p(\pm)} + \right. \\
&\left. + \delta_3(k_1-q)\frac{\lambda\tilde{\alpha}(-q)\tilde{\alpha}(k)}{E_k^p - E_q^p \mp i\delta} Q_k^{p(\mp)} + \frac{\lambda^2 \mid \tilde{\alpha}(q) \mid^2 \tilde{\alpha}(-k_1)\tilde{\alpha}(k)}{(E_k^p - E_q^p \mp i\delta)(E_{k_1}^p - E_q^p \pm i\delta)} Q_k^{p(\mp)} Q_{k_1}^{p(\pm)}\right].
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в подынтегральной сумме преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\lambda\tilde{\alpha}(-k_1)\tilde{\alpha}(k) Q_k^{p(\mp)} Q_{k_1}^{p(\pm)} \int d^3 q \frac{\lambda \mid \tilde{\alpha}(q) \mid^2}{E_k^p - E_{k_1}^p \mp i\delta}\left(\frac{1}{E_{k_1}^p - E_q^p \pm i\delta} - \frac{1}{E_k^p - E_q^p \mp i\delta}\right) \\
&= \frac{\lambda\tilde{\alpha}(-k_1)\tilde{\alpha}(k)}{E_k^p - E_{k_1}^p \mp i\delta}(Q_{k_1}^{p(\pm)} - Q_k^{p(\mp)}).
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, имеем:

$$\langle R^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\} \mid R^{\pm}\{N(p_1-k_1)\Theta(k_1)\}\rangle =$$
$$= \delta_3(p-p_1)\int d^3q\, \overset{*}{R}{}^{p,k}_{\pm}(q)\, R^{p,k_1}_{\pm}(q) = \delta_3(p-p_1)\,\delta_3(k-k_1). \qquad (1.38)$$

При $\delta \to 0$, с учетом формул Сохоцкого: $\dfrac{1}{w \pm i0} = \mathrm{P}\dfrac{1}{w} \mp i\pi\,\delta(w)$,

для матричного элемента S-матрицы получаем,

$$\langle N(p-k)\Theta(k) \mid \widehat{\mathrm{S}}^{\pm 1} \mid N(p_1-k_1)\Theta(k_1)\rangle =$$
$$= \langle R^{\mp}\{N(p-k)\Theta(k)\} \mid R^{\pm}\{N(p_1-k_1)\Theta(k_1)\}\rangle =$$
$$= \delta_3(p-p_1)\int d^3q\, \overset{*}{R}{}^{p,k}_{\mp}(q)\, R^{p,k_1}_{\pm}(q) = \delta_3(p-p_1)\, S^p_{\pm}(k,k_1); \qquad (1.39)$$
$$S^p_{\pm}(k,k_1) = \left\{\delta_3(k-k_1) \mp 2\pi i\,\delta(E^p_{k_1}-E^p_k)\,\lambda\,\tilde{\alpha}(k)\tilde{\alpha}(-k_1)\,Q^{p(\pm)}_{k_1}\right\}.$$

1.5 Связанные состояния

Однородный аналог уравнения на состояние рассеяния с полюсом в точке энергии связи является уравнением на волновую функцию $B^p(q)$ некоторого связанного состояния $\mid B^p\rangle$, которая определяется равенством:

$$\mid B^p\rangle = \int d^3q B^p(q) \mid N(p-q)\Theta(q)\rangle, \quad \text{тогда, из (1.35) следует:}$$
$$B^p(q) = \frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)}{M(p)-E^p_q}\int d^3k B^p(k)\tilde{\alpha}(-k), \qquad (1.40)$$

или, вводя нормировочную константу Z^p,

$$B^p(q) = Z^p\frac{\tilde{\alpha}(q)}{M(p)-E^p_q}, \qquad Z^p = \lambda\int d^3k B^p(k)\tilde{\alpha}(-k), \qquad (1.41)$$

так что условие нормировки дает

$$\int d^3k\, \overset{*}{B}{}^p(k) B^p(k) = \mid Z^p\mid^2 \int d^3q \frac{\mid\tilde{\alpha}(q)\mid^2}{[M(p)-E^p_q]^2} \Rightarrow 1. \qquad (1.42)$$

Таким образом: $\quad \mid B^p\rangle = Z^p\displaystyle\int d^3q\frac{\tilde{\alpha}(q)}{M(p)-E^p_q}\mid N(p-q)\Theta(q)\rangle\ . \quad (1.43)$

Условие разрешимости уравнения (1.40) определяет энергию $M(p)$ связанного состояния:

$$1+\lambda\int d^3q\frac{\mid\tilde{\alpha}(q)\mid^2}{E_q^p-M(p)}\equiv [Q_k^p]^{-1}\Big|_{E_k^p\to M(p)}=0 \qquad (1.44)$$

Состояние рассеяния должно быть ортогонально связанному состоянию. Действительно:

$$\begin{aligned}&\langle B^{p_1}\mid R^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\}\rangle=\delta_3(p_1-p)\langle 0\mid\int d^3q\,\overset{*}{B^p}(q)R_{\pm}^{p,k}(q)\mid 0\rangle=\\&=\delta_3(p_1-p)\left\{\frac{\tilde{\alpha}(-k)}{E_k^p-M(p)}+\right.\\&\left.+Q_k^p\frac{\lambda\tilde{\alpha}(-k)}{E_k^p-M(p)}\int d^3q\mid\tilde{\alpha}(q)\mid^2\left[\frac{1}{E_k^p-E_q^p}+\frac{1}{E_q^p-M(p)}\right]\right\}=0. \qquad (1.45)\end{aligned}$$

Также непосредственно проверяется, что условие полноты этой системы волновых функций:

$$\delta_3(k-s)=\int d^3qR_{\pm}^{p,q}(s)\,\overset{*}{R}{}_{\pm}^{p,q}(k)+B^p(s)\,\overset{*}{B^p}(k), \qquad (1.46)$$

эквивалентно вполне определенным (и очевидным) аналитическим свойствам функции $Q_k^{p(\pm)}=\widetilde{Q}^p(E_k^p\pm i0)$ (1.36) в комплексной плоскости E_k^p:

$$\begin{aligned}&Im\,\widetilde{Q}^p(E\pm i0)=\mp\pi\left|\widetilde{Q}^p(E\pm i0)\right|^2\lambda\int d^3q\,|\tilde{\alpha}(q)|^2\,\delta(E_q^p-E),\\&\widetilde{Q}^p(E_k^p\pm i0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}dE\,\frac{Im\,\widetilde{Q}^p(E+i0)}{(E-E_k^p\mp i0)}-\frac{\mid Z^p\mid^2}{\lambda\,(M(p)-E_k^p)}.\end{aligned}$$

2 Динамическое отображение на шредингеровские поля.

2.1 Построение динамического отображения

Для определения динамического отображения воспользуемся уравнениями Гейзенберга (1.5), (1.6), переведя их в импульсное представление:

$$i\partial_t n(l,t)= \qquad (1.47)$$

$$= \lambda \int d^3p \int d^3q\, \tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-p) e^{i(E_q^{q+l}-E_p^{q+l})t} o^\dagger(q,t)o(p,t)n(l+q-p,t),$$

$$i\partial_t o(l,t) = \tag{1.48}$$

$$= \lambda\tilde{\alpha}(l) \int d^3p \int d^3q\, \tilde{\alpha}(p-q-l) e^{i(E_l^{q+l}-E_{l+q-p}^{q+l})t} n^\dagger(q,t)n(p,t)o(l+q-p,t).$$

Начнем с простого, но весьма важного для всей данной работы наблюдения. Из уравнения движения (1.5) непосредственно вытекает, что

$$i\partial_t(N^\dagger(x)N(x)) = \left[(N^\dagger(x)N(x))\,, H\right] = \left[(N^\dagger(x)N(x))\,, H_0\right] \Longrightarrow \tag{1.49}$$

$$\Longrightarrow N^\dagger(x)\left[\mu(\overrightarrow{\nabla}^2) - \mu(\overleftarrow{\nabla}^2)\right]N(x) \equiv \left[\mu(\overrightarrow{\nabla}^2) - \mu(\overleftarrow{\nabla}^2)\right]_{\hookrightarrow}(N^\dagger(x)N(x)),$$

т.е. эволюция по времени оператора $N^\dagger(x)N(x)$ определяется только кинетической (квадратичной по полям) частью полного гамильтониана. Переходя к координатному представлению физических полей аналогично (1.8):

$$N_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, N(k)e^{i\mathbf{kx}-im(k)t} = e^{-it\mu(\nabla^2)}N_0(\mathbf{x},0),$$

$$\Theta_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \Theta(k)e^{i\mathbf{kx}-i\omega(k)t} = e^{-itw(\nabla^2)}\Theta_0(\mathbf{x},0), \tag{1.50}$$

обнаруживаем, что при условии единственности решения уравнений (1.47), (1.48), (1.49) с *операторными* начальными условиями (1.11) (смотри Введение), динамическое отображение этого оператора *в представлении таких полей* должно иметь весьма простой вид:

$$N^\dagger(x)N(x) \,=\, N_0^\dagger(x)N_0(x), \tag{1.51}$$

$$\int d^3k\, e^{it(m(k)-m(k+l))}n^\dagger(k,t)n(k+l,t) \,=\, \int d^3k\, e^{it(m(k)-m(k+l))}N^\dagger(k)N(k+l)$$

Но тогда уравнение (1.48) оказывается на самом деле *линейным* по гейзенберговскому полю $o(k,t)$. Следовательно:

$$\partial_t o(k,t) = \int d^3l\; \mathcal{K}_N(k,l;t)o(l,t), \tag{1.52}$$

$$\mathcal{K}_N(k,l;t) = -i\lambda\tilde{\alpha}(k)\tilde{\alpha}(-l)\int d^3\rho\; e^{it(E_k^\rho - E_l^\rho)}N^\dagger(\rho-k)N(\rho-l), \tag{1.53}$$

и переходя к интегральному уранению

$$o(k,t) = \Theta(k) + \int_0^t d\eta \int d^3l\ \mathcal{K}_N(k,l;\eta) o(l,\eta), \tag{1.54}$$

видим, что оператор $o(k,t)$ *линеен* по физическому полю $\Theta(k)$ и нелинеен лишь по $N(k)$. Его решение можно записать в виде

$$o(k,t) = \Theta(k) + \int d^3l\ \mathcal{R}_N(k,l;t)\Theta(l) = \mathrm{T}\left\{\exp\left[\int_0^t d\eta \widehat{K}_N(\eta)\right]\Theta\right\}(k), \tag{1.55}$$

где $\widehat{K}_N(\eta)$ -интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}_N(k,l;\eta)$, а $\mathcal{R}_N(k,l;t)$- его "резольвента". Если оператор $o(k,t)$ уже задан (1.55) в терминах физических полей, то уравнение (1.47) на $n(k,t)$ оказывается также линейным:

$$\partial_t n(k,t) = \int d^3l\ \mathcal{K}_O(k,l;t) n(l,t), \qquad \mathcal{K}_O(k,l;t) = \tag{1.56}$$

$$= -i\lambda \int d^3\rho\ e^{it(E^\rho_{\rho-k} - E^\rho_{\rho-l})} \tilde{\alpha}(\rho-k)\tilde{\alpha}(l-\rho) o^\dagger(\rho-k,t) o(\rho-l,t), \tag{1.57}$$

и его решение записывается в аналогичном виде:

$$n(k,t) = \mathrm{T}\left\{\exp\left[\int_0^t d\eta \widehat{K}_O(\eta)\right] N\right\}(k), \tag{1.58}$$

где оператор $\widehat{K}_O(\eta)$ полностью аналогичен оператору в (1.55). В локальном пределе (1.17) его гейзенберговское ядро $\mathcal{K}_O(k,l;t)$ по тем же причинам (1.51) сводится к ядру $\mathcal{K}_\Theta(k,l;t)$, выраженному через физические поля $o(k,t) \longrightarrow \Theta(k)$. В последующих двух главах наблюдение (1.49)-(1.58) будет развито для других, в том числе релятивистских 4-х фермионных моделей теории поля.

Полное решение задачи о построении динамического отображения предполагает необходимость приведения символических выражений (1.55), (1.58) к нормальной форме по шредингеровским операторам $N(k), \Theta(k)$. В общем виде эта проблема рассмотрена в следующих главах 2 и 3. Однако, для изучения сектора с конечным числом частиц достаточно ограничиться ее решением в конечном порядке по степеням физических полей.

Построим динамическое отображение с точностью, необходимой для анализа двухчастичных состояний. Рассмотрим частное решение уравнений (1.47), (1.48), при котором преобразование фазы индуцируется соотношениями:

$$\begin{aligned} N(k) &\longrightarrow e^{i\alpha_1} N(k), \quad \Theta(k) \longrightarrow \Theta(k), \\ \Theta(k) &\longrightarrow e^{i\alpha_2}\Theta(k), \quad N(k) \longrightarrow N(k). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Тогда, в силу симметрии уравнений Гейзенберга, динамические отображения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & o(p,t) = \mathcal{O}_0^t[\Theta(k), N(k)] = \Theta(p) + \int d^3q \int d^3k N^\dagger(q) N(p+q-k)\Theta(k) \cdot \\ & \cdot G(t; q, p; p+q-k, k) + \qquad (1.60) \\ & + \int d^3q \int d^3k \Theta^\dagger(q+k-p)\Theta(q)\Theta(k) Y(t, p, q+k-p, q, k) + \ldots, \\ & n(p,t) = \mathcal{N}_0^t[N(k), \Theta(k)] = N(p) + \int d^3q \int d^3k \Theta^\dagger(q) N(p+q-k)\Theta(k) \cdot \\ & \cdot F(t; p, q; p+q-k, k) + \qquad (1.61) \\ & + \int d^3q \int d^3k N^\dagger(q+k-p) N(q) N(k) R(t, p, q+k-p, q, k) + \ldots . \end{aligned}$$

Импульсы в функциях F и G упорядочены согласно правилу: $(N, \Theta; N, \Theta)$[2]. Многоточиями обозначены нормальные произведения более высокого порядка, – четвертой степени и выше. Это динамическое отображение приведено полностью в следующей главе (2.85).

Очевидно, что для построения двухчастичного состояния достаточно ограничиться членами динамического отображения, содержащими не более трех операторов, т.к. остальные члены на вакууме зануляются.

Отвлекаясь теперь от процедуры линеаризации, воспользуемся вновь уравнениями Гейзенберга (1.47), (1.48) для поиска коэффициентных функций при нормальных произведениях в динамическом отображении. Под-

[2] Мы вновь придерживаемся системы обозначений [92]

ставляя в них динамические отображения (1.60),(1.61), прежде всего замечаем, что функции Y и R в этих отображениях должны быть тождественно равны нулю. Действительно, правые части уравнений (1.47), (1.48) содержат только слагаемые, состоящие из произведений операторов физических полей различной природы (N и Θ). В то время, как левые части уравнений содержат, так же слагаемые, включающие нормальные произведения, которые можно схематично обозначить $(\Theta^\dagger)^n\Theta^{n-1}$ или $(N^\dagger)^n N^{n-1}$. Очевидно, функции при этих произведениях должны обращаться в нуль.

В силу того, что уравнения Гейзенберга содержат в правой части трехоператорные произведения, нам необходимо выяснить, какой порядок разложения $o(l,t)$ и $n(l,t)$ следует сохранять, с тем, чтобы не превысить желаемую точность. Схематично обозначив слагаемые динамических отображений нормальными произведениями, содержащимися в них, можем выписать следующие символические равенства:

$$(\Theta^\dagger\Theta N+...)=(\underline{\Theta^\dagger}+\Theta^\dagger N^\dagger N+...)(\underline{\Theta}+N^\dagger N\Theta+...)(\underline{N}+\underline{\Theta^\dagger\Theta N}+...), \tag{1.62}$$

$$(N^\dagger N\Theta+...)=(\underline{N^\dagger}+N^\dagger\Theta^\dagger\Theta+...)(\underline{N}+\Theta^\dagger\Theta N+...)(\underline{\Theta}+\underline{N^\dagger N\Theta}+...). \tag{1.63}$$

Нетрудно убедиться, что необходимая нам операторная структура левой части этих соотношений воспроизводится в правой части только на подчеркнутых членах (после перемножения должны сохраниться только нормальные произведения, содержащие один сопряженный оператор $\Theta^\dagger$ в случае уравнения (1.62) и $N^\dagger$ в случае уравнения (1.63)). Переходя, наконец, от дифференциального уравнения (1.47) к интегральному получаем:

$$\int d^3q\int d^3p\Theta^\dagger(q)\Theta(p)N(l+q-p)F(t;l,q;l+q-p,p)=$$

$$= -i\lambda \int\limits_0^t d\eta \int d^3q \int d^3p \tilde{\alpha}(-p)\tilde{\alpha}(q) e^{i(E_q^{l+q} - E_p^{l+q})\eta} \Big\{ \Theta^\dagger(q)\Theta(p)N(l+q-p) +$$

$$+ \int d^3k \Theta^\dagger(q)\Theta(k)N(l+q-k)F(\eta; l+q-p, p; l+q-k, k) \Big\}. \qquad (1.64)$$

Откуда:

$$F(t; l, q; l+q-p, p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(q) \int\limits_0^t d\eta e^{iE_q^{l+q}\eta} \Big\{ \tilde{\alpha}(-p) e^{iE_p^{l+q}\eta} +$$

$$+ \int d^3k \tilde{\alpha}(-k) e^{iE_k^{l+q}\eta} F(\eta; l+q-k, k; l+q-p, p) \Big\}. \qquad (1.65)$$

Аналогичные преобразования с уравнением (1.48) дают:

$$\int d^3q \int d^3p N^\dagger(q)N(l+q-p)\Theta(p)G(t; q, l; l+q-p, p) = -i\lambda \int\limits_0^t d\eta \int d^3q$$

$$\cdot \int d^3p \tilde{\alpha}(l)\tilde{\alpha}(p-q-l) e^{i(E_l^{l+q} - E_{l+q-p}^{l+q})\eta} \Big\{ N^\dagger(q)N(p)\Theta(l+q-p) +$$

$$+ \int d^3k N^\dagger(q)N(l+q-k)\Theta(k)G(\eta; p, k; l+q-p, l+q-k) \Big\},$$

$$G(t; q, l; l+q-p, p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(l) \int\limits_0^t d\eta e^{iE_l^{l+q}\eta} \Big\{ \tilde{\alpha}(-p) e^{iE_p^{l+q}\eta} +$$

$$+ \int d^3k \tilde{\alpha}(k-q-l) e^{iE_{l+q-k}^{l+q}\eta} G(\eta; k, l+q-k; l+q-p, p) \Big\}. \qquad (1.66)$$

Сравнивая (1.65) и (1.66) получаем, что, несмотря на существенное различие полных решений (1.55) и (1.58):

$$F(t; l, q; l+q-p, p) = G(t; l, q; l+q-p, p). \qquad (1.67)$$

Займемся решением уравнения (1.65). Легко видеть, что правая часть (1.65) представима в виде:

$$F(t; l, q; l+q-p, p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-p) \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi(E_q^{l+q} - E_p^{l+q})} f(\xi, l+q, p). \quad (1.68)$$

Подставляя (1.68) в (1.65) имеем:

$$-i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-p)\int\limits_0^t d\xi e^{i\xi(E_q^{l+q}-E_p^{l+q})}f(\xi,l+q,p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(q)\int\limits_0^t d\eta e^{i\eta E_q^{l+q}}\Big\{\tilde{\alpha}(-p)$$

$$\cdot e^{i\eta E_p^{l+q}} - i\lambda\int d^3k\tilde{\alpha}(-k)\int\limits_0^\eta d\tau\tilde{\alpha}(k)\tilde{\alpha}(-p)e^{i\eta E_k^{l+q}}e^{i(E_k^{l+q}-E_p^{l+q})\tau}f(\tau,l+q,p)\Big\}.$$

После преобразований, получаем вольтерровское интегральное уравнение с разностным ядром:

$$f(\xi,l+q,p) = 1 - \int\limits_0^\xi d\tau K_p^{l+q}(\xi-\tau)f(\tau,l+q,p) \qquad (1.69)$$

где:

$$K_p^{l+q}(\xi-\tau) = i\lambda\int d^3k\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2 e^{-i(E_k^{l+q}-E_p^{l+q})(\xi-\tau)}. \qquad (1.70)$$

Уравнение (1.69) решается с помощью преобразований Лапласа. Например, при $t>0$:

$$\hat{\mathcal{L}}_\gamma\left[f(\xi,l+q,p)\right] \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\gamma\xi}f(\xi,l+q,p)d\xi = \frac{1}{\gamma\left(1+\hat{\mathcal{L}}_\gamma[K]\right)}, \qquad (1.71)$$

Интеграл в знаменателе вычисляем меняя порядок интегрирования:

$$\hat{\mathcal{L}}_\gamma[K] \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\gamma\xi}K_p^{l+q}(\xi)d\xi = i\lambda\int d^3k\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2\int\limits_0^\infty d\xi e^{-i(E_k^{l+q}-E_p^{l+q})\xi}e^{-\gamma\xi} =$$

$$= \lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{l+q}-E_p^{l+q}-i\gamma} \equiv I_0^{l+q}\left(\gamma - iE_p^{l+q}\right). \quad \hat{\mathcal{L}}^*_\gamma[K] = \hat{\mathcal{L}}_{-\gamma}[K]. \quad (1.72)$$

Обращение преобразования (1.71) дает решение в следующем виде:

$$f(\xi,l+q,p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\Delta}^{i\infty+\Delta}\frac{d\gamma}{\gamma}\frac{e^{\gamma\xi}}{\left(1+\lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{l+q}-E_p^{l+q}-i\gamma}\right)}. \qquad (1.73)$$

Малая вещественная добавка $\Delta > 0$ означает, что контур интегрирования для $\xi > 0$ выбран так, чтобы все особенности подынтегральной функции (имеющиеся только на мнимой оси) лежали слева от него. Решение для $\xi < 0$ дается таким же интегралом, однако тот же контур интегрирования в (1.73) должен проходить теперь так, чтобы все особенности лежали справа от него. В итоге, при $\varepsilon(t) \equiv \mathrm{sign}(t)$, решение (1.68) таково:

$$F(t;l,q;l+q-p,p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-p)\int\limits_0^t d\xi e^{i\xi(E_q^{l+q}-E_p^{l+q})} \cdot$$

$$\cdot\frac{\varepsilon(t)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)}\frac{d\gamma}{\gamma}\frac{e^{\gamma\xi}}{\left(1+\hat{\mathcal{L}}_\gamma[K]\right)}. \tag{1.74}$$

2.2 Связь коэффициентных функций с волновыми функциями рассеяния.

С помощью (1.27) перепишем (1.30) следующим образом:

$$| S^{\mp}\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = i\lambda\tilde{\alpha}(-q)\int d^3k\tilde{\alpha}(k)\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{-i(E_q^{p+q}\mp i\delta)\eta}e^{iH\eta}\Theta^\dagger(k)$$

$$\cdot N^\dagger(q+p-k) \mid 0\rangle, \tag{1.75}$$

где использованно следующее представление:

$$\frac{1}{H-E_q^{p+q}\pm i\delta} = \frac{1}{i}\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{i\eta(H-E_q^{p+q}\pm i\delta)}. \tag{1.76}$$

Далее, для операторной части подинтегрального выражения имеем

$$e^{iH\eta}\Theta^\dagger(k)N^\dagger(q+p-k) \mid 0\rangle \equiv e^{i\eta E_k^{q+p}}o^\dagger(k,\eta)n^\dagger(q+p-k,\eta) \mid 0\rangle = \tag{1.77}$$

$$= e^{i\eta E_k^{q+p}}[N^\dagger(q+p-k) + \int d^3r\int d^3l N^\dagger(r-l+q+p-k)$$

$$\cdot\Theta^\dagger(l)\Theta(r)F^*(\eta;q+p-k,r;r-l+q+p-k,l)][\Theta^\dagger(k) +$$

$$+\int d^3r\int d^3l N^\dagger(k+r-l)\Theta^\dagger(l)N(r)F^*(\eta,r,k;k+r-l,l)] \mid 0\rangle.$$

Отбрасывая нормальные произведения более чем трех операторов получаем:

$$= e^{i\eta E_k^{q+p}}\Big[N^\dagger(q+p-k)\Theta^\dagger(k) + \tag{1.78}$$
$$+\int d^3l N^\dagger(q+p-l)\Theta^\dagger(l)F^*(\eta;q+p-k,k;q+p-l,l)\Big] \mid 0\rangle.$$

Подставляя (1.78) в (1.75), находим:

$$\mid S^\mp\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = i\lambda\tilde{\alpha}(-q)\int d^3k\tilde{\alpha}(k)\Big\{\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{-i(E_q^{p+q}-E_k^{p+q}\mp i\delta)\eta}$$
$$\cdot \mid N(q+p-k)\Theta(k)\rangle + \int d^3l\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{-i(E_q^{p+q}-E_k^{p+q}\mp i\delta)\eta}$$
$$\cdot F^*(\eta,q+p-k,k;q+p-l,l)\mid N(q+p-l)\Theta(l)\rangle\Big\}. \tag{1.79}$$

Сравнивая (1.79) с комплексно сопряженным (1.65), получаем, что:

$$\mid S^\mp\{N(p)\Theta(q)\}\rangle =$$
$$= i\lambda\tilde{\alpha}(-q)\int d^3k\tilde{\alpha}(k)\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{-i(E_q^{p+q}-E_k^{p+q}\mp i\delta)\eta}\mid N(q+p-k)\Theta(k)\rangle +$$
$$+\int d^3l\Big[F^*(\pm\infty;p,q;p+q-l,l) -$$
$$-i\lambda\tilde{\alpha}(-q)\int\limits_0^{\pm\infty} d\eta e^{-i(E_q^{p+q}-E_l^{p+q}\mp i\delta)\eta}\tilde{\alpha}(l)\Big]\mid N(q+p-l)\Theta(l)\rangle, \tag{1.80}$$

или окончательно:

$$\mid S^\mp\{N(p)\Theta(q)\}\rangle = \int d^3l\, F^*(\pm\infty,p,q;p+q-l,l)\mid N(q+p-l)\Theta(l)\rangle.$$

Полученное соотношение проверяется непосредственно. Для этого, подставляя (1.73) в (1.68) рассмотрим один из пределов. Устремляя t к $+\infty$ и вводя множитель сходимости $e^{-\delta t}$, получаем:

$$F(\infty,p,q;p+q-l,l) = \tag{1.81}$$

$$= \frac{-i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-l)}{2\pi i}\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-i\infty+\Delta}^{i\infty+\Delta} d\gamma \frac{e^{\gamma\xi}e^{i\xi(E_q^{p+q}-E_l^{p+q}+i\delta)}}{\gamma\left(1+\lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{p+q}-E_l^{p+q}-i\gamma}\right)} =$$

$$= \frac{-i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-l)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\Delta}^{i\infty+\Delta} \frac{d\gamma\left[E_l^{p+q}-E_q^{p+q}+i(\gamma-\delta)\right]^{-1}}{i\gamma\left(1+\lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{p+q}-E_l^{p+q}-i\gamma}\right)}.$$

Поскольку экспонента теперь отсутствует, контур интегрирования можно замкнуть как слева, так и справа. Особенности подинтегральной функции, обусловленные множителем

$$\left[i\gamma\left(1+\lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{p+q}-E_l^{p+q}-i\gamma}\right)\right]^{-1}, \tag{1.82}$$

благодаря добавке $\Delta > 0$, находятся, как известно, слева от контура интегрирования, тогда как полюс

$$\left[E_l^{p+q}-E_q^{p+q}+i(\gamma-\delta)\right]^{-1} \tag{1.83}$$

лежит справа от него в силу условия сходимости интеграла по $d\xi$, обусловленной добавкой $i\delta$, $\Delta < \delta$. Замыкая контур в правой полуплоскости, находим:

$$F(\infty,p,q;p+q-l,l) = \frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-l)\left(E_q^{p+q}-E_l^{p+q}+i\delta\right)^{-1}}{\left[1+\lambda\int d^3k\frac{\mid\tilde{\alpha}(k)\mid^2}{E_k^{p+q}-E_q^{p+q}-i\delta}\right]} =$$

$$= \frac{\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-l)}{(E_q^{p+q}-E_l^{p+q}+i\delta)}Q_q^{p+q(+)}. \tag{1.84}$$

Беря комплексно-сопряженное выражение, и учитывая, что

$$Q_q^{p(\pm)*} = Q_q^{p(\mp)}, \qquad \tilde{\alpha}(-q) = \widetilde{\alpha^*}(q), \tag{1.85}$$

окончательно приходим к уже знакомому выражению для волновой функции состояний рассеяния (1.37):

$$R_\pm^{p+q,q}(l) = \delta_3(l-q) + \frac{\lambda\tilde{\alpha}(-q)\tilde{\alpha}(l)}{(E_q^{p+q}-E_l^{p+q}\pm i\delta)}Q_q^{p+q(\pm)}.$$ Таким образом:

$$R_{\pm}^{p+q,q}(l) = \delta_3(l-q) + F^*(\mp\infty; p, q; p+q-l, l)\Big|_{E_q^{p+q} \to E_q^{p+q} \pm i\delta}. \qquad (1.86)$$

3 Сравнение динамических отображений.

3.1 Динамическое отображение на in – поля

Искусство выбора "кандидатов" на роль физических полей состоит в том, чтобы получившиеся динамические отображения не нарушали канонических коммутационных соотношений и образовывали полный набор операторов в пространстве состояний. Для этой цели в [92] предлагается, так называемая процедура самосогласования. Она заключается во введении дополнительных физических полей в динамическое отображение, с последующей проверкой коммутационных соотношений. Иначе говоря, производится последовательная достройка пространства Фока до полного пространства состояний.

Описанная в предыдущем параграфе процедура построения динамических отображений не нуждалась в самосогласовании, т.к. выбранные физические поля $N(k)$ и $\Theta(k)$ с самого начала удовлетворяли правильным коммутационным соотношениям (1.12) и образовывали полный набор. Однако, вместо $t_0 = 0$, возможен иной выбор (гейзенберговских) полей $n(k, t_0)$, $o(k, t_0)$, в качестве физических полей, а именно, асимптотических in-полей, $t_0 \longrightarrow -\infty$. Такой выбор принято считать целесообразным, например, при S - матричной постановке задачи. Построение динамического отображения в рамках (N, Θ) - модели, при таком выборе физических полей детально рассмотрено в монографии Х.Умэдзавы и др. [92].

Поставим перед собой цель сравнить этот подход с тем, который развит выше. Для начала, вкратце опишем интересующие нас результаты, полученные группой Умэдзавы [3].

Исходный выбор физических полей N_{in}, Θ_{in} (N, Θ)-модели в [92], как соответствующих in-полей, приводит к нарушению коммутационных соотношений (1.3). Следуя вышеописанной логике, введем дополнительное физическое поле V, несколько видоизменив соотношения (1.59), индуцирующие преобразования фазы N и Θ:

$$\begin{aligned} &\text{фаза } N: \quad N_{in}(k) \longrightarrow e^{i\alpha_1} N_{in}(k), \quad V(k) \longrightarrow e^{i\alpha_1} V(k), \quad \Theta_{in}(k) \longrightarrow \Theta_{in}(k), \\ &\text{фаза } \Theta: \quad \Theta_{in}(k) \longrightarrow e^{i\alpha_2} \Theta_{in}(k), \quad V(k) \longrightarrow e^{i\alpha_2} V(k), \quad N_{in}(k) \longrightarrow N_{in}(k). \end{aligned}$$

Поле V интерпретируется как составная ферми-частица. В силу этих фазовых преобразований динамические отображения должны выглядеть следующим образом [92]:

$$\begin{aligned} &n(l,t) \equiv \mathcal{N}^t_{-\infty}[N_{in}(k), \Theta_{in}(k), V(k)] = N_{in}(l) + \\ &+ \int d^3q \int d^3k c(l,q;l+q-k,k) e^{i(E_q^{l+q} - E_k^{l+q})t} \Theta^{j\dagger}(q) N_{in}(l+q-k)\Theta_{in}(k) + \\ &+ \int d^3k h(l,k;l+k) e^{i(E_k^{l+k} - M(l+k))t} \Theta^\dagger_{in}(k) V(l+k) + \dots, \qquad (1.87) \\ &o(l,t) \equiv \mathcal{O}^t_{-\infty}[N_{in}(k), \Theta_{in}(k), V(k)] = \Theta_{in}(l) + \\ &+ \int d^3q \int d^3k c(q,l;l+q-k,k) e^{i(E_l^{l+q} - E_k^{l+q})t} N^\dagger_{in}(q) N_{in}(l+q-k)\Theta_{in}(k) + \\ &+ \int d^3k h(k,l;l+k) e^{i(E_l^{l+k} - M(l+k))t} N^\dagger_{in}(k) V(l+k) + \dots, \qquad (1.88) \end{aligned}$$

где c и h определяются посредством вычисления матричных элементов от уравнений Гейзенберга: $\langle \Theta_{in}(l) \mid (1.47) \mid N_{in}(l+q-k)\Theta_{in}(k)\rangle$, $\langle N_{in}(q) \mid (1.48) \mid N_{in}(l+q-k)\Theta_{in}(k)\rangle$ и $\langle \Theta_{in}(l) \mid (1.47) \mid V(l+k)\rangle$, $\langle N_{in}(l) \mid (1.48) \mid V(l+k)\rangle$ соответственно:

$$c^{(\pm)}(l,q;l+q-k,k) = \frac{\lambda \tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-k) Q_k^{l+q(\pm)}}{E_k^{l+q} - E_q^{l+q} \pm i\delta} = R_\pm^{l+q,k}(q) - \delta_3(k-q);$$

[3] Все динамические отображения из работы [92] переведены для удобства из координатного представления в импульсное, причем, $c_{[92]}(2\pi)^{3/2} = c^{(+)}$

$$h(l,q;l+q)=\frac{Z^{l+q}\lambda\tilde{\alpha}(q)}{M(l+q)-E_q^{l+q}}=B^{l+q}(q);\ \text{ т.е.} \tag{1.89}$$

$$R_{\pm}^{p,k}(q)=\delta_3(k-q)+c^{(\pm)}(p-q,q;p-k,k),\quad B^p(q)=h(p-q,q;p). \tag{1.90}$$

Уже в (1.77) операторное произведение $n(k,t)\,o(p,t)$ строится путем непосредственного умножения динамических отображений (1.61), (1.60), или (1.87), (1.88) и приведения его к нормальной форме. В подходе работы [92] это операторное произведение связано непосредственно с **новым** оператором, – оператором уничтожения связанного состояния. Используя (1.90), получим (сравни с (1.77), (1.78)):

$$\begin{aligned} &e^{-itE_q^p}o(q,t)n(p-q,t)= \\ &=e^{-itM(p)}\,B^p(q)\,V(p)+\int d^3k\,e^{-itE_k^p}\,R_+^{p,k}(q)\,\Theta_{in}(k)N_{in}(p-k)+\ldots. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Многоточие, как и везде выше, обозначает слагаемые более высокого порядка по нормальным произведениям полей, которые исчезают на $\langle 0\,|$. Второй член в правой части этого отображения, ответственный, как вскоре будет видно, за (N,Θ) рассеяние (см. также [96]), считается, к сожалению, отсутствующим в формуле (3.1.62) работы [92], что приводит к неправомерности основанных на ней рассуждений в обоснование равенства асимптотических операторов связанных состояний $V_{out}(p)$ и $V_{in}(p)\equiv V(p)$ (3.1.82в).

Теперь необходимо определить разумную процедуру сравнения динамических отображений (1.61), (1.60) и (1.87), (1.88) соответственно.

3.2 Пространство представления.

Следует обратить внимание на то, что, в силу (1.21), вакуум полей N,Θ является так же вакуумом полей N_{in},Θ_{in}. Следовательно, динамические отображения (1.61), (1.60) и (1.87), (1.88) реализуют гейзенберговские операторы над одним и тем же гильбертовым пространством состояний. В отличие от полей N, Θ, операторы N_{in}, Θ_{in} не образуют полного набора операторов. Это вынуждает нас достраивать пространство, порожденное операторами N_{in}, Θ_{in} (обозначим его через $\Im_{N\Theta}$), некоторым пространством, порожденным дополнительным оператором $V = V_{in}$ с тем же вакуумным вектором. Это достроенное пространство, вообще говоря, содержит состояния, ортогональные состояниям пространства $\Im_{N\Theta}$. Этот факт однозначно указывает на невозможность выразить поле V в терминах N_{in}, Θ_{in}. Как показано ниже, независимость полей V и N_{in}, Θ_{in} проявится, в факторизации уравнений на коэффициентные функции динамических отображений.

На выражение V в терминах операторов N, Θ принципиальных запретов нет. Как уже было сказано, оба набора физических полей реализуют операторы Гейзенберга над одним и тем же гильбертовым пространством. Уравнения Гейзенберга, являясь уравнением первого порядка по времени, обеспечивают, таким образом, тривиальность в этой модели унитарного преобразования от гейзенберговских полей в представлении N, Θ к гейзенберговским полям в представлении N_{in}, Θ_{in}, V. Следовательно, поля Гейзенберга в представлении N_{in}, Θ_{in}, V, взятые в нулевой момент времени можно отождествить с физическими полями $N(k), \Theta(k)$. В частности из (1.91) при $t = 0$ имеем

$$\Theta(q)N(p-q) = B^p(q)\,V(p) + \int d^3k\, R_+^{p,k}(q)\,\Theta_{in}(k)N_{in}(p-k) + \ldots$$

За многоточием здесь, как обычно, скрываются слагаемые более высокого порядка по нормальным произведениям полей, которые исчезают на $\langle 0|$. Подставляя это выражение в сопряженное равенству (1.43), и используя ортогональность (1.45) и нормировку (1.42), (1.38), и (1.39), находим:

$$\langle B^p | = \langle 0| \int d^3q\, B^{p*}(q)\, N(p-q)\Theta(q) = \langle 0| \int d^3q\, B^{p*}(q) \cdot$$
$$\cdot \left\{ B^p(q)\,V(p) + \int d^3k\, R_+^{p,k}(q)\,\Theta_{in}(k)N_{in}(p-k) + \ldots \right\} = \langle 0|\, V(p);$$

аналогично, из (1.32), имеем: $\mid R^{\pm}\{N(p-k)\Theta(k)\}\rangle =$

$$= \int d^3q R_{\pm}^{p,k}(q)\, N^{\dagger}(p-q)\, \Theta^{\dagger}(q)\, |0\rangle = \int d^3q R_{\pm}^{p,k}(q) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \overset{*}{B^p}(q)\, V^{\dagger}(p) + \int d^3l\; \overset{*}{R_{+}^{p,l}}(q)\, N_{in}^{\dagger}(p-l)\Theta_{in}^{\dagger}(l) + \ldots \right\} |0\rangle =$$

$$= \int d^3l\, N_{in}^{\dagger}(p-l)\Theta_{in}^{\dagger}(l)\; |0\rangle \begin{Bmatrix} \delta_3(l-k) \\ S_{-}^{p}(l,k) \end{Bmatrix} = \begin{cases} N_{in}^{\dagger}(p-k)\Theta_{in}^{\dagger}(k)\; |0\rangle. \\ N_{out}^{\dagger}(p-k)\Theta_{out}^{\dagger}(k)\; |0\rangle. \end{cases} \qquad (1.92)$$

т.е. состояние $V^{\dagger}(p)\ \mid 0\rangle$, полученное путем самосогласования, в точности совпадает со связанным состоянием $\mid B^p\rangle$, полученным в результате решения задачи на собственные значения, а собственные состояния рассеяния совпадают соответственно с 2-х частичными in- и out- состояниями [92], с учетом потерянного там вклада в (1.91).

Заметим, однако, что, в отличие от (1.14), представление полного гамильтониана в терминах операторов $N_{in}(p), \Theta_{in}(p), V(p)$ справедливо *только в слабом смысле* [92]:

$$H \overset{(\mathrm{w})}{\Longrightarrow} \int d^3k \left\{ m(k)N_{in}^{\dagger}(k)N_{in}(k) \oplus \omega(k)\Theta_{in}^{\dagger}(k)\Theta_{in}(k) \oplus M(k)V^{\dagger}(k)V(k) \right\}. \qquad (1.93)$$

И только в этом смысле состояния (1.92) являются, вообще говоря, его собственными состояниями (см. Введение, $(\star)$).

3.3 Условия совместности отображений.

Теперь сравним непосредственно динамические отображения (1.61) и (1.87). С учетом предыдущих замечаний, используя единственность ГП и строя динамическое отображение на "in" -поля двумя путями:

$$n(k,t) = \mathcal{N}_{-\infty}^{t}[N_{in}(k)] = \mathcal{N}_{0}^{t}[N(k)] = \mathcal{N}_{0}^{t}\left\{\mathcal{N}_{-\infty}^{0}[N_{in}(k)]\right\}, \qquad (1.94)$$

можно сравнить результаты [92] с нашим подходом. Переписав (1.61) в терминах N_{in}, Θ_{in}, V аналогично тому, как это было сделано выше, получим:

$$
\begin{aligned}
n(l,t) = {} & N_{in}(l) + \int d^3q \int d^3k\, \Theta^{\dagger}_{in}(q)\Theta_{in}(k)N_{in}(l+q-k)\,\cdot \\
& \cdot[c(l,q;l+q-k,k) + F(t;l,q;l+q-k,k) + \\
& + \int d^3p\, c(l+q-p,p;l+q-k,k)F(t;l,q,l+q-p;p)] + \\
& + \int d^3q\; \Theta^{\dagger}_{in}(q)V(l+q)[h(l,k;l+q) + \\
& + \int d^3k\; h(l+q-k,k;l+q)F(t;l,q;l+q-k,k)].
\end{aligned}
\tag{1.95}
$$

Приравняв это к динамическому отображению (1.87), видим, что левая и правая части получившегося операторного уравнения полностью совпадут, если будут независимо выполняться следующие равенства:

$$
h(l,q;l+q)\left\{e^{i(E^{l+q}_q - M(l+q))t} - 1\right\} = \tag{1.96}
$$

$$
= \int d^3p\; h(l+q-p,p;l+q)F(t;l,q;l+q-p,p),
$$

$$
\begin{aligned}
& c(l,q,l+q-k,k)\left\{e^{i(E^{l+q}_q - E^{l+q}_k)t} - 1\right\} = F(t,l,q,l+q-k,k) + \\
& + \int d^3p c(l+q-p,p,l+q-k,k)F(t,l,q,l+q-p,p).
\end{aligned}
\tag{1.97}
$$

Заметим, что левая часть равенства (1.97) обращается в нуль при $q=k$, следовательно, если к функции $c(l,q,l+q-k,k)$ прибавить $\delta_3(q-k)$, то равенство, в смысле обобщенных функций, не изменится . Тот факт, что (1.97), (1.96) связывают коэффициентные функции, стоящие под знаком интеграла, позволяет рассматривать равенства именно в таком смысле. Таким образом, подставив явные выражения для c и h получим:

$$
\begin{aligned}
& \frac{Z^{l+q}\lambda\tilde{\alpha}(q)}{M(l+q) - E^{l+q}_q}\left\{e^{i(E^{l+q}_q - M(l+q))t} - 1\right\} = \\
& \lambda Z^{l+q}\int d^3p \frac{\tilde{\alpha}(p)}{M(l+q) - E^{l+q}_p} F(t;l,q;l+q-p,p),
\end{aligned}
\tag{1.98}
$$

$$
\left(\delta_3(q-k) + \frac{\lambda\tilde{\alpha}(-k)\tilde{\alpha}(q)Q^{l+q(\pm)}_k}{E^{l+q}_k - E^{l+q}_q \pm i\delta}\right)\left\{e^{i(E^{l+q}_q - E^{l+q}_k)t} - 1\right\} = \tag{1.99}
$$

$$
= \int d^3p \left\{\delta_3(k-p) + \frac{\lambda\tilde{\alpha}(-k)\tilde{\alpha}(p)Q^{l+q(\pm)}_k}{E^{l+q}_k - E^{l+q}_p \pm i\delta}\right\} F(t;l,q;l+q-p,p),
$$

или в терминах двухчастичных волновых функций :

$$B^{l+q}(q)\left\{e^{i(E_q^{l+q}-M(l+q))t}-1\right\}=\int d^3p\,B^{l+q}(p)F(t;l,q;l+q-p,p),\quad(1.100)$$
$$R_{\pm}^{l+q,k}(q)\left\{e^{it(E_q^{l+q}-E_k^{l+q})}-1\right\}=\int d^3p\,R_{\pm}^{l+q,k}(p)F(t;l,q;l+q-p,p).$$

Нетрудно заметить, что, с учетом *операторных условий стабильности* (1.21), эти равенства отвечают просто двум различным формам записи одновременнóго Бете-Солпитеровского матричного элемента:

$$\langle 0\,|\,n(l,t)\,o(q,t)\,|\,2,l+q\rangle=e^{it(E_q^{l+q}-W_2(l+q))}\chi^{l+q}(l-q),\qquad(1.101)$$

связанным, соответственно, с двумя формами динамического отображения (1.9) и (1.60), (1.61). Здесь $|\,2,l+q\rangle$ есть собственное двухчастичное связанное состояние $|\,B^{l+q}\rangle$, либо состояние рассеяния $|\,R^{\pm}\{N(l)\Theta(q)\}\rangle$. Используя определения состояний рассеяния (1.37) и S- матрицы (1.39):

$$\lim_{t\to\{+\infty,-\infty\}}\ e^{it(E_k^p-E_q^p)}R_{\pm}^{p,q}(k)=\left\{\begin{array}{cc}S_+^p(k,q), & \delta_3(q-k)\\ \delta_3(q-k), & S_-^p(k,q)\end{array}\right\},\qquad(1.102)$$

из условий совместности (1.100), записанных в виде:

$$e^{it(E_k^p-E_q^p)}R_{\pm}^{p,q}(k)=\int d^3s\,R_{\pm}^{p,q}(s)\left[\delta_3(s-k)+F(t;p-k,k;p-s,s)\right],\quad(1.103)$$
$$e^{it(E_k^p-M(p))}B^p(k)=\int d^3s\,B^p(s)\left[\delta_3(s-k)+F(t;p-k,k;p-s,s)\right],$$

при $t\to\pm\infty$ немедленно приходим снова к представлению (1.86) в виде:

$$\lim_{t\to\mp\infty}\left[\delta_3(s-k)+F(t;p-k,k;p-s,s)\right]=\overset{*}{R}{}_{\pm}^{p,k}(s).\qquad(1.104)$$

Условие полноты (1.46) позволяет "решить" (1.103) относительно F:

$$\delta_3(s-k)+F(t;p-k,k;p-s,s)=\int d^3q e^{it(E_k^p-E_q^p)}R_{\pm}^{p,q}(k)\,\overset{*}{R}{}_{\pm}^{p,q}(s)+\quad(1.105)$$
$$+\,e^{it(E_k^p-M(p))}B^p(k)B^{p*}(s)=\langle N(p-k)\Theta(k)|e^{itH_0}\mathbf{\Pi}_2^p e^{-itH}|N(p-s)\Theta(s)\rangle,$$

т.е. эта коэффициентная функция определяется, по сути, проектором $\mathbf{\Pi}_2^p$ в Меллеровском операторе рассеяния на подпространство *собственных двухчастичных промежуточных* $N\Theta$- *состояний* полного гамильтониана, с заданным полным импульсом p.

3.4 Проверка условий совместности.

Преобразуем (1.73), (1.74) следующим образом:

$$f(\xi, l+q, p) = \frac{\varepsilon(\xi)}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(\xi)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(\xi)} \frac{e^{\sigma\xi} e^{iE_p^{l+q}\xi} d\sigma}{(\sigma + iE_p^{l+q}) \left[1 + I_0^{l+q}(\sigma)\right]}, \tag{1.106}$$

$$F(t; l, q; l+q-p, p) = -i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-p) \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi E_q^{l+q}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\varepsilon(t)}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma \frac{e^{\sigma\xi}}{(\sigma + iE_p^{l+q}) \left[1 + I_0^{l+q}(\sigma)\right]}. \tag{1.107}$$

$$\text{где:} \quad \gamma = \sigma + iE_p^{l+q}, \quad I_0^{l+q}(\sigma) = \lambda \int d^3k \frac{\mid \tilde{\alpha}(k) \mid^2}{E_k^{l+q} - i\sigma}. \tag{1.108}$$

Уравнение на спектр связанных состояний (1.44) запишется теперь в виде:

$$1 + I_0^{\mathcal{P}}\left(-iM(\mathcal{P})\right) = 0. \tag{1.109}$$

Предполагая, что решение (1.109), существует и единственно, тождественно перепишем $1 + I_0^{l+q}(\sigma)$ как:

$$1 + I_0^{l+q}(\sigma) = I_0^{l+q}(\sigma) - I_0^{l+q}(-iM(l+q)) = \lambda \left[i\sigma - M(l+q)\right] I_1^{l+q}(\sigma),$$

$$\text{где:} \quad I_1^{l+q}(\sigma) = \int d^3k \frac{\mid \tilde{\alpha}(k) \mid^2}{(E_k^{l+q} - i\sigma)(E_k^{l+q} - M(l+q))}. \tag{1.110}$$

Заметим, что этот же интеграл определяет нормировку волновой функции связанного состояния (1.42)

$$\int d^3k \overset{*}{B^p}(k) B^p(k) = \mid Z^p \mid^2 I_1^p(-iM(p)). \tag{1.111}$$

Меняя порядок интегрирования, перепишем правую часть равенства (1.98) следующим образом:

$$-i\lambda Z^{l+p} \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi E_q^{l+q}} \tilde{\alpha}(q) \frac{\varepsilon(t)}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} \frac{e^{\sigma\xi} d\sigma}{(i\sigma - M(l+q)) I_1^{l+q}(\sigma)}.$$

$$\cdot \int d^3p \frac{\mid \tilde{\alpha}(p) \mid^2}{(M(l+q) - E_p^{l+q})(\sigma + iE_p^{l+q})} =$$

$$= \lambda Z^{l+p} \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi E_q^{l+q}} \tilde{\alpha}(q) \frac{\varepsilon(t)}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} \frac{e^{\sigma\xi} d\sigma}{i\sigma - M(l+q)} =$$

$$= \lambda \frac{Z^{l+q}\tilde{\alpha}(q)}{M(l+q) - E_q^{l+q}} \left[e^{i(E_q^{l+q} - M(l+q))t} - 1 \right]. \tag{1.112}$$

Таким образом, убеждаемся, что равенство (1.98) выполняется тождественно. Аналогично доказывается тождественность равенства (1.99). Для этого достаточно вычислить интеграл.

$$\int d^3p \frac{\tilde{\alpha}(-p) R_{\pm}^{l+q,k}(p)}{E_p^{l+q} - i\sigma} = \tilde{\alpha}(-k) \Big\{ \frac{1}{E_k^{l+q} - i\sigma} -$$

$$-Q_k^{l+q(\pm)} \lambda \int \frac{d^3p \ \mid \tilde{\alpha}(p) \mid^2}{(E_p^{l+q} - i\sigma)(E_p^{l+q} - E_k^{l+q} \mp i\delta)} \Big\}$$

Разлагая $\quad \dfrac{1}{(E_p^{l+q} - i\sigma)(E_p^{l+q} - E_k^{l+q} \mp i\delta)} =$

$$= \frac{1}{E_k^{l+q} - i\sigma \pm i\delta} \left[\frac{1}{E_p^{l+q} - E_k^{l+q} \mp i\delta} - \frac{1}{E_p^{l+q} - i\sigma} \right],$$

и замечая, что: $\quad Q_k^{l+q(\pm)} = \left[1 + I_0^{l+q}(\pm\delta - iE_k^{l+q}) \right]^{-1}, \quad (1.113)$

приведем наш интеграл к виду

$$\frac{\tilde{\alpha}(-k)}{E_k^{l+q} - i\sigma \pm i\delta} \left\{ 1 - Q_k^{l+q(\pm)} \left[I_0^{l+q}(\pm\delta - iE_k^{l+q}) - I_0^{l+q}(\sigma) \right] \right\} =$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}(-k)}{E_k^{l+q} - i\sigma \pm i\delta} Q_k^{l+q(\pm)} \left[1 + I_0^{l+q}(\sigma) \right]. \tag{1.114}$$

Тогда правая часть (1.99) примет вид

$$-i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-k) Q_k^{l+q(\pm)} \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi E_q^{l+q}} \frac{\varepsilon(t)}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma \frac{e^{\sigma\xi}}{\sigma + iE_k^{l+q} \mp \delta} =$$

$$= -i\lambda\tilde{\alpha}(q)\tilde{\alpha}(-k) Q_k^{l+q(\pm)} \int\limits_0^t d\xi e^{i\xi(E_q^{l+q} - E_k^{l+q} \mp i\delta)}, \tag{1.115}$$

что, очевидно, совпадает с левой частью (1.99). Здесь произведение $\varepsilon(t)$ и контурного интеграла имеет одно и тоже значение для обоих знаков t, ξ, и независимо $\pm i\delta$ так как указанные выше условия обхода особенностей означают, что здесь $\Delta > \delta \to 0$.

4 Выводы.

Полученные выше результаты демонстрируют на конкретной модели, *что* динамические отображения (1.60), (1.61) *однозначно* определяют динамическое отображение *произведения одновременны́х* гейзенберговских операторов (1.91) просто как произведение отдельных динамических отображений, т.е. динамические отображения (1.60), (1.61) образуют *одновременну́ю операторную алгебру* гейзенберговских полей, тогда как динамические отображения (1.87), (1.88), введеные в работе [92], образуют такую алгебру гейзенберговских полей только *в слабом смысле*, поскольку, в этом случае, *полный* набор физических полей (как набор асимптотических полей, включающий дополнительные – связанные состояния) шире, чем набор исходных гейзенберговских полей.

Операторные начальные условия (1.11) (в отличие от начальных условий в слабом смысле на асимтотические поля ($\star$), описанных во Введении), гарантируют единственность решения всех уравнений движения и позволяют обосновать метод линеаризации ГУ, который, по сути, является проявлением согласованности процедуры квантования с динамикой системы, выражающейся, в частности, в диагонализуемости гамильтониана на выбранных физических полях. Забегая вперед, отметим, что непосредственное применение этого метода в релятивистских теориях поля возможно, по видимому, лишь в весьма ограниченном числе указанных ниже случаев. Для калибровочных теорий типа КЭД, прообразом которой можно условно считать рассмотренную выше модель, оно сталкивается с многочисленными трудностями, описанными в главе 3.

В заключении заметим, что, во-первых, переходом к новым θ-полям можно привести взаимодействие в (1.1) к локальному виду:

$$H = \int d^3\mathrm{x}\Big\{N^\dagger(x)\mu(\nabla^2)N(x) + \theta^\dagger(x)W(\nabla^2)\theta(x) + \tag{1.116}$$

$$+\lambda N^\dagger(x)N(x)\theta^\dagger(x)\theta(x)\Big\}, \quad \text{где:}$$

$$\theta(x) = \int d^4z\bar{\alpha}(x-z)\Theta(z), \;\; \theta^\dagger(k) = \tilde{\alpha}(k)\Theta^\dagger(k), \;\; \theta(k) = \tilde{\alpha}(-k)\Theta(k), \tag{1.117}$$

$$W(\nabla^2)e^{i\mathbf{kx}} = \Omega(k)e^{i\mathbf{kx}}, \quad \Omega(k) = \frac{\omega(k)}{|\tilde{\alpha}(k)|^2}. \tag{1.118}$$

Однако, это повлечет не только изменение кинетической энергии (1.118), но и приведет к нарушению локальности ККС (1.3):

$$[\theta(x),\theta^\dagger(y)]\delta(x_0-y_0) = \int d^4z\bar{\alpha}(x-z)\bar{\alpha}(y-z) = \delta(x_0-y_0)\int d^3k|\tilde{\alpha}(k)|^2\, e^{i\mathbf{k(x-y)}}. \tag{1.119}$$

Следовательно, не связанные, на первый взгляд, процедуры регуляризации для ККС и гамильтониана взаимодействия не являются, на самом деле, независимыми и, по крайней мере, должны задаваться единым параметром регуляризации.

Во-вторых, с учетом условий сходимости интегралов (1.110), (1.111), в частности, для $E_k^{l+q} \sim k^2$ в нерелятивистской кинематике, решениям (1.36), (1.37), (1.41), (1.107) для волновых и коэффициентных функций можно придать смысл и в локальном пределе (1.17), если смириться с невозможностью явного определения вклада энергии связи в $M(\mathcal{P})$ (точки вычитания) из теряющего тогда свой прежний смысл уравнения (1.109). Эти замечания используются в дальнейшем, при рассмотрении локальных 4-х фермионных моделей.

Глава 2

4-х фермионное взаимодействие

В этой главе рассмотрены обобщения метода динамических отображений на 4-х фермионные X-модели типа Ли [76] при наличии высших "флуктуационных членов". Установленные в первом параграфе общие свойства диагонализуемых моделей иллюстрируются во втором параграфе на примерах контактных 4-х фермионных взаимодейсвий вида "ток $\otimes$ ток" со скалярным и векторным токами. Для полученых решений линеаризованных уравнений Гейзенберга в третьем параграфе рассмотрена процедура приведения к нормальной форме и уравнения на высшие коэффициентные функции.

1 Частично диагонализуемые модели.

1.1 Операторная реализация и пространство Фока.

Предположим, что, помимо свойств (0.3)-(0.7), для рассматриваемой операторной реализации (независящий от времени) редуцированный четырехфермионный гамильтониан в момент времени $t_0 = 0$ не содержит "флуктуационных" членов [81] вплоть до пятого порядка и допускает разбиение: $H = H_0 + H_I$, при этом, квадратичная по **физическим полям** часть играет роль "свободного" гамильтониана H_0, а оставшаяся часть

$H_I \equiv H - H_0$ такова, что $H_I \mid 0\rangle = 0$, и для любого 2-х частичного состояния

$$\mid R^0_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle \equiv A^\dagger_\alpha(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{q})A^\dagger_\beta(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{q}) \mid 0\rangle \qquad (2.1)$$

выполняется равенство:

$$H_I \mid R^0_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle \equiv (H-H_0) \mid R^0_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle \equiv \qquad (2.2)$$
$$\equiv \left\{\left[H, A^\dagger_\alpha\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{q}\right)\right], A^\dagger_\beta\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{q}\right)\right\} \mid 0\rangle \Longrightarrow \int d^3s\ 2K^{\mathcal{P}}(\mathbf{q},\mathbf{s})\ \mid R^0_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{s})\rangle,$$

например:

$$H_0\{A\} \stackrel{def}{\equiv} \int d^3k E(k) A^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) A_\alpha(\mathbf{k}); \quad [H_0, A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})] \equiv E(k) A^\dagger_\alpha(\mathbf{k}); \qquad (2.3)$$
$$H_I\{A\} = \int d^3q \int d^3p \int d^3\kappa \int d^3l\ \delta_3(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\boldsymbol{\kappa}-\mathbf{l})\ K^{q+p}\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{2},\frac{\boldsymbol{\kappa}-\mathbf{l}}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot A^\dagger_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) A^\dagger_\beta(\mathbf{l}) A_\beta(\mathbf{p})\, A_\alpha(\mathbf{q}) + \sum_{m,n\geq 3}\left[(A^\dagger)^m(A)^n + (A^\dagger)^n(A)^m\right], \qquad (2.4)$$
$$K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\mathbf{s}) = K^{\mathcal{P}}(-\mathbf{r},-\mathbf{s}); \qquad K^{*\mathcal{P}}(\mathbf{s},\mathbf{r}) = K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\mathbf{s}), \qquad (2.5)$$

где взаимодействие не зависит от спина, а последняя сумма в (2.4) символизирует возможные высшие степени взаимодействия, допускающие "флуктуационные" члены с $m \neq n$. Существование операторных реализаций такого типа для релятивистских гамильтонианов связано с возможностью их частичной операторной диагонализации и является отдельным открытым вопросом [91]. По крайней мере, они всегда существуют для рассматриваемых здесь моделей типа Ли.

Очевидно, в этом случае имеется естественное фоковское пространство, собственное для H_0 (2.3):

$$H_0\{A\}\, A^\dagger_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1)\cdots A^\dagger_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n) \mid 0\rangle = \left(\sum_{j=1}^n E(k_j)\right) A^\dagger_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1)\cdots A^\dagger_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n) \mid 0\rangle, \quad (2.6)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что в этом пространстве Фока существуют решения задачи на собственные значения как для двухчастичных связанных состояний, так и для состояний рассеяния

$$H \mid R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle = E_2(\mathcal{P},q) \mid R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle, \quad H \mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}\rangle = M_2(\mathcal{P}) \mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}\rangle, \quad (2.7)$$

$$E_2(\mathcal{P},q) \equiv E(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{q}) + E(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{q}); \quad M_2(\mathcal{P}) \equiv E_2(\mathcal{P},ib), \quad (2.8)$$

и записываются в следующей форме:

$$\mid R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle = \mid R^{0}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle + \frac{1}{E_2(\mathcal{P},q)\pm i\delta - H}\, H_I \ \mid R^{0}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle, \quad (2.9)$$

$$\mid R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle = \int d^3\boldsymbol{\kappa} \mid R^{0}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\boldsymbol{\kappa})\rangle \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (2.10)$$

$$\mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}\rangle = \int d^3\boldsymbol{\kappa} \mid R^{0}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\boldsymbol{\kappa})\rangle B^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\kappa}). \quad (2.11)$$

Соответствующие волновые функции удовлетворяют вытекающим из (2.7), (2.9), (2.11) обычным интегральным уравнениям Липпмана-Швингера:

$$\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_3(\boldsymbol{\kappa}-\mathbf{q}) + \frac{1}{E_2(\mathcal{P},q)-E_2(\mathcal{P},\kappa)\pm i\delta}\cdot\int d^3r\, \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{r})\, 2\, K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\boldsymbol{\kappa}),$$

$$B^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{M_2(\mathcal{P})-E_2(\mathcal{P},\kappa)}\cdot\int d^3r\; B^{\mathcal{P}}(\mathbf{r})\; 2\, K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\boldsymbol{\kappa}). \quad (2.12)$$

1.2 Свойства динамического отображения.

Динамические отображениия (0.8) для этой модели имеют вид:

$$e^{iHt}A^{\dagger}_{\alpha}(\mathbf{k})e^{-iHt} \equiv e^{iE(k)t}a^{\dagger}_{\alpha}(\mathbf{k},t) = e^{iE(k)t}\ \mathcal{A}^{t\dagger}_0[A(\mathbf{k})], \quad (2.13)$$

$$a^{\dagger}_{\alpha}(\mathbf{k},t) = A^{\dagger}_{\alpha}(\mathbf{k}) + \int d^3p \int d^3l A^{\dagger}_{\alpha}(\mathbf{l})A^{\dagger}_{\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{p})A_{\beta}(\mathbf{l}+\mathbf{p})\cdot$$
$$\cdot F^{(1)^*}(t;\mathbf{p}\mid\mathbf{l},\mathbf{k}) + \ldots, \quad (2.14)$$

$$e^{iHt}A_{\alpha}(\mathbf{k})e^{-iHt} \equiv e^{-iE(k)t}a_{\alpha}(\mathbf{k},t) = e^{-iE(k)t}\mathcal{A}^t_0\left[A_{\alpha}(\mathbf{k})\right], \quad (2.15)$$

$$a_{\alpha}(\mathbf{k},t) = A_{\alpha}(\mathbf{k}) + \int d^3l \int d^3p\, A^{\dagger}_{\beta}(\mathbf{l}+\mathbf{p})A_{\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{p})A_{\alpha}(\mathbf{l})\cdot$$
$$\cdot F^{(1)}_A(t;\mathbf{p}\mid\mathbf{l},\mathbf{k}) + \ldots \Longrightarrow \ (\text{для } m=n) \quad (2.16)$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{A}^t_0\left[A_{\alpha}(\mathbf{k})\right] = A_{\alpha}(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3l \prod_{j=1}^{n}\left\{\int d^3q_j \int d^3p_j\right\}\cdot$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{n}\left\{A^{\dagger}_{\beta_j}(\mathbf{q}_j)\right\}\prod_{j=n}^{1}\left\{A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j)\right\}A_{\alpha}(\mathbf{l})\,Y^{(n)}_A(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}^n_1\,|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\,\mathbf{l}), \quad (2.17)$$

Здесь и далее считается, что порядок операторных сомножителей "слева на право" отвечает упорядочению в произведении "снизу вверх" . Условие $m = n$ в (2.17) означает полное отсутствие "флуктуационных членов", когда редуцированный гамильтониан (2.3), (2.4) коммутирует с оператором числа частиц:

$$\mathbf{N}_A \stackrel{def}{\equiv} \int d^3k A^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) A_\alpha(\mathbf{k}), \tag{2.18}$$

или другим аналогичным оператором заряда [76]. Из уравнений (2.14), (2.16) следует, что вакуум и одночастичное состояние остаются стабильными при всех t,

$$a_\alpha(\mathbf{k},t)\ |0\rangle \Longrightarrow A_\alpha(\mathbf{k})\ |0\rangle \equiv 0; \quad a^\dagger_\alpha(\mathbf{k},t)\ |0\rangle \Longrightarrow A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\ |0\rangle =|\ 1,\mathbf{k},\alpha\rangle; \tag{2.19}$$

$$\left[H\{a\},\, a^\dagger_\alpha(\mathbf{k},t)\right]\ |0\rangle \equiv e^{iHt-iE(k)t}\left[H\{A\},\, A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\right] e^{-iHt}\ |0\rangle = E(k)\, A^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\ |0\rangle.$$

Попрежнему настаивая на независимости от времени **оператора** полного гамильтониана (независимо от вида его операторной реализации и наличия высших флуктуационных членов), можно, как и выше (1.23), с помощью (2.13), (2.15) *формально определить* нормальное упорядочение одновременны́х гейзенберговских полей (ГП) непосредственно в гамильтониане. При этом, условия стабильности (2.19) гарантируют неизменность представления ККС (КАС) в процессе эволюции по времени t. Тогда соответствующий (2.3), (2.4) нормально упорядоченный гамильтониан вида (1.23) вновь будет корректно определять нелинейные члены в редуцированных гейзенберговских уравнениях (ГУ) (0.1):

$$\left(i\partial_t - E(\mathbf{P})\right)\Psi_\alpha(\mathbf{x},t) = \left[\Psi_\alpha(\mathbf{x},t)\,, H_I\{\Psi\}\right]. \tag{2.20}$$

$$i\partial_t a_\alpha(\mathbf{k},t) = \left[a_\alpha(\mathbf{k},t)\,, H_I\{a\}\right] \Longrightarrow \int d^3l\, Q_{(a)}(\mathbf{k},\mathbf{l};t)\, a_\alpha(\mathbf{l},t); \tag{2.21}$$

$$Q_{(a)}(\mathbf{k},\mathbf{l};t) \Longrightarrow \int d^3q \int d^3p\, a^\dagger_\beta(\mathbf{q},t)\, a_\beta(\mathbf{p},t)\, e^{it[E(k)+E(q)-E(p)-E(l)]}\ \cdot$$

$$\cdot\delta_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p}-\mathbf{l})\,\frac{2}{i}\,K^{\mathbf{l}+\mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{l}-\mathbf{p}}{2},\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}\right) + \ldots. \tag{2.22}$$

В случае (2.17) отсутствует поляризация не только вакуума и одночастичного, но и любого N-частичного состояния, и его стабильность и это динамическое отображение позволяют привести произведение N полей на вакууме к виду:

$$\langle 0 \mid \prod_{i=1}^{N} a_\alpha(\mathbf{k}_i, t) \longrightarrow \langle 0 \mid \sum \prod_{i=1}^{N} \int d^3 s_i \, A_\alpha(\mathbf{s}_i). \tag{2.23}$$

Если же флуктуационные члены в (2.4) имеются при $\min(m,n) \geq N_0 \geq 3$, то редукция (2.23) возможна, конечно, только для $N < N_0$. Тем не менее, при $m, n \geq 3$, уже для первой коэффициентной функции в (2.16)

$$Y_A^{(1)}(t; \mathbf{k}; \mathbf{q} \mid \mathbf{p}; \mathbf{l}) \equiv \delta_3(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p} - \mathbf{l}) \; F_A^{(1)}(t; \mathbf{p} - \mathbf{k} \mid \mathbf{l}, \mathbf{k}), \tag{2.24}$$

дословно повторяя рассуждения (1.62)-(1.65) предыдущей главы, из редуцированных ГУ (2.21) получаем *замкнутое* интегральное уравнение с тем же самым ядром (2.4), (2.12) [109] (с учетом (2.5) и (2.8)):

$$\begin{aligned} & F_A^{(1)}\left(t; -\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q} \Big| \frac{\mathcal{P}}{2} + \boldsymbol{\kappa}, \frac{\mathcal{P}}{2} + \mathbf{q}\right) \equiv F_A^{(1)}\left(t; \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{q} \Big| \frac{\mathcal{P}}{2} - \boldsymbol{\kappa}, \frac{\mathcal{P}}{2} - \mathbf{q}\right) = \\ & = \int_0^t d\eta \, e^{i\eta[E_2(\mathcal{P},q) - E_2(\mathcal{P},\kappa)]} \left[\frac{2}{i} K^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}) + \int d^3 r \, e^{i\eta[E_2(\mathcal{P},\kappa) - E_2(\mathcal{P},r)]} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{2}{i} K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \, F_A^{(1)}\left(\eta; \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{r} \Big| \frac{\mathcal{P}}{2} - \boldsymbol{\kappa}, \frac{\mathcal{P}}{2} - \mathbf{r}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Его решение содержит всю информацию о двухчастичном секторе, непосредственно определяя волновые функции и дискретного и непрерывного спектра:

$$\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_3(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q}) + F_A^{(1)*}\left(t = \mp\infty; \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{q} \Big| \frac{\mathcal{P}}{2} - \boldsymbol{\kappa}, \frac{\mathcal{P}}{2} - \mathbf{q}\right), \tag{2.26}$$

$$\text{при } E_2(\mathcal{P}, q) \to E_2(\mathcal{P}, q) \pm i\delta, \; \delta \to +0,$$

$$B^{\mathcal{P}}(\mathbf{k}) = \mathrm{res}\; \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})\big|_{E_2(\mathcal{P},q) = M_2(\mathcal{P})}. \tag{2.27}$$

Это позволяет использовать коэффициентные функции F, Y для решении задачи на собственные значения (2.7) и при наличии высших флуктуационных членов (2.4). Как и в (N, Θ)-модели, соотношение (2.26) вытекает из сравнения (2.25) при $t \to \infty$ со следующим выражением для состояний рассеяния (2.10):

$$| R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle =| R^{0}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle + \int d^3\kappa\, 2i\, K^{\mathcal{P}}(\mathbf{q},\boldsymbol{\kappa}) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\mp\infty} dt\; e^{-it(E_2(\mathcal{P},q)-E_2(\mathcal{P},\kappa)\pm i\delta)}\, a^{\dagger}_{\alpha}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\boldsymbol{\kappa},t)\, a^{\dagger}_{\beta}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},t)\ \ | \, 0\rangle, \quad (2.28)$$

которое получается из (2.9) с помощью (2.15) и стандартного представления

$$(E_2(\mathcal{P},q) \pm i\delta - H)^{-1} = i \int\limits_0^{\mp\infty} dt\; e^{it(H-E_2(\mathcal{P},q)\mp i\delta)}. \qquad (2.29)$$

Как и в предыдущем случае (1.100), формулы (2.15), (2.16) динамического отображения, с учетом условий стабильности (2.19), порождают две формы записи одновременны́х БС матричных элементов:

$$\langle 0 |\, a_{\alpha}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\boldsymbol{\kappa},t) a_{\beta}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},t) \mid 2,\mathcal{P}\rangle = e^{it(E_2(\mathcal{P},\kappa)-W_2(\mathcal{P}))}\chi^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}) = \quad (2.30)$$

$$= e^{it(E_2(\mathcal{P},\kappa)-W_2(\mathcal{P}))}\langle 0 |\, A_{\alpha}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\boldsymbol{\kappa}) A_{\beta}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa}) \mid 2,\mathcal{P}\rangle,$$

$$\chi^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa})\left[e^{it(E_2(\mathcal{P},\kappa)-W_2(\mathcal{P}))} - 1\right] = \qquad (2.31)$$

$$= \int d^3\mathrm{r}\, \chi^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})\, F^{(1)}_{A}\left(t;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{r}\,\Big|\, \frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}, \frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa}\right),$$

где собственное двухчастичное состояние полного гамильтониана $|\, 2,\mathcal{P}\rangle$ может быть либо связанным состоянием $|\mathrm{B}^{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}\rangle$ с $W_2(\mathcal{P}) = M_2(\mathcal{P})$, либо состоянием рассеяния $|\, R^{\pm}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle$ с $W_2(\mathcal{P}) = E_2(\mathcal{P},q)$, (2.7), (2.8), что приводит вновь к равенствам [109]:

$$\left.\begin{matrix} \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa})\left[e^{it(E_2(\mathcal{P},\kappa)-E_2(\mathcal{P},q))} - 1\right] \\ B^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\kappa})\left[e^{it(E_2(\mathcal{P},\kappa)-M_2(\mathcal{P}))} - 1\right] \end{matrix}\right\} = \int d^3\mathrm{r} \left\{\begin{matrix} \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{r}) \\ B^{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \end{matrix}\right\} \cdot$$

$$\cdot F^{(1)}_{A}\left(t;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{r}\,\Big|\, \frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}, \frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa}\right). \qquad (2.32)$$

Привлекая сюда лишь общие определения и свойства $\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa})$, $B^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\kappa})$ (1.38), (1.39), (1.46), (1.102), вновь приходим к соотношению (2.26) и к представвлению через двухчастичный проектор $\mathbf{\Pi}_2^{\mathcal{P}}$ в операторе Меллера:

$$\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{s}) + F_A^{(1)}\left(t;\mathbf{k}+\mathbf{s} \mid \frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{s}, \frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k}\right) = \tag{2.33}$$
$$= e^{it[E_2(\mathcal{P},k)-M_2(\mathcal{P})]}B^{\mathcal{P}}(\mathbf{k})B^{\mathcal{P}*}(\mathbf{s}) + \int d^3q e^{it[E_2(\mathcal{P},k)-E_2(\mathcal{P},q)]}\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})\Phi^{\pm *}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{s}) =$$
$$= \int d^3\mathcal{P}'' \int d^3\mathcal{P}' \langle R^0_{\alpha''\beta''}(\mathcal{P}'',\mathbf{k}) \mid e^{itH_0}\mathbf{\Pi}_2^{\mathcal{P}} e^{-itH} \mid R^0_{\alpha'\beta'}(\mathcal{P}',\mathbf{s})\rangle,$$

при $\alpha'' = \alpha' \neq \beta'' = \beta'$, аналогичному (1.105). Интегральные уравнения (2.12), (2.25) решаются точно для вырожденных ядер вида:

$$K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \sum_{n=1}^{m<\infty} V_n(\mathbf{r})\, U_n(\mathbf{s}). \tag{2.34}$$

2 Контактные четырехфермионные модели.

2.1 Диагонализация и физические поля.

В качестве примера возьмем модели локального четырехфермионного взаимодействия. Определим следующие величины: единичный антисимметричный тензор второго ранга $\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$, $\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}$, $\epsilon_{12} = 1$,

$$x = (\mathbf{x}, t), \quad t = x_0, \quad \mathbf{P} = -i\,\overrightarrow{\mathbf{\nabla}}_{\mathrm{x}}, \quad \mathbf{P}^{\dagger} = i\,\overleftarrow{\mathbf{\nabla}}_{\mathrm{x}}, \tag{2.35}$$
$$\overleftrightarrow{\mathbf{P}} = -i\left(\overrightarrow{\mathbf{\nabla}}_{\mathrm{x}} - \overleftarrow{\mathbf{\nabla}}_{\mathrm{x}}\right) = \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\dagger},$$
$$\chi_{\Psi}(x,y) = \epsilon_{\alpha\beta}\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(y); \quad \chi_{\Psi}(x) = \chi_{\Psi}(x,x) = \epsilon_{\alpha\beta}\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x);$$
$$S_{\Psi}(x) = \left(\Psi^{\dagger}_{\alpha}(x)\,\Psi_\alpha(x)\right); \quad \boldsymbol{J}_{\Psi}(x) = \left(\Psi^{\dagger}_{\alpha}(x)\overleftrightarrow{\mathbf{P}}\,\Psi_\alpha(x)\right). \tag{2.36}$$

Причем: $\Psi_\alpha(x)\,\Psi_\beta(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\,\chi_{\Psi}(x); \quad \epsilon_{\alpha\beta}\,\Psi_\alpha(x)\overleftrightarrow{\mathbf{P}}\,\Psi_\beta(x) = 0;$ (2.37)

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta}(x,y) \equiv \Psi_\alpha(x)\,\Psi_\beta(y) + \Psi_\alpha(y)\,\Psi_\beta(x) \Longrightarrow\Big|_{x_0=y_0} \epsilon_{\alpha\beta}\,\chi_{\Psi}(x,y),$$
$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta}(x,y)\Psi_\gamma(z) + \mathcal{Y}_{\alpha\beta}(y,z)\Psi_\gamma(x) + \mathcal{Y}_{\alpha\beta}(z,x)\Psi_\gamma(y)\Big|_{x_0=y_0=z_0} = \tag{2.38}$$
$$= \mathcal{Y}_{\alpha\beta}(x,y)\Psi_\gamma(z) + \mathcal{Y}_{\gamma\alpha}(x,y)\Psi_\beta(z) + \mathcal{Y}_{\beta\gamma}(x,y)\Psi_\alpha(z)\Big|_{x_0=y_0=z_0} \equiv 0;$$
$$S_{\Psi}(x)\,\Psi_\alpha(x) = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\,\Psi^{\dagger}_{\beta}(x)\,\chi_{\Psi}(x); \tag{2.39}$$

в силу антикоммутационных соотношений для полей $\Psi_\alpha(x)$:

$$\left\{\Psi_\alpha(x)\,,\Psi_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0} = 0; \quad \text{и соглашения:}$$

$$\left\{\Psi_\alpha(x)\,,\Psi^\dagger_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Longrightarrow\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \delta_{\alpha\beta}\,\frac{1}{V^*}, \tag{2.40}$$

(смотри Выводы в главе 1) которое, в частности, означает, что:

$$\Psi^\dagger_\alpha(x)\,S_\Psi(x)\,\Psi_\alpha(x) \equiv \frac{1}{2}\chi^\dagger_\Psi(x)\,\chi_\Psi(x) \Longrightarrow S_\Psi(x)\left(S_\Psi(x) - \frac{1}{V^*}\right). \tag{2.41}$$

Рассмотрим теперь контактные 4-х фермионные взаимодействия с плотностями, содержащими такие локальные скалярный и векторный токи:

$$\mathcal{H}_1(x) = \Psi^\dagger_\alpha(x)\,\mathcal{E}(\mathbf{P})\,\Psi_\alpha(x) - \frac{\lambda}{8}\chi^\dagger_\Psi(x)\chi_\Psi(x); \tag{2.42}$$

$$\mathcal{H}_2(x) = \Psi^\dagger_\alpha(x)\mathcal{E}(\mathbf{P})\Psi_\alpha(x) - \frac{\lambda}{4}\Big(S_\Psi(x)\Big)^2 + \frac{\mu}{4}\left(\boldsymbol{J}_\Psi(x)\right)^2 \Longrightarrow \tag{2.43}$$

$$:\mathcal{H}_2(x) := w_0 + \Psi^\dagger_\alpha(x)\,E(\mathbf{P})\,\Psi_\alpha(x) - \frac{\lambda}{8}\,\chi^\dagger_\Psi(x)\,\chi_\Psi(x) + \tag{2.44}$$

$$+\frac{\mu}{4}\,\Psi^\dagger_\alpha(x)\,\left(\boldsymbol{J}_\Psi(y)\cdot\,\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_{\mathrm{x}}\right)\Psi_\alpha(x)\Big|_{x=y},$$

Здесь $\mathcal{E}(k)$ является *произвольным* "голым" одночастичным спектром, а V^* можно придать смысл пространственного объема возбуждений, $E(k)$-(перенормированный) одночастичный спектр для физческих полей.

Взаимодействия (2.42), (2.43) приводят к диагонализованному гамильтониану (2.3), (2.4) в нормальной форме по гейзенберговским и/или физическим полям (2.44):

$$:\mathrm{H}_2\{\Psi(\mathbf{x},t)\} :\equiv \int d^3\mathrm{x} : \mathcal{H}_2(\mathbf{x},t) :\Rightarrow H\{A\} = \mathcal{V}w_0 + H_0\{A\} + H_I\{A\}, \tag{2.45}$$

с вырожденным ядром вида (2.34) и параметрами:

$$\frac{2}{i}K^{\mathcal{P}}(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \frac{i}{2(2\pi)^3}\left\{\lambda - \mu\mathcal{P}^2 + \mu\,(\mathbf{r}+\mathbf{s})^2\right\}; \tag{2.46}$$

$$E(k) \to E^{(\pm)}(k) = \frac{\mu}{4V^*}\left(k^2 + \ll k^2 \gg\right) + \frac{\lambda}{4V^*} \mp \left(\mathcal{E}(k) - \frac{\lambda}{2V^*}\right); \tag{2.47}$$

$$w_0 \to w_0^\pm = \frac{1\pm 1}{V^*}\left(\ll\mathcal{E}(k)\gg - \frac{\lambda}{2V^*}\right); \;\; \ll\mathcal{E}(k)\gg \stackrel{def}{=} V^*\int^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\mathcal{E}(k),$$

если операторная реализация, например, такова, что гейзенберговские поля при $t = t_0 = 0$ просто совпадают с физическими полями, что можно всегда осуществить, по крайней мере, двумя путями: [1]

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x},t) = e^{iHt}\,\Psi_\alpha(\mathbf{x},0)\,e^{-iHt} \Longrightarrow \mathcal{F}_0^t\left[\psi_\alpha(\mathbf{x},0)\right], \quad \text{где:}$$
$$\Psi_\alpha(\mathbf{x},0) = \Psi_\alpha\left[\psi_\alpha\left\{A(\mathbf{k})\right\}\right] \Rightarrow \begin{cases} -\epsilon_{\alpha\beta}\,\psi_\beta^\dagger(\mathbf{x},0); & (+),\;\; E(\mathbf{k}) \to E^{(+)}(\mathbf{k}) \\ \psi_\alpha(\mathbf{x},0); & (-),\;\; E(\mathbf{k}) \to E^{(-)}(\mathbf{k}) \end{cases}$$
$$\psi_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - iE(\mathbf{k})t} A_\alpha(\mathbf{k}) = e^{-itE(\mathbf{P})}\psi_\alpha(\mathbf{x},0). \tag{2.48}$$

Соответствующие ГУ (2.20), (2.21) для ГП:

$$\Psi_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - iE(k)t}\, a_\alpha(\mathbf{k},t), \tag{2.49}$$
$$(i\partial_t - E(\mathbf{P}))\;\; \Psi_\alpha(x) = \widehat{\mathrm{V}}_\Psi(t;\mathbf{x},\mathbf{P})\,\Psi_\alpha(x) \equiv \mathcal{J}_\alpha(x), \tag{2.50}$$
$$\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(t;\mathbf{x},\mathbf{P}) = -\frac{\lambda}{2} S_\Psi(x) + \mu\left[\left(\boldsymbol{J}_\Psi(x)\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{x}}\right) - \frac{i}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{J}_\Psi(x)\right)\right];$$
$$\text{где: } Q_{(a)}(\mathbf{k},\mathbf{l};t) = \int d^3\mathcal{P}\; a_\beta^\dagger(\mathcal{P}-\mathbf{k},t) a_\beta(\mathcal{P}-\mathbf{l},t)\, e^{it\left[E_2(\mathcal{P},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k}) - E_2(\mathcal{P},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{l})\right]}\,\cdot$$
$$\cdot\frac{2}{i} K^{\mathcal{P}}\left(\mathbf{l} - \frac{\mathcal{P}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathcal{P}}{2}\right), \;\; \text{– Фурье-образ} \;\; e^{itE(\mathbf{P})}\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(t;\mathbf{x},\mathbf{P})e^{-itE(\mathbf{P})},$$

(см. (B.2)), эквивалентны интегральному уравнению Янга-Фельдмана:

$$\Psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) + \int\limits_0^{x_0} dy_0 \int d^3\mathrm{y}\;\Delta_{\alpha\beta}(x-y)\;\mathcal{J}_\beta(y), \tag{2.51}$$

где возможны оба знака x_0 и введена перестановочная функция физических полей [79]:

$$\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = \left\{\psi_\alpha(x)\,,\psi_\beta^\dagger(y)\right\} = \delta_{\alpha\beta} e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})}\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \tag{2.52}$$
$$= \delta_{\alpha\beta} < \mathbf{x}|e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{P})}|\mathbf{y} >= \delta_{\alpha\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i(\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{k})}.$$

[1] В случае (+), в (2.44) предполагаются уже "правильные" гейзенберговские поля $\Psi \to \psi$, $\Psi^\dagger \to \psi^\dagger$.

В силу (2.19) причинный пропагатор гейзенберговских полей сводится к причинному пропагатору физических полей, который для реализации вида (2.48) совпадает с запаздывающей функцией Грина:

$$\Delta^{(C)}_{(\Psi)\alpha\beta}(x,y) \equiv \langle 0|\ \mathbf{T}\left(\Psi_\alpha(x)\,\Psi^\dagger_\beta(y)\right)|0\rangle \equiv \tag{2.53}$$

$$\equiv \theta(x_0-y_0)\langle 0\,|\,\Psi_\alpha(x)\Psi^\dagger_\beta(y)\,|\,0\rangle - \theta(y_0-x_0)\langle 0\,|\,\Psi^\dagger_\beta(y)\Psi_\alpha(x)\,|\,0\rangle$$

$$\Longrightarrow \Delta^{(C)}_{(\psi)\alpha\beta}(x-y) \equiv \langle 0\,|\,\mathbf{T}\Big(\psi_\alpha(x)\,\psi^\dagger_\beta(y)\Big)\,|\,0\rangle \Longrightarrow \Delta^{(R)}_{(\psi)\alpha\beta}(x-y) = \tag{2.54}$$

$$\theta(x_0-y_0)\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = i\delta_{\alpha\beta}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-i(k,(x-y))}\,\frac{1}{k_0-E(\mathbf{k})+i0}. \tag{2.55}$$

Как показано в приложении А, решение уравнения (2.25) с вырожденным ядром (2.46) для двухчастичного спектра общего вида (2.8) таково [107]:

$$F^{(1)}_A\left(t;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{q}\Big|\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{q}\right) = \int\limits_0^t d\eta\, e^{i\eta E_2(\mathcal{P},q)}\varepsilon(t)\int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)}\frac{d\sigma\, e^{\sigma\eta}}{\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)}$$

$$\cdot\left\{\frac{D^{\mathcal{P}}_{\kappa 1}(\sigma)+q^2D^{\mathcal{P}}_{\kappa 2}(\sigma)}{2(2\pi)^4D^{\mathcal{P}}_0(\sigma)} + \frac{\mu q^j}{(2\pi)^4}\left[\frac{\Pi^{jl}_\perp(\mathcal{P})}{1-2\mu \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_\delta(\sigma)} + \frac{\Pi^{jl}_\parallel(\mathcal{P})}{1-2\mu \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_D(\sigma)}\right]\kappa^l\right\}, \tag{2.56}$$

с проекторами: $\prod^{jl}_\perp(\mathcal{P}) = \left(\delta_{jl}-\dfrac{\mathcal{P}^j\mathcal{P}^l}{\mathcal{P}^2}\right)$, $\quad \prod^{jl}_\parallel(\mathcal{P}) = \dfrac{\mathcal{P}^j\mathcal{P}^l}{\mathcal{P}^2}$, (2.57)

и при $\mu=0$ сводится к следующему простому выражению:

$$\Longrightarrow \int\limits_0^t d\eta\, e^{i\eta E_2(\mathcal{P},q)}\,\frac{\varepsilon(t)}{2(2\pi)^4}\int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)}\frac{d\sigma\, e^{\sigma\eta}}{(\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa))}\cdot\frac{\lambda}{\left(1-\lambda\,\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_0(\sigma)\right)}. \tag{2.58}$$

Здесь $\varepsilon(\eta)=\varepsilon(t)\equiv \mathrm{sign}(t)$, $\Delta\to+0$, $\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_\delta(\sigma) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_1(\sigma)-\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_D(\sigma)\right]$,

$$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_n(\sigma)\\ \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_D(\sigma)\\ \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_{jl}(\sigma)\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{d^3r}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{E_2(\mathcal{P},r)-i\sigma}\cdot\left\{\begin{array}{c}\left(r^2\right)^n\\ \dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathcal{P})^2}{\mathcal{P}^2}\\ r^jr^l\end{array}\right. ; \tag{2.59}$$

$$\left.\begin{array}{c}D^{\mathcal{P}}_0(\sigma)\\ D^{\mathcal{P}}_{\kappa 1}(\sigma)\\ D^{\mathcal{P}}_{\kappa 2}(\sigma)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\left[\mu\,\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_1(\sigma)-1\right]^2-\mu^2\,\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_0(\sigma)\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_2(\sigma)-(\lambda-\mu\mathcal{P}^2)\,\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_0(\sigma)\\ \lambda-\mu\mathcal{P}^2+\mu\kappa^2+\mu^2\left[\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_2(\sigma)-\kappa^2\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_1(\sigma)\right].\\ \mu+\mu^2\left[\kappa^2\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_0(\sigma)-\mathrm{J}^{\mathcal{P}}_1(\sigma)\right]\end{array}\right. \tag{2.60}$$

Полагая $\sigma = \pm\delta - iE_2(\mathcal{P}, q)$, и обозначая

$$I^{\mathcal{P}\pm}_{\{...\}}(q) = \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_{\{...\}}\left(\pm\delta - iE_2(\mathcal{P}, q)\right), \quad \mathcal{D}^{\mathcal{P}\pm}_{\{...\}}(q) = D^{\mathcal{P}}_{\{...\}}\left(\pm\delta - iE_2(\mathcal{P}, q)\right), \tag{2.61}$$

из (2.12) или из (2.26), (2.56) с $\delta > \Delta$, $\delta \to +0$, для собственных функций рассеяния с фиксированной четностью (угловым моментом) $l = 0, 1$ и спином J=0,1, определенных в симметричном базисе (σ_j, $j = 1, 2, 3$ - обычные матрицы Паули (4.9)):

$(\delta_{\alpha\beta}, (\sigma_j)_{\alpha\beta}) \longrightarrow (\epsilon_{\alpha\beta}, \hat{\tau}^j_{\alpha\beta})$, $\epsilon_{\alpha\beta} = i(\sigma_2)_{\alpha\beta}$, $\hat{\tau}^j_{\alpha\beta} = \hat{\tau}^j_{\beta\alpha} = i(\sigma_2\sigma_j)_{\alpha\beta}$, как:

$$|\, l, \mathrm{J}, \mathrm{m}; \mathcal{P}, q\rangle^{\pm} = \int d^3\kappa\, \phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa})_{\alpha\beta}\ |\, R^0_{\alpha\beta}(\mathcal{P}, \boldsymbol{\kappa})\rangle, \tag{2.62}$$

$$\phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa})_{\alpha\beta} = \chi^{(\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta}\, \Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}),\ \phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa})_{\alpha\beta} = -\phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(-\boldsymbol{\kappa})_{\beta\alpha}, \tag{2.63}$$

$$\chi^{(0,0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\epsilon_{\alpha\beta};\quad \chi^{(1,\mathrm{m})}_{\alpha\beta} = \frac{i}{\sqrt{2}}\,\hat{\tau}^{(\mathrm{m})}_{\alpha\beta}, \tag{2.64}$$

$$\hat{\tau}^{(0)}_{\alpha\beta} = i\hat{\tau}^3_{\alpha\beta};\quad \hat{\tau}^{(\pm1)}_{\alpha\beta} = \frac{\pm i}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tau}^1_{\alpha\beta} \mp i\hat{\tau}^2_{\alpha\beta}\right); \tag{2.65}$$

получаем следующие выражения:

$$\Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\left[\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}) + (-1)^l\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(-\boldsymbol{\kappa})\right]; \tag{2.66}$$

$$\Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\left[\delta_3(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q}) + (-1)^l\delta_3(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{q}) + \frac{\mathcal{T}^{(l)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};\kappa)}{E_2(\mathcal{P},\kappa) - E_2(\mathcal{P},q) \mp i0}\right];$$

$$\mathcal{T}^{(0)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};k) = \mathcal{C}^{\mathcal{P}\pm}_1(q) + k^2\,\mathcal{C}^{\mathcal{P}\pm}_2(q) = \frac{\mathcal{D}^{\mathcal{P}\pm}_{q1}(q) + k^2\,\mathcal{D}^{\mathcal{P}\pm}_{q2}(q)}{(2\pi)^3\mathcal{D}^{\mathcal{P}\pm}_0(q)}, \tag{2.67}$$

$$\mathcal{T}^{(1)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};k) = \left(\mathbf{k}\cdot\mathcal{C}^{\mathcal{P}\pm}_3(q)\right) = \frac{2\mu}{(2\pi)^3}k^j\left\{\frac{\Pi^{jl}_{\perp}(\mathcal{P})}{1 - 2\mu I^{\mathcal{P}\pm}_{\delta}(q)} + \frac{\Pi^{jl}_{\parallel}(\mathcal{P})}{1 - 2\mu I^{\mathcal{P}\pm}_{D}(q)}\right\}q^l,$$

с проекторами (2.57). *Нормируемые* волновые функции *обычных* связанных состояний (но не голдстоуновской моды из гл.5) являются просто вычетами волновых функций рассеяния $\Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})$ в соответствующих полюсах:

$$i\sigma \Longrightarrow (E_2(\mathcal{P}, q) \pm i0) \Longrightarrow M^{(l)}_2(\mathcal{P}),\ \ q \Longrightarrow ib(\mathcal{P}), \tag{2.68}$$

$$D_0^{\mathcal{P}}(\sigma)=0;\quad 1-2\mu \mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)=0;\quad 1-2\mu \mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma)=0; \tag{2.69}$$

$$\Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})\to B^{\mathcal{P}(l)}(\mathbf{k})=Z^{(l)}(\mathcal{P},\mathbf{k})\left[E_2(\mathcal{P},k)-M_2^{(l)}(\mathcal{P})\right]^{-1}; \tag{2.70}$$

$$Z^{(0)}(\mathcal{P},\mathbf{k})=\mathrm{C}_1(\mathcal{P})+k^2\,\mathrm{C}_2(\mathcal{P});\quad Z^{(1)}_{\perp,\|}(\mathcal{P},\mathbf{k})=\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{C}_3^{\perp,\|}(\mathcal{P})\right);$$

$$\text{где:}\ \ \mathrm{C}_n(\mathcal{P})=\ \mathrm{res}\ \mathcal{C}_n^{\mathcal{P}\pm}(q)\big|_{E_2(\mathcal{P},q)=M_2(\mathcal{P})}. \tag{2.71}$$

$$\text{Для случая}\ \ \mu\to 0:\ \mathcal{C}_1^{\mathcal{P}\pm}(q)\to\frac{\lambda(2\pi)^{-3}}{\lambda I_0^{\mathcal{P}\pm}(q)-1},\ \ \mathcal{C}_{2,3}^{\mathcal{P}\pm}(q)\to 0. \tag{2.72}$$

Можно убедиться, что, как и в (N,Θ)-модели, полученные решения (2.56)-(2.70) автоматически удовлетворяют условиям (2.32).

2.2 Линеаризация гейзенберговских уравнений

Возвращаясь к ГУ, рассмотрим вытекающие из них уравнения для токов $S_\Psi(x)$ и $\boldsymbol{J}_\Psi(x)$, аналогичные (1.49). Пусть, с учетом (2.35),

$$\left[E(\mathbf{P})-E(\mathbf{P}^\dagger)\right]_{\hookrightarrow}S_\Psi(x)\equiv\Psi^\dagger_\alpha(x)\left[E(\mathbf{P})-E(\mathbf{P}^\dagger)\right]\Psi_\alpha(x),\ \text{тогда:}$$

$$\begin{aligned}
&i\partial_t S_\Psi(x)=\left[E(\mathbf{P})-E(\mathbf{P}^\dagger)\right]_{\hookrightarrow}S_\Psi(x)-i\mu\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}\cdot\left(\Psi^\dagger_\alpha(x)\boldsymbol{J}_\Psi(x)\Psi_\alpha(x)\right)=\\
&=\left[\mathcal{E}(\mathbf{P})-\mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger)\right]_{\hookrightarrow}S_\Psi(x)-i\mu\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}\cdot\{\boldsymbol{J}_\Psi(x)\,,S_\Psi(x)\}\right);
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
&i\partial_t J^l_\Psi(x)=\left[E(\mathbf{P})-E(\mathbf{P}^\dagger)\right]_{\hookrightarrow}J^l_\Psi(x)+i\lambda\Psi^\dagger_\alpha(x)\left(\nabla^l_{\mathrm{x}}S_\Psi(x)\right)\Psi_\alpha(x)-\\
&-\mu\left[\nabla_{\mathrm{x}}^{\{n}\left(\nabla_{\mathrm{z}}-\nabla_{\mathrm{y}}\right)^{l\}}+\nabla_{\mathrm{y}}^{[n}\nabla_{\mathrm{z}}^{l]}+\nabla_{\mathrm{z}}^{n}\nabla_{\mathrm{z}}^{l}-\nabla_{\mathrm{y}}^{n}\nabla_{\mathrm{y}}^{l}\right]\left(\Psi^\dagger_\alpha(y)J^n_\Psi(x)\Psi_\alpha(z)\right)\Big|_{x=y=z}\\
&=\left[\mathcal{E}(\mathbf{P})-\mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger)\right]_{\hookrightarrow}J^l_\Psi(x)+i\,\frac{\lambda}{2}\left\{\left(\nabla^l_{\mathrm{x}}S_\Psi(x)\right)\,,S_\Psi(x)\right\}-\\
&-i\,\frac{\mu}{2}\left[\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}\cdot\left\{\boldsymbol{J}_\Psi(x)\,,J^l_\Psi(x)\right\}\right)+\left\{\left(\nabla^l_{\mathrm{x}}\boldsymbol{J}_\Psi(x)\right)\cdot,\boldsymbol{J}_\Psi(x)\right\}\right].
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Для $E(\mathbf{P})=\omega(-\boldsymbol{\nabla}^2)$ и любой регулярной в $z=0$ функции $\omega(z)$ с током $S_\Psi(x)$ связан сохраняющийся заряд:

$$\mathcal{U}(t)=\int d^3\mathrm{x}S_\Psi(\mathbf{x},t),\ \ \partial_t\mathcal{U}(t)=-\mu\oint_{\Sigma_R}d\boldsymbol{\Sigma}\cdot\left(\Psi^\dagger_\alpha(x)\boldsymbol{J}_\Psi(x)\Psi_\alpha(x)\right)\xrightarrow{R\to\infty}0. \tag{2.75}$$

Причем, из (2.36) и (2.40) вытекает простое, но важное соотношение:

$$\left[S_\Psi(x)\,,\,S_\Psi(y)\right]\Big|_{x_0=y_0}=0\ \cdot\ \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\equiv 0. \tag{2.76}$$

Поэтому, случай $\mu = 0$ заслуживает отдельного рассмотрения. Согласно (2.41), нормальная форма (2.44) для $\mathcal{H}_2(x)$ (2.43) при $\mu = 0$ отличается от $\mathcal{H}_1(x)$ (2.42) только переопределением одночастичной и вакуумной энергии:

$$E(k) = \mathcal{E}(k) \longmapsto E^{(\pm)}(k) = \frac{\lambda}{4V^*} \mp \left(\mathcal{E}(k) - \frac{\lambda}{2V^*}\right), \qquad (2.77)$$
$$w_0 = 0 \longmapsto w_0^{\pm} = \frac{1 \pm 1}{V^*}\left(\ll\mathcal{E}(k)\gg - \frac{\lambda}{2V^*}\right).$$

Появление в (2.76) швингеровских членов возможно только если для какой либо операторной реализации (2.48) при $|\mathbf{k}| \to \infty$, имеются значения энергии обоих знаков, $E(\mathbf{k}) < 0$ и $E(\mathbf{k}) > 0$, т.е. если "дираковский подвал" содержит состояния со сколь угодно большим $|\mathbf{k}|$ [118], [119]. Этого легко избежать, потребовав монотонного возрастания функции $E(\mathbf{k})$, т.е. соответствующей монотонности $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ при достаточно больших $|\mathbf{k}|$.

Из (2.73) видно, что при $\mu = 0$ зависимость от времени оператора $S_\Psi(x)$ вновь, аналогично (1.49)–(1.51), определяется только кинетической (квадратичной) частью гамильтониана и динамическое отображение для него *в представлении физмческих полей* (2.48) оказывается тривиальным. Действительно, тогда из (2.73), например для случая $E^{(-)}(k)$, явствует:

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger) = E(\mathbf{P}) - E(\mathbf{P}^\dagger), \qquad (2.78)$$

что совместимо с определениями $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^\dagger$ (2.35) и $E(\mathbf{P})$ только если

$$E(\mathbf{P}) - \mathcal{E}(\mathbf{P}) = E(\mathbf{P}^\dagger) - \mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger) = const, \qquad (2.79)$$

в согласии с (2.77). Тогда (2.73) можно представить в виде:

$$i\partial_t S_\Psi(x) = [S_\Psi(x), \mathrm{H}_2\{\Psi\}] \Longrightarrow [S_\Psi(x), \mathrm{H}_0\{\Psi\}] = [S_\Psi(x), H_0\{\Psi\}], \quad (2.80)$$

поскольку, в силу (2.43), (2.76), $S_\Psi(x)$ "не чувствует" возникающую из (2.41) разницу на $S_\Psi(x)$ между плотностями H_0 и H_0, т.е. разницу на *эту* (бесконечную) константу (2.79) между $\mathcal{E}(k)$ и $E(k)$, что и позволяет выбрать последнюю в соответствии с последним уравнением (2.80). Но тогда *операторные* начальные условия (2.48) приводят к цепочке равенств:

$$S_{\Psi}(\mathbf{x},t) \equiv e^{i\mathrm{H}t}\, S_{\Psi}(\mathbf{x},0)\, e^{-i\mathrm{H}t} \Longrightarrow e^{i\mathrm{H}_0 t}\, S_{\Psi}(\mathbf{x},0)\, e^{-i\mathrm{H}_0 t} \Longrightarrow \tag{2.81}$$
$$\Longrightarrow e^{iH_0 t}\, S_{\Psi}(\mathbf{x},0)\, e^{-iH_0 t} \Longrightarrow e^{iH_0 t}\, S_{\psi}(\mathbf{x},0)\, e^{-iH_0 t} \equiv S_{\psi}(\mathbf{x},t).$$

Следовательно, ГУ (2.21), (2.50), (2.51) становятся *линейными* по отношению к ГП $\Psi_\alpha(\mathbf{x},t)$:

$$(i\partial_t - E(\mathbf{P}))\, \Psi_\alpha(\mathbf{x},t) = -\frac{\lambda}{2} S_{\Psi}(\mathbf{x},t)\, \Psi_\alpha(\mathbf{x},t) \Longrightarrow -\frac{\lambda}{2} S_{\psi}(\mathbf{x},t)\, \Psi_\alpha(\mathbf{x},t), \tag{2.82}$$

а их решение приводит, аналогично (1.55), (1.58), к *явному*, хотя и формальному выражению для ГП в терминах физических полей в виде T-упорядоченной экспоненты [107], [109] при $t > 0$:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}\left(\exp\left\{i\int_0^t d\eta \left[\frac{\lambda}{2} S_{\psi}(\mathbf{x},\eta) - E(\mathbf{P})\right]\right\}\right) \psi_\alpha(\mathbf{x},0) = \tag{2.83}$$
$$= e^{-itE(\mathbf{P})}\mathbf{T}\left(\exp\left\{i\,\frac{\lambda}{2}\int_0^t d\eta\, e^{i\eta E(\mathbf{P})}\, S_{\psi}(\mathbf{x},\eta)\, e^{-i\eta E(\mathbf{P})}\right\}\right) \psi_\alpha(\mathbf{x},0) =$$
$$= e^{-itE(\mathbf{P})}\mathbf{T}\left(\exp\left\{i\,\frac{\lambda}{2}\int_0^t d\eta\, S_{\psi}\left(\mathbf{x} + \eta\mathbf{v}(\mathbf{P}),\eta\right)\right\}\right) \psi_\alpha(\mathbf{x},0). \tag{2.84}$$

Здесь $\mathbf{P}$ – оператор дифференцирования из (2.35), а $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p})$, т.е. является соответствующей групповой скоростью (В.3). Символ T-упорядочения относится как к операторам физических полей, так и к некоммутирующим между собой операторам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, и *не может быть опущен* даже если заменить оператор $S_{\psi}(\mathbf{x},\eta)$ классическим внешним полем (см. главу 3). Разумеется, при $t > 0$ оператор $\psi_\alpha(\mathbf{x},0)$ можно внести под знак T-произведения. Окончательный вид динамического отображения ГП (2.17) определяется приведением этого символического решения

(2.83) к нормальной форме по физическим полям. Представляется затруднительным получить такое решение в терминах in-полей, особенно при наличии связанных состояний, вполне допустимых в этой модели, как показано в главах 5, 6 и в [110], [113].

3 Высшие коэффициентные функции.

3.1 Приведение к нормальной форме.

Проблему приведения к нормальной форме формальных решений (1.55), (2.83) линеаризованных уравнений (1.54) и (2.82) для обеих моделей можно свести к одной и той же системе *линейных* уравнений. Выпишем, например, явный вид динамического отображения $\mathcal{O}_0^t$, – нормальной формы решения (1.55) для бозонного поля:

$$o(\mathbf{k},t) \equiv \mathcal{O}_0^t[\Theta(k),N(k)] = \Theta(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3l \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int d^3q_j \int d^3p_j \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\{ N^\dagger(\mathbf{q}_j) \right\} \prod_{j=n}^{1} \left\{ N(\mathbf{p}_j) \right\} \Theta(\mathbf{l})\, Y_N^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l}). \tag{2.85}$$

Как и ранее, здесь и далее считается, что порядок операторных сомножителей "слева на право" отвечает упорядочению "снизу вверх" в бесконечном произведении, а также, что

$$< \mathbf{k}|\widehat{K}_N(\eta)|\mathbf{l} > \equiv \mathcal{K}_N(\mathbf{k},\mathbf{l};\eta) = \int d^3q \int d^3p\, N^\dagger(\mathbf{q})\, N(\mathbf{p})\, \mathcal{X}_N(\eta;\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\mathbf{p},\mathbf{l}), \tag{2.86}$$

$$\mathcal{X}_N(\eta;\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\mathbf{p},\mathbf{l}) = -i\lambda\tilde{\alpha}(\mathbf{k})\tilde{\alpha}(-\mathbf{l})e^{i\eta[\omega(k)+m(q)-m(p)-\omega(l)]}\delta_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p}-\mathbf{l}).$$

Нормальная форма фермионного решения (2.83) имеет вид (2.17):

$$a_\alpha(\mathbf{k},t) \equiv \mathcal{A}_0^t\,[A_\alpha(\mathbf{k})] = A_\alpha(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3l \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int d^3q_j \int d^3p_j \right\} \cdot \tag{2.87}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\{ A^\dagger_{\beta_j}(\mathbf{q}_j) \right\} \prod_{j=n}^{1} \left\{ A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j) \right\} A_\alpha(\mathbf{l})\, Y_A^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\,\mathbf{l}),$$

а, в силу (2.49), (2.50) и (2.82), уравнение (2.51), в соответствии с (1.54), (1.55), дает:

$$a_\alpha(\mathbf{k},t) = A_\alpha(\mathbf{k}) + \int_0^t d\eta \int d^3l \, Q_{(A)}(\mathbf{k},\mathbf{l};\eta)\, a_\alpha(\mathbf{l},\eta) =$$

$$= \int d^3l < \mathbf{k}|\mathrm{T}\exp\left[\int_0^t d\eta \widehat{K}_A(\eta)\right]|\mathbf{l}> \ A_\alpha(\mathbf{l}); \tag{2.88}$$

$$< \mathbf{k}|\widehat{K}_A(\eta)|\mathbf{l} >\equiv Q_{(A)}(\mathbf{k},\mathbf{l};\eta) = \int d^3q \int d^3p \, A^\dagger_\beta(\mathbf{q})\, A_\beta(\mathbf{p})\, \mathcal{X}_A(\eta;\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\mathbf{p},\mathbf{l});$$

$$\mathcal{X}_A(\eta;\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\mathbf{p},\mathbf{l}) = \frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}\, e^{i\eta[E(\mathbf{k})+E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})-E(\mathbf{l})]}\,\delta_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p}-\mathbf{l}). \tag{2.89}$$

В силу коммутационных соотношений для ферми-полей, функции $Y^{(n)}$ в обоих случаях должны быть симметричны относительно произвольной, но одновременной и одинаковой перестановки $\{\mathbf{q}_j\}_1^n$, и $\{\mathbf{p}_j\}_n^1$, так как именно такая симметрия выделяется при интегрировании. Уравнения (1.54) и (2.88) приводят к одинаковым рекурентным уравнениям на $Y^{(n)}$:

$$Y^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\mathbf{l}) = \int_0^t d\eta \int d^3\kappa \int d^3s \sum_{\nu=1}^n \mathcal{X}(\eta;\mathbf{k},\mathbf{q}_\nu\,|\mathbf{s},\boldsymbol{\kappa}) \cdot$$

$$\cdot\Big\{\delta_3(\mathbf{s}-\mathbf{p}_\nu)\,\frac{1}{n}\,Y^{(n-1)}(\eta;\boldsymbol{\kappa};\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}^1_{n=j\neq\nu};\mathbf{l}) +$$

$$+Y^{(n)}(\eta;\boldsymbol{\kappa};\{\mathbf{q}_j\}_1^{\nu-1},\mathbf{s},\{\mathbf{q}_j\}^n_{\nu+1}|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l})\Big\}. \tag{2.90}$$

При $n=1$ здесь нужно заменить $Y^{(n-1)} \to Y^{(0)}(t;\mathbf{k}|\mathbf{l}) = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{l})$. Решение этих уравнений должно, таким образом, иметь вид:

$$Y_N^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l}) = \delta_3\left(\mathbf{k}-\mathbf{l}+\sum_{j=1}^n(\mathbf{q}_j-\mathbf{p}_j)\right)\ \tilde{\alpha}(\mathbf{k})\tilde{\alpha}(-\mathbf{l})\int_0^t d\eta \,\cdot$$

$$\cdot e^{i\eta\omega(k)}\ \sum_{\nu=1}^n e^{i\eta m(q_\nu)}\,\mathcal{F}_N^{(n)}(\eta;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l}), \tag{2.91}$$

$$Y_A^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l}) = \delta_3\left(\mathbf{k}-\mathbf{l}+\sum_{j=1}^n(\mathbf{q}_j-\mathbf{p}_j)\right)\int_0^t d\eta\, e^{i\eta E(k)}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=1}^n e^{i\eta E(q_\nu)}\,\mathcal{F}_A^{(n)}(\eta;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1\,;\mathbf{l}), \tag{2.92}$$

где:

$$\mathcal{F}^{(n)}_{A,N}(t;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\mathbf{l}) = \frac{\varepsilon(t)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma e^{\sigma t} f^{(n)}_{A,N}(\sigma;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\mathbf{l}), \tag{2.93}$$

$$f^{(n)}_{A,N}(\sigma;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\mathbf{l}) = \int\limits_0^\infty dt e^{-\sigma t}\mathcal{F}^{(n)}_{A,N}(t;\{\mathbf{q}_j\}^n_{1=j\neq\nu}|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\mathbf{l}),$$

а в случае (N,Θ) модели коэффициентные функции (2.91) для бозонного поля должны обладать еще антисимметрией по перестановке $\mathbf{q}_j$ и $\mathbf{p}_j$ независимо. Получающиеся отсюда уравнения могут быть решены явно при $n=1$. В частности, для лапласовских прообразов, в согласии с (1.106), (1.107) и (2.24), (2.58) находим:

$$f^{(1)}_N(\sigma;\mathbf{p};\mathbf{l}) = \frac{\lambda}{i}\frac{1}{\left(1-\mathcal{J}^{\mathbf{l}+\mathbf{p}}_N(\sigma)\right)[\sigma+i\{m(\mathbf{p})+\omega(\mathbf{l})\}]}, \tag{2.94}$$

$$f^{(1)}_A(\sigma;\mathbf{p};\mathbf{l}) = \frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\left(1-\mathcal{J}^{\mathbf{l}+\mathbf{p}}_A(\sigma)\right)[\sigma+i\{E(\mathbf{p})+E(\mathbf{l})\}]},$$

где, в соответствии с определениями (2.59), (1.108):

$$\mathcal{J}^{\mathcal{P}}_A(\sigma) = \frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3\kappa}{\sigma+i[E(\boldsymbol{\kappa})+E(\mathcal{P}-\boldsymbol{\kappa})]} \equiv \frac{\lambda}{2}\int\frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\frac{1}{[E^{\mathcal{P}}_\kappa-i\sigma]} = \tag{2.95}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int\frac{d^3r}{(2\pi)^3}\frac{1}{[E_2(\mathcal{P},r)-i\sigma]} \equiv \lambda \mathrm{J}^{\mathcal{P}}_0(\sigma),$$

$$\mathcal{J}^{\mathcal{P}}_N(\sigma) = \frac{\lambda}{i}\int\frac{d^3\kappa\mid\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\kappa})\mid^2}{\sigma+i[\omega(\boldsymbol{\kappa})+m(\mathcal{P}-\boldsymbol{\kappa})]} = -\lambda\int\frac{d^3\kappa\mid\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\kappa})\mid^2}{[E^{\mathcal{P}}_\kappa-i\sigma]} \equiv -\lambda I^{\mathcal{P}}_0(\sigma),$$

$$\text{то есть : } E^{\mathcal{P}}_\kappa = \left\{\begin{array}{c} E(\boldsymbol{\kappa})+E(\mathcal{P}-\boldsymbol{\kappa}) \\ \omega(\boldsymbol{\kappa})+m(\mathcal{P}-\boldsymbol{\kappa})\end{array}\right\} \text{ соответственно.} \tag{2.96}$$

Подчеркнем, что решения (2.94) были получены ранее *без использования* линеаризации ГУ, так как уравнения (2.90) на $Y^{(1)}$ (2.24) и $F^{(1)}$ (2.25) от нее ни как не зависят.

При $n = 2$ уравнение (2.90) сводится к уравнению Фредгольма с невырожденным ядром, которое отвечает уже трехчастичной задаче, а соответственно n-ая коэффициентная функция описывает сектор с $n+1$ частицами.

3.2 Производящий функционал.

Бесконечная система уравнений (2.90) для коэффициентных функций нормальной формы обеих моделей может быть записана в виде одного интегро-дифференциального функционального уравнения для их производящего функционала от классического билокального источника $\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})$:

$$\mathcal{Z}\left(t;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\left\{\int d^3q_j\int d^3p_j\;\phi(\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j)\right\}Y^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\mathbf{l}), \tag{2.97}$$

$$Y^{(n)}(t;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\mathbf{l}) = \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j)}\right\}\mathcal{Z}\left(t;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right)\Big|_{\phi=0}, \tag{2.98}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Z}\left(t;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right) = \int d^3q\int d^3p\,\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})\int d^3\kappa\int d^3s\,\mathcal{X}(t;\mathbf{k},\mathbf{q}|\mathbf{s},\boldsymbol{\kappa})\,\cdot \tag{2.99}$$

$$\cdot\left[\delta_3(\mathbf{s}-\mathbf{p}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{s}|\mathbf{p})}\right]\mathcal{Z}\left(t;\boldsymbol{\kappa},\mathbf{l},[\phi]\right), \quad \text{с начальным условием:}$$

$$\mathcal{Z}\left(0;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right) = Y^{(0)}(0;\mathbf{k}|\mathbf{l}) = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{l}) = <\mathbf{k}|\mathbf{l}>. \tag{2.100}$$

Поскольку здесь, по определению:

$$\frac{\delta\phi(\mathbf{k}|\mathbf{l})}{\delta\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})} = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_3(\mathbf{l}-\mathbf{p}), \text{то размерности } \phi(\mathbf{q}|\mathbf{p}) \text{ и } \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})} \tag{2.101}$$

совпадают с размерностью $\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$.

Ядра $\mathcal{X}_N$, $\mathcal{X}_A$ (2.86),(2.89), с учетом (2.96), представляются через операторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X}$ (B.1), (B.3), например, в виде:

$$e^{it[E(\mathbf{k})+E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})-E(\boldsymbol{\kappa})]}\,\delta_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p}-\boldsymbol{\kappa}) =$$

$$= <\mathbf{k}|e^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}}e^{it\left[E_q^{\mathbf{P}}-E_p^{\mathbf{P}}\right]}e^{i\mathbf{p}\mathbf{X}}|\boldsymbol{\kappa}> = \tag{2.102}$$

$$= e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})]} < \mathbf{k}|e^{itE(\mathbf{P})}e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{X}}e^{-itE(\mathbf{P})}|\boldsymbol{\kappa}>= \tag{2.103}$$

$$= e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})]} < \mathbf{k}|e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{Q}(t)}|\boldsymbol{\kappa}>, \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{X} + t\mathbf{v}(\mathbf{P}), \tag{2.104}$$

что вместе с условием (2.100) подсказывает искать решение (2.99) в виде матричного элемента оператора

$$\mathcal{Z}\left(t;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right) =< \mathbf{k}|\mathbf{Z}\left(t,[\phi]\right)|\mathbf{l}> . \tag{2.105}$$

$$\text{Полагая:}\quad \Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})]}e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{X}}, \tag{2.106}$$

$$\text{имеем:}\quad \frac{d}{dt}\mathbf{Z}\left(t,[\phi]\right) = \frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}e^{itE(\mathbf{P})}\int d^3q\int d^3p\,\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p})\,\cdot \tag{2.107}$$

$$\cdot\left[1+\int d^3s\frac{\delta}{\delta\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{s}|\mathbf{p})}\right]e^{-itE(\mathbf{P})}\mathbf{Z}\left(t,[\phi]\right).$$

Здесь, аналогично (2.84), можно перейти от $\mathbf{X}$ к некоммутирующим при разных временах операторам $\mathbf{Q}(t)$. Как всегда, при использовании билокальных источников [120]-[122], происходит существенное понижение порядка функциональных производных в (2.98), а уравнение (2.107) выглядит проще обычных уравнений для производящего функционала коэффициентных функций нормальной формы S-матрицы для этого же взаимодействия [123]. Его решение также может быть представлено в виде формальной T-упорядоченной экспоненты ($\mathbf{I}$- единичный оператор):

$$\mathbf{Z}_A\left(T,[\phi]\right) = e^{iTE(\mathbf{P})}\mathbf{T}\exp\left\{i\int_0^T dt\left[-E(\mathbf{P})+\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\quad\cdot\right.\right. \tag{2.108}$$

$$\left.\left.\cdot\int d^3q\int d^3p\;\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p})\left(1+\int d^3s\frac{\delta}{\delta\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{s}|\mathbf{p})}\right)\right]\right\}\mathbf{I},$$

$$\tilde{\alpha}^*(\mathbf{P})\mathbf{Z}_N\left(T,[\phi]\right) = e^{iT\omega(\mathbf{P})}\mathbf{T}\exp\left\{-i\int_0^T dt\left[\omega(\mathbf{P})+\lambda|\tilde{\alpha}(\mathbf{P})|^2\int d^3q\quad\cdot\right.\right. \tag{2.109}$$

$$\left.\left.\cdot\int d^3p\,\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})\int d^3s e^{it[m(\mathbf{q})-m(\mathbf{s})]}e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{s})\mathbf{X}}\left(\delta_3(\mathbf{s}-\mathbf{p})+\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{s}|\mathbf{p})}\right)\right]\right\}\tilde{\alpha}^*(\mathbf{P}).$$

В следующей главе выражения для коэффициентных функций и их производящего функционала получены в виде функциональных интегралов от функционалов определяемых по решению одного одномерного вольтерровского интегрального уравнения.

4 Выводы.

Таким образом, метод динамических отображений на шредингеровские поля примени́м к различным полевым взаимодействиям четвертой степени. Процедуры линеаризации гейзенберговских уравнений и приведения их решений к нормальной форме, а также вид и смысл соответствующих коэффициентных функций оказываются единообразными для моделей с одинаковой структурой элементарной вершины взаимодействия при условии его четности по фермионным полям. В частности коэффициентная функция $F^{(1)}$ при *трех* операторах попрежнему содержит всю информацию о двухчастичном секторе, включая волновые функции рассеяния и связанных состояний, и попрежнему удовлетворяет содержащему их нелинейному соотношению (унитарности). Построение производящего функционала коэффициентных функций динамического отображения, суть нормальной формы гейзенберговского оператора, при этом заметно упрощается путем введения классических билокальных источников. Решение соответствующего интегро-дифференциального уравнения также может быть записано в виде T-упорядоченной экспоненты, не содержащей, однако, никаких полевых операторов. В следующей главе оно будет получено в более явном виде функционального интеграла по фазовому пространству.

Глава 3

Функциональные представления и релятивистские модели.

В этой главе процедура линеаризации ГУ применяется для получения решений релятивистских четырехфермионных моделей в $D = 3 + 1$. Сама возможность получения представлений вида (2.83) в релятивистском случае не кажется бесполезной, т.к., аналогично решению 2D-моделей Тирринга и Швингера она дает операторное выражение для гейзенберговского поля в произвольный момент времени $t = T$ через операторы *физических полей* в предыдущие моменты, начиная с $t = 0$, *независимо* от их интерпретации в терминах операторов рождения и уничтожения частиц, что позволяет, в определенном смысле, отделить проблему построения динамики от проблемы (вторичного) квантования. Последняя непосредственно связана с процедурой приведения решения к нормальной форме, – задачей, решаемой в общем виде с помощью теоремы Вика с привлечением техники функционального интегрирования [79], [99], [124]. В первом параграфе выводятся общие условия линеаризации ГУ для релятивистских моделей четырехфермионного взаимодействия и формальные решения этих уравнений. Во втором параграфе эти решения приводятся к нормальной форме с использованием функциональных методов.

1 Условия линеаризации.

Рассмотрим условия линеаризации для четырехфермионного гамильтониана вида: $x = (\mathbf{x}, x_0)$, $\gamma^\nu = (\boldsymbol{\gamma}, \gamma^0)$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$- матрицы Дирака,

$$\mathrm{H}_{[\Psi]}(t) = \int d^3\mathrm{x} \left\{ \left(\Psi^{\dagger a}(x) \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) \Psi^a(x) \right) + \frac{1}{2} \sum_A \left(S^A_\Psi(x) \right)^2 \right\} \equiv \mathrm{H}_{0[\Psi]} + \mathrm{H}_{I[\Psi]}, \quad (3.1)$$

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{[\Psi,B]}(t) = \int d^3\mathrm{x} \left\{ \left(\Psi^{\dagger a}(x)\, \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P})\, \Psi^a(x) \right) + \sum_A \left(S^A_\Psi(x) B^A(x) \right) \right\}, \quad \text{где:} \quad (3.2)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{P}) + \gamma^0 m_0, \;\; \widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \;\; S^A_\Psi(x) = \left(\Psi^{\dagger a}_\alpha(x) \left(\widehat{O}^A \right)^{ab}_{\alpha\beta} \Psi^b_\beta(x) \right), \quad (3.3)$$

$$\left\{ \Psi^a_\alpha(x)\,, \Psi^b_\beta(y) \right\}\Big|_{x_0=y_0} = 0, \;\; \left\{ \Psi^a_\alpha(x)\,, \Psi^{\dagger b}_\beta(y) \right\}\Big|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab}\, \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.4)$$

$\Psi^a_\alpha(x)$– биспинор с лоренцевым индексом α и индексом внутренней симметрии a, $\overline{\Psi}^a_\alpha(x) = \left(\Psi^{\dagger a}(x) \gamma^0 \right)_\alpha$, $\widehat{O}^A$– некоторые матрицы по этим индексам, $x_0 = t$ и попрежнему $\delta_3(\mathbf{x} = 0) \longmapsto 1/V^*$ в (3.4). Для сравнения параллельно выписывается взаимодействие (3.2) с внешним полем $B^A(x)$. Из (3.1)-(3.4) вытекают формальные уравнения Гейзенберга:

$$i\partial_t \Psi^a_\alpha(x) = \left[\Psi^a_\alpha(x)\,, \mathrm{H}_{[\Psi]}(t) \right] = \left(\left[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x) \right] \Psi(x) \right)^a_\alpha, \;\; \mathbf{P} = -i\, \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{x}}, \quad (3.5)$$

$$-i\partial_t \Psi^{\dagger a}_\alpha(x) = \left(\Psi^\dagger(x) [\hat{\mathcal{E}}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) + \widehat{\mathrm{V}}^\dagger_\Psi(x)] \right)^a_\alpha, \;\; \text{где:} \;\; \mathbf{P}^\dagger = i\, \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{x}}, \quad (3.6)$$

$$\text{и т.к. } \mathrm{H}^\dagger_{0,I} = \mathrm{H}_{0,I}, \text{ то } (\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}))^\dagger = \hat{\mathcal{E}}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) \Longrightarrow \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger), \;\; \left(\widehat{O}^A \right)^\dagger = \pm\, \widehat{O}^A, \quad (3.7)$$

$$\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x) = \widehat{\mathrm{V}}^\dagger_\Psi(x) = \sum_A S^A_\Psi(x)\, \widehat{O}^A, \;\; \widetilde{\mathrm{V}}_B(x) = \widetilde{\mathrm{V}}^\dagger_B(x) = \sum_A B^A(x)\, \widehat{O}^A, \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{P}) + \gamma^0 m_0 + \widehat{\mu_0} = \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) + \widehat{\mu_0}, \;\; \widehat{\mu_0} = \frac{1}{V^*} \sum_A \left(\widehat{O}^A \right)^2. \quad (3.9)$$

Здесь $\dagger$ означает либо матричное эрмитово сопряжение, либо (3.6) для оператора $\mathbf{P}$. Аналогично (2.73), (2.76), отсюда находим уравнение движения для гейзенберговского "тока":

$$i\partial_t \widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x) = \sum_A \left\{ \left(\Psi^\dagger(x) \left[\widehat{O}^A \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) - \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger) \widehat{O}^A \right] \Psi(x) \right) + \right. \quad (3.10)$$

$$\left. + \left(\Psi^\dagger(x) \left[\widehat{O}^A \widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x) - \widehat{\mathrm{V}}^\dagger_\Psi(x) \widehat{O}^A \right] \Psi(x) \right) \right\} \left(\widehat{O}^A \right) \equiv \left[\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x)\,, \mathrm{H}_{[\Psi]}(t) \right] \quad (3.11)$$

$$= \left[\widehat{\mathrm{V}}_{\Psi}(x)\,,\mathrm{H}_{0[\Psi]}(t)\right] + \left[\widehat{\mathrm{V}}_{\Psi}(x)\,,\mathrm{H}_{I[\Psi]}(t)\right] \Longrightarrow \left[\widehat{\mathrm{V}}_{\Psi}(x)\,,H_{0[\Psi]}(t)\right], \tag{3.12}$$

тогда необходимо, чтобы
$$\sum_A \sum_B \left(\widehat{O}^B\right)\left[\widehat{O}^A\,,\widehat{O}^B\right]\left(\widehat{O}^A\right) = 0, \tag{3.13}$$

или:
$$\left[\widehat{O}^A\,,\widehat{O}^B\right] = 0, \quad \text{то есть} \quad \left[S^A_\Psi(x)\,,S^B_\Psi(y)\right]\Big|_{x_0=y_0} = 0, \tag{3.14}$$

где круглые скобки ограничивают действие матричного умножения. Условия (3.13), (3.14) удовлетворяются любым набором коммутирующих между собой матриц $\widehat{O}^A$. Например, для единственной матрицы $\widehat{O}^A \longmapsto \widehat{O}$:

(I) выбор $\widehat{O} = \sqrt{\lambda}\gamma^0 \otimes I$ отвечает варианту модели Гросса-Невье [125];

(II) выбор $\widehat{O} = \sqrt{\lambda}\gamma^0\gamma^5 \otimes I$, – варианту модели Намбу-Йона-Лазинио [5];

(III) выбор $\widehat{O} = \sqrt{\lambda}\gamma^0\gamma^\nu\epsilon_\nu(c_V + c_A\gamma^5) \otimes I$, $\gamma^\nu\epsilon_\nu = \gamma^0\epsilon_0 - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\epsilon}$, $\epsilon^2 = 1$, или

(IV) набор $\widehat{O}^{(V)} = \sqrt{\lambda_V}\gamma^0\gamma^\nu\epsilon_\nu \otimes I$, $\widehat{O}^{(A)} = \sqrt{\lambda_A}\gamma^0\gamma^5\gamma^\nu\epsilon_\nu \otimes I$ из двух коммутирующих матриц отвечает вариантам одновременно́й релятивистской потенциальной модели В.Н. Первушина [47]-[60] с δ- потенциалом парного взаимодействия, ϵ_ν- вектор Маркова-Юкавы.

При условиях (3.13), (3.14) вклад вторых слагаемых в уравнениях (3.10)–(3.11), (3.12) исчезает и эволюция оператора $\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(x)$ определяется только одночастичным (квадратичным) гамильтонианом, вообще говоря, *с новым* кинетическим членом $\widehat{E}(\mathbf{P})$, введенным в правой части (3.12) так, чтобы:

$$\sum_A \left[\widehat{O}^A \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) - \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger)\widehat{O}^A\right] = \sum_A \left[\widehat{O}^A \widehat{E}(\mathbf{P}) - \widehat{E}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger)\widehat{O}^A\right]. \tag{3.15}$$

Повторяя для (3.10)–(3.15) рассуждения (2.78)–(2.82), вновь приходим, казалось бы, к выводу о тривиальности динамического отображения этого оператора в представлении *соответствующих* физических полей

$$\left\{\psi^a_\alpha(x)\,,\psi^b_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0} = 0, \quad \left\{\psi^a_\alpha(x)\,,\psi^{\dagger b}_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}\,\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.16}$$

$$\psi^a_\alpha(x)=\psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)=e^{itH_0}\psi^a_\alpha(\mathbf{x},0)e^{-itH_0}=\left(e^{-it\widehat{E}(\mathbf{P})}\psi^a(\mathbf{x},0)\right)_\alpha, \tag{3.17}$$

$$\widehat{\mathrm{V}}_\Psi(\mathbf{x},t)\Longrightarrow\widehat{\mathrm{V}}_\psi(\mathbf{x},t),\ H_{0[\psi]}(t)=\int d^3\mathrm{x}\left(\psi^{\dagger a}(x)\widehat{E}(\mathbf{P})\psi^a(x)\right)=H_{0[\psi]}(0), \tag{3.18}$$

$$\text{где: } \widehat{E}(\mathbf{P})=\hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P})+\widehat{\mu_0}+\widehat{\mathcal{M}}\equiv\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})+\widehat{\mathcal{M}},\ \ \widehat{\mathcal{M}}^\dagger=\widehat{\mathcal{M}}, \tag{3.19}$$

$$\text{откуда: } \sum_A\left[\widehat{O}^A,\widehat{\mathcal{M}}\right]=0,\ \ \left(\widehat{E}(\mathbf{P})\right)^\dagger=\widehat{E}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger)\Longrightarrow\widehat{E}(\mathbf{P}^\dagger). \tag{3.20}$$

При этих условиях неизвестная "перенормировка массы" $\widehat{\mathcal{M}}$ физического поля $\psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)$ также сокращается в разности (3.15). Однако, хотя $\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})$ (3.9) удовлетворяет им автоматически, у нас нет оснований приравнивать ее $\widehat{E}(\mathbf{P})$ до тех пор, пока не установлена связь $\widehat{E}(\mathbf{P})$ с одночастичным спектром полного гамильтониана и не фиксирована соответствующая интерпретация физических полей (3.17) в терминах операторов рождения и уничтожения частиц. Поскольку точная операторная диагонализация полного гамильтониана (3.1), даже в одночастичном секторе, не представляется возможной, поля ψ (3.17), в отличие от нерелятивистского случая главы 2, играют теперь роль "пробных" полей, и их спектр $\widehat{E}(\mathbf{P})\longmapsto\omega(\mathbf{k})$ не обязан непосредственно совпадать с одночастичным спектром $W(\mathbf{k})$ *полного гамильтониана.* Невозможность в релятивистской теории поля, в отличие от (2.81), гарантировать единственность решения ГУ с заданными начальными условиями, связанная с отсутствием там сколь нибудь полного описания всех возможных унитарно неэквивалентных представлений ККС [80], означает, что произведенная в (3.18) замена гейзенберговского "тока" $S^A_\Psi(x)$ "током" одночастичных пробных полей $S^A_\psi(x)$ во многом аналогична предположению о существовании как представления взаимодействия, так и асимптотических *in- (out-)* полей [75], но, на наш взгляд, она представляется более адекватным анзацем. Фактически, (3.12) совместно с (3.13)–(3.15) принимаются здесь за условия согласованности процедуры квантования (3.16)–(3.20) с динамикой системы при отсутствии точной операторной диагонализуемости (0.6), (0.7), (2.3), (2.4), (2.19) полного гамильтониана в одночастичном секторе на выбранных физических полях. При этом произвол, допускаемый условиями (3.15), или (3.19), (3.20), оставляет определенные возможности для перенормировки параметров одночастичного спектра. Общее "решение" условия (3.19) имеет вид:

$$\widehat{\mathcal{M}} = I\tilde{\mu} + \sum_{A} \left(\widehat{O}^{A}\right)^{2} \tilde{c} + \gamma^{0}\widetilde{m} + \gamma^{5}\tilde{\nu}, \quad (\gamma^{0,5\dagger} = \gamma^{0,5},\ \boldsymbol{\gamma}^{\dagger} = -\boldsymbol{\gamma}), \tag{3.21}$$

где, по условию (3.20), по крайней мере, $\tilde{\mu}$ и/или $\tilde{c}$ могут быть всегда отличны от нуля. Параметру $\tilde{\mu}$, в соответствии с [5], [60], [126], [127], можно придать смысл перенормировки химического потенциала, чье "голое" значение, при $\widehat{\mu}_0 \propto \lambda\, I$, определяется (3.9). Это имеет место в случае (I), (II) или (IV) при $\lambda_V + \lambda_A = 0$, т.е. $\widehat{\mu}_0 \equiv 0$. Отметим, что неизбежность его появления уже в уравнениях движения (3.5), (3.9) связана с 4-ой степенью взаимодействия ферми-полей и с избранным способом регуляризации коммутационных соотношений (3.4). Как и в нерелятивистском случае (2.77), (2.79), *все* параметры в (3.21) являются константами.

Лишь если позволяют условия (3.15), (3.20), можно попытаться определить $\widehat{\mathcal{M}}$, аналогично (2.79), по одночастичному спектру полного гамильтониана, например, из решения соответствующего уравнения Швингера-Дайсона [47]–[60], или путем частичной операторной диагонализации *полного* гамильтониана (3.1) подходящим преобразованием Боголюбова [105]. Интерпретация возможной зависимости от импульса перенормированной массы m (и параметров $\tilde{c}, \tilde{\nu}$) вновь диктуется условием (3.15):

$$\widehat{\mathcal{M}} \longmapsto \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{P}^{\dagger}\mathbf{P}), \quad m = m_0 + \widetilde{m}, \quad \widetilde{m} \Longrightarrow \widetilde{m}(\mathbf{k}^2) \longmapsto \widetilde{m}(\mathbf{P}^{\dagger}\mathbf{P}), \text{ и т.д.} \tag{3.22}$$

В отличие от нерелятивистской модели (2.75), соответствующие "токам" $S^{A}_{\Psi}(x)$ (3.3) заряды, вообще говоря, не сохраняются. Это еще не гарантирует неявно предполагаемого отсутствия вкладов швингеровских членов

[128] в формальных уравнениях (3.10)–(3.12). Однако, непротиворечивость отсутствия таких членов в коммутаторах (3.14) с соответствующими "токами" пробных одночастичных полей (3.16), (3.17) является проявлением самосогласованности предлагаемой процедуры линеаризации (3.12)–(3.18).

Решение линеаризованного канонического уравнения (3.5)

$$i\partial_t \Psi^a_\alpha(\mathbf{x},t) = \left(\left[\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \widehat{\mathrm{V}}_\psi(\mathbf{x},t)\right]\Psi(\mathbf{x},t)\right)^a_\alpha, \qquad \Psi^a_\alpha(\mathbf{x},0) = \psi^a_\alpha(\mathbf{x},0), \quad (3.23)$$

может быть записано символически, аналогично формуле (2.83), в виде T – упорядоченной экспоненты при $T > t > 0$:

$$\Psi^a_\alpha(\mathbf{x},T) = \mathbf{T}\left(\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\left[\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \widehat{\mathrm{V}}_\psi(\mathbf{x},\eta)\right]\right\}\psi(\mathbf{x},0)\right)^a_\alpha \equiv \quad (3.24)$$

$$\equiv \left(\int d^3\mathrm{y}\,\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0)\psi(\mathbf{y},0)\right)^a_\alpha = \left(\int d^3\mathrm{y}\,\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},t)\Psi(\mathbf{y},t)\right)^a_\alpha \quad (3.25)$$

$$= \left(e^{-iT\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})}\mathbf{T}\left(\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\, e^{i\eta\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})}\widehat{\mathrm{V}}_\psi(\mathbf{x},\eta)e^{-i\eta\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})}\right\}\right)\psi(\mathbf{x},0)\right)^a_\alpha, \quad (3.26)$$

где, при $T > 0$, можно, как и в нерелятивистском случае (2.83), вынести оператор $\psi_\alpha(\mathbf{x},0)$ из под знака T- произведения. В последнем выражении, при $\widehat{\mu}_0 \propto \lambda I$, можно "внутри" T- экспоненты снова заменить $\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) \longmapsto \widehat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P})$. Эту T-экспоненту следует сравнить со стандартным выражением для гейзенберговского поля через S– матрицу в представлении асимптотических (in, out) полей или в представлении взаимодействия (int) [73], [79]:

$$\mathrm{S}_{[\psi^{ex}]} = \mathbf{T}\ \exp\left\{-i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt H_{I[\psi^{ex}]}(t)\right\}, \quad (3.27)$$

$$\Psi_\alpha(x) = \mathrm{S}^{-1}_{[\psi^{ex}]}\mathbf{T}\left\{\psi^{ex}_\alpha(x)\mathrm{S}_{[\psi^{ex}]}\right\}, \quad ex = in,\, out,\, int. \quad (3.28)$$

Найденное представление (3.24) через физические поля (3.17) выгодно отличается от (3.28) тем, что, во первых, содержит вдвое меньшую степень полей в экспоненте, а во вторых, стоящий в экспоненте (3.24) оператор имеет ясный физический смысл: он играет роль эффективного бозонного внешнего поля, которым и может быть заменен в соответствующем приближении самосогласованного поля Хартри-Фока [92]. Действительно, решение в случае внешнего поля (3.2) получается из (3.24) заменой *всюду*

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) \longmapsto \widehat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}), \quad \widehat{\mathrm{V}}_\psi(x) \longmapsto \widetilde{\mathrm{V}}_B(x), \text{ (и } \widehat{E}(\mathbf{P}) \longmapsto \widehat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}), \tag{3.29}$$

$$\text{для слабого поля)}, \quad \text{то есть: } \mathcal{Y}_{(\psi)}(x_0, \mathbf{x}|\mathbf{y}, y_0) \longmapsto \tag{3.30}$$

$$\mathcal{Y}^{ab(B)}_{\alpha\beta(\psi)}(x|y) = \theta(x_0 - y_0)\Delta^{ab}_{\alpha\beta(\Psi)}(x|y) \equiv \theta(x_0 - y_0)\left\{\Psi^a_\alpha(x)\,,\Psi^{\dagger b}_\beta(y)\right\},$$

есть функция распространения фермиона во внешнем поле $B^A(x)$ [130]. Согласно (3.8), (3.14) это поле будет лоренц-скаляром в случае (I) и псевдоскаляром в случае (II), а в случаях (III), (IV), как показано ниже, эффективно сводится к 4-х вектору, и/или к 4-х псевдовектору.

2 Представления континуальным интегралом.

Следующей задачей является "распутывание", на сколько это возможно, T– экспоненты (3.24) с целью дальнейшего ее приведения к нормальной форме. Эффективным средством достижения обеих этих целей являются континуальные интегралы по траекториям [99], [124], [131]–[134]. Методы вычисления таких интегралов активно разрабатываются в настоящее время в связи с различными задачами квантовой теории поля [135]-[137], и, безусловно, представляют также самостоятельный интерес. Поэтому, далее здесь предпринята попытка путем развития идей, заложенных в работах [138]-[143] при вычислении евклидовского пропаготора фермиона во внешнем поле, получить непосредственно гейзенберговский оператор ферми-поля в пространстве Минковского, в духе подхода [144].

Символ T– упорядочивания в (3.24) подразумевает как упорядочивание действия операторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, так и произведения полевых операторов $\psi(\mathbf{x},\eta)$, а также произведения матриц $\widehat{\boldsymbol{\alpha}},\gamma^0,\widehat{O}^A$: $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{\mathbf{x}}\mathbf{T}_{\gamma}\mathbf{T}_{\psi}$. Записав его при $\tau=T/N$ с помощью формулы Троттера в виде предела:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0)=<\mathbf{x}|\mathbf{T}\left(\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\left[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})+\widehat{\mathrm{V}}_{\psi}(\mathbf{X},\eta)\right]\right\}\right)|\mathbf{y}>= \quad (3.31)$$

$$(\text{при } T>t>0)\ =\int d^3z\,\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{z},t)\mathcal{Y}_{(\psi)}(t,\mathbf{z}|\mathbf{y},0)=(\ldots)= \quad (3.32)$$

$$<\mathbf{x}|\lim_{N\to\infty}\prod_{n=N}^{1}\left\{\mathbf{I}_{\mathbf{x}_n}\exp\left[-i\tau\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})\right]\mathbf{I}_{\mathbf{p}_n}\exp\left[-i\tau\widehat{\mathrm{V}}_{\psi}(\mathbf{X},(n-1)\tau)\right]\right\}|\mathbf{y}>,$$

где $\mathbf{x}_N=\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0=\mathbf{y}$, и вновь использовано соглашение из (2.17), (2.85), вставляя в каждую n-ую фигурную скобку полные системы состояний

$$\mathbf{I}_{\mathbf{x}_n}=\int d^3\mathrm{x}_n\,|\mathbf{x}_n><\mathbf{x}_n|=\mathbf{I}_{\mathbf{p}_n}=\int d^3\mathrm{p}_n\,|\mathbf{p}_n><\mathbf{p}_n|,\ \text{и полагая при}$$

$$N\to\infty:\ \ \mathbf{p}_n=\mathbf{p}(n\tau),\ \ \mathbf{x}_n=\mathbf{x}(n\tau),\ \ \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_{n-1}\approx\dot{\mathbf{x}}(n\tau)\tau,\ \ \eta=n\tau, \quad (3.33)$$

с учетом формул из приложения B, придем к интегралу по траекториям:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0)=\int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\int\mathcal{D}\mathbf{p}(\eta)\,\exp\left\{i\int\limits_0^T d\eta\Big(\mathbf{p}(\eta)\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta)\Big)\right\}\cdot \quad (3.34)$$

$$\cdot\ \mathbf{T}_{\gamma}\mathbf{T}_{\psi}\left(\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\Big[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{p}(\eta))+\widehat{\mathrm{V}}_{\psi}(\mathbf{x}(\eta),\eta)\Big]\right\}\right),$$

$$\text{с мерой:}\quad \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{D}\mathbf{p}(\eta)=\prod_{\eta=T}^{0}\frac{d^3\mathrm{x}(\eta)d^3\mathrm{p}(\eta)}{(2\pi)^3}, \quad (3.35)$$

$$\text{где:}\quad \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)=\int\mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}(\eta)\,\delta_3\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\int\limits_0^T d\eta\,\dot{\mathbf{x}}(\eta)\right). \quad (3.36)$$

Это представление однозначно [132], [133], поскольку стоящиий в экспоненте гамильтониан является суммой операторов, зависящих отдельно от $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X}$. Заметим, что таким же свойством обладает нерелятивистский 4-х фермионный гамильтониан (2.43) при $\mu=0$, но не обладает гамильтониан (1.1) $N\Theta$- модели, оба, однако, допускающие линеаризацию ГУ.

2.1 Нерелятивистский случай.

Поскольку в аналогичных формулах нерелятивистской модели (2.43) при $\mu = 0$ отсутствует символ матричного упорядочивания $\mathbf{T}_\gamma$, то из (2.83), вместо (3.34), для одночастичного спектра $E(\mathbf{k})$ (2.77) общего вида получаем [1]:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\, \mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \cdot \tag{3.37}$$

$$\cdot\, \mathbf{T}_\psi \left(\exp\left\{ i\,\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^T d\eta \Big(\psi^\dagger(\mathbf{x}(\eta),\eta)\,\psi(\mathbf{x}(\eta),\eta)\Big)\right\}\right), \quad \text{где:}$$

$$\mathcal{L}_E\left(T|t,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) = \int \mathcal{D}\mathbf{p}(\eta)\exp\left\{ i\int\limits_t^T d\eta\Big[\Big(\mathbf{p}(\eta)\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta)\Big) - E(\mathbf{p}(\eta))\Big]\right\}. \tag{3.38}$$

Отметим, что при $\lambda = 0$ это выражение, при $T = x_0 - y_0 > 0$, сводится, очевидно, к (запаздывающей) функции Грина (2.52), (2.54), (2.55):

$$\mathcal{Y}^{(0)}_{(\psi)}(x_0,\mathbf{x}|\mathbf{y},y_0) = \int\limits_{\mathbf{x}(y_0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(x_0)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{L}_E\left(x_0|y_0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) = \tag{3.39}$$

$$= \theta(T) < \mathbf{x}|e^{-iTE(\mathbf{P})}|\mathbf{y} > = \theta(T)\Delta_{(\psi)}(\mathbf{x}-\mathbf{y};T) = (\text{при } x_0 > z_0 > y_0)$$

$$= \Delta^{(R)}_{(\psi)}(x-y) = \int d^3z\,\Delta^{(R)}_{(\psi)}(x-z)\Delta^{(R)}_{(\psi)}(z-y), \tag{3.40}$$

а в силу запаздывания в (2.54), для любого t-локального оператора $\boldsymbol{\mathcal{K}}$:

$$\det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right] \Longrightarrow \det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(R)}_{(\psi)}\right] = 1. \tag{3.41}$$

Тогда квадратичность по ферми-полям функционала (3.37) позволяет, путем применения к нему Виковской операции приведения (3.61)–(3.71) (ниже), получить его нормальный символ [99], [124], в следующем виде ($\mathbf{N}_\psi$ означает нормальную форму по полям ψ):

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \cdot \tag{3.42}$$

---

[1] В этом пункте временно снова ψ– двухкомпонентные спинорные поля из главы 2.

$$\cdot\,\mathbf{N}_{\psi}\left(\exp\left\{\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d\xi\left(\psi^{\dagger}(\mathbf{x}(t),t)\,\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)\,\psi(\mathbf{x}(\xi),\xi)\right)\right\}\right),\quad \text{где:}$$

$$\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)=i\,\frac{\lambda}{2}\,\delta(t-\xi)+i\,\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\xi}^{t}d\tau\Delta_{(\psi)}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(\tau);t-\tau)\,\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(\tau|\xi).\quad(3.43)$$

Последнюю величину можно интерпретировать, как "гребенку" полной "амплитуды рассеяния" на "внешнем поле" λ при движении по заданной траектории $\mathbf{x}(\eta)$ между моментами времени ξ и t. Представления (3.39), (3.40) и (3.42) позволяют убедиться, что одномерное уравнение (3.43) порождает всю бесконечную систему уравнений для коэффициентных функций динамического отображения (2.90).

Начнем с воспроизведения решения для первой коэффициентной функции $Y^{(1)}$ (2.24). Воспользовавшись свойствами (3.32), (3.39), (3.40) функциональных интегралов и наличием определенного временно́го упорядочения $T>t>\xi>0$, при сравнении с формулой (2.87) второго члена разложения экспоненты (3.42) в импульсном представлении полей (2.48), (2.49) получаем:

$$Y^{(1)}(T;\mathbf{k},\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{l})=<\mathbf{k}+\mathbf{q}|\int\limits_0^T dt e^{itE_q^{\mathbf{P}}}\int\limits_0^t d\xi\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(t|\xi)e^{-i\xi E_p^{\mathbf{P}}}|\mathbf{l}+\mathbf{p}>,\qquad(3.44)$$

$$<\mathbf{z}|\boldsymbol{\mathcal{R}}(t|\xi)|\boldsymbol{\zeta}>=\int\limits_{\mathbf{x}(\xi)=\boldsymbol{\zeta}}^{\mathbf{x}(t)=\mathbf{z}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{L}_E\left(t|\xi,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)\frac{\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)}{(2\pi)^3}.\qquad(3.45)$$

Из уравнения (3.43) для величины $\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)$ очевидны как наличие трансляционной инвариантности по функциональной переменной $[\mathbf{x}(\eta)]$, так и отсутствие таковой по временны́м переменным t,ξ, поскольку $\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)$ не является "полноценным" матричным элементом какого либо оператора. В тоже время, матричный элемент (3.45) инвариантен по отношению к обеим трансляциям, т.е. зависит только от разностей $(\mathbf{z}-\boldsymbol{\zeta})$ и $(t-\xi)$. Следовательно, оператор $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t|\xi)$ является функцией только от одного оператора импульса $\mathbf{P}\longmapsto\mathcal{P}$ и подчиняется вытекающему из (3.39) и (3.43), (3.45) уравнению:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(t|\xi) = \frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}\delta(t-\xi) + \frac{i\lambda}{2}\int\limits_{\xi}^{t} d\eta \mathcal{F}\left(\mathbf{P}; t-\eta\right) \boldsymbol{\mathcal{R}}(\eta|\xi) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t-\xi), \quad (3.46)$$

$$\left[\Delta_{(\psi)}(\mathbf{x}-\mathbf{y};T)\right]^2 =< \mathbf{x}|\mathcal{F}(\mathbf{P};T)|\mathbf{y} >= \int \frac{d^3\mathcal{P}}{(2\pi)^3} e^{i\mathcal{P}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\mathcal{F}(\mathcal{P};T), \quad (3.47)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{P};T) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-iT\left[E(\mathbf{q})+E(\mathbf{P}-\mathbf{q})\right]} \equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-iTE_q^{\mathbf{P}}}, \quad (3.48)$$

которое немедленно решается преобразованием Лапласа:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(t) = \frac{\lambda}{2(2\pi)^4} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma \, \frac{e^{\sigma t}}{\left(1-\lambda \, \mathrm{J}_0^{\mathbf{P}}(\sigma)\right)}, \quad \text{где: } \varepsilon(t) = \mathrm{sign}(t), \quad (3.49)$$

$$\mathrm{J}_0^{\mathcal{P}}(\sigma) = \frac{i}{2}\int\limits_0^{\infty} dt \, e^{-\sigma t}\mathcal{F}(\mathcal{P};t) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\frac{1}{[E_\kappa^{\mathcal{P}} - i\sigma]}, \quad (3.50)$$

в согласии с (2.59), (2.95), (2.96). Таким образом, при функциональном усреднении в (3.45) "гребенка" (3.43) "амплитуды рассеяния" на внешнем поле одной частицы с заданной траекторией превращается в цепочку петлевых диаграмм (3.47), (3.50) для амплитуды двухчастичного рассеяния реальных частиц со взаимодействием типа $\lambda\delta_3(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ [110] (смотри пункт 2.2 главы 5), подчиняющейся уже уравнению (3.46) типа Дайсона. Вычисляя в (3.44) интеграл по ξ и учитывая расположение особенностей в (3.49) в плоскости σ (указанное в (1.73), (1.82)), можно воспроизвести решение (2.24), (2.58), (2.94) в операторном виде:

$$Y_A^{(1)}(T;\mathbf{k},\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{l}) =< \mathbf{k}+\mathbf{q}|\,\mathbf{Y}^{\mathbf{P}}(T;\mathbf{q}|\mathbf{p})\,|\mathbf{l}+\mathbf{p} >, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Y}^{\mathbf{P}}(T;\mathbf{q}|\mathbf{p}) = \int\limits_0^T dt e^{itE_q^{\mathbf{P}}} \frac{\varepsilon(t)}{2(2\pi)^4} \int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma \frac{e^{t\sigma}}{\left(\sigma+iE_p^{\mathbf{P}}\right)} \frac{\lambda}{\left(1-\lambda\,\mathrm{J}_0^{\mathbf{P}}(\sigma)\right)},$$

где $\varepsilon(t) = \varepsilon(T)$. Еще раз подчеркнем, что это же решение было получено ранее в (2.58) *без использования* линеаризации ГУ.

Для проверки системы уравнений (2.90), с учетом (2.48), введем функционал $\mathcal{W}(T,\mathbf{q}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)])$ от траектории $\mathbf{x}(\eta)$, положив в (3.42):

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d\xi\Big(\psi^\dagger(\mathbf{x}(t),t)\,\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)\,\psi(\mathbf{x}(\xi),\xi)\Big)= \tag{3.52}$$

$$=\int d^3q\int d^3pA^\dagger_\beta(\mathbf{q})A_\beta(\mathbf{p})\mathcal{W}(T,\mathbf{q}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)]),$$

$$\mathcal{W}(T,\mathbf{q}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)])=\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d\xi\; e^{itE(\mathbf{q})-i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)}\,\frac{\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}(\xi)-i\xi E(\mathbf{p})}, \tag{3.53}$$

$$\text{откуда:}\quad \mathcal{W}(T,\mathbf{q}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)])=\frac{i\lambda}{2(2\pi)^3}\int\limits_0^T dt\int d^3s\;\cdot \tag{3.54}$$

$$\cdot\; e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{s})]-i(\mathbf{q}-\mathbf{s})\mathbf{x}(t)}\Big[\delta_3(\mathbf{s}-\mathbf{p})+\mathcal{W}(t,\mathbf{s}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)])\Big].$$

Заметим, теперь, что произведение фермионных операторов в каждом слагаемом динамического отображения (2.87) является в точности нормальной формой для n-ой степени произведений $A^\dagger A$, коммутирующих между собой под символом $\mathbf{N}_\psi$ (т.к. для (2.48) $\mathbf{N}_\psi=\mathbf{N}_A$):

$$\mathbf{N}_A\prod_{j=1}^n\Big\{A^\dagger_{\beta_j}(\mathbf{q}_j)A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j)\Big\}=\prod_{j=1}^n\Big\{A^\dagger_{\beta_j}(\mathbf{q}_j)\Big\}\prod_{j=n}^1\Big\{A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j)\Big\} \tag{3.55}$$

Тогда разложение экспоненты в (3.42) дает следующее выражение для n-ой коэффициентной функции:

$$Y^{(n)}_A(T;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}^n_1\,|\{\mathbf{p}_j\}^1_n;\mathbf{l})=e^{iTE(k)}\int d^3\mathrm{x}\int d^3\mathrm{y}<\mathbf{k}|\mathbf{x}>\;\cdot \tag{3.56}$$

$$\cdot\int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^n\Big\{\mathcal{W}(T,\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j,[\mathbf{x}(\eta)])\Big\}<\mathbf{y}|\mathbf{l}>.$$

Дифференцирование этого выражения по T немедленно приводит к уравнению (2.90) в дифференциальной по времени форме, если учесть, что, также как и в случае $Y^{(0)}$ и $Y^{(1)}$, зависимость от времени T за счет первых двух факторов взаимно компенсируется в функциональном интеграле, и дифференцировать необходимо только произведение:

$$\frac{d}{dT}\prod_{j=1}^n\Big\{\mathcal{W}(T,(j))\Big\}=\sum_{\nu=1}^n\prod_{1=j\neq\nu}^n\Big\{\mathcal{W}(T,(j))\Big\}\frac{d}{dT}\mathcal{W}(T,(\nu)).$$

Подставив сюда производную из уравнения (3.54), для вычисления интеграла по d^3x достаточно в функциональный интеграл, как в матричный элемент (3.31), вставить единицу в виде:

$$< \mathbf{x}|\boldsymbol{\mathcal{O}} = \int d^3\kappa\, e^{-iTE(\kappa)} < \mathbf{x}|\boldsymbol{\kappa} > e^{iTE(\kappa)} \int d^3 z < \boldsymbol{\kappa}|\mathbf{z} >< \mathbf{z}|\boldsymbol{\mathcal{O}},$$

а затем вновь воспользоваться определенями (3.56) и (2.89), (2.103). Точно таким же путем проверяется, что уравнению (2.99) удовлетворяет производящий функционал:

$$\mathcal{Z}\left(T;\mathbf{k},\mathbf{l},[\phi]\right) = e^{iTE(k)} \int d^3\mathrm{x} \int d^3\mathrm{y} < \mathbf{k}|\mathbf{x} > \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \;\cdot \tag{3.57}$$

$$\cdot\, \mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \exp\left\{\int d^3q \int d^3p\, \phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})\, \mathcal{W}(T,\mathbf{q}|\mathbf{p},[\mathbf{x}(\eta)])\right\} < \mathbf{y}|\mathbf{l} > .$$

Выделение дельта-функции закона сохранения импульса, вполне очевидное в (3.51), нетрудно осуществить и для остальных коэффициентных функций $Y^{(n)}$ с $n > 1$. Например, вставляя в функциональный интеграл (3.56) (умножая его на) единицу [1], [124]:

$$1 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T d\tau \int d^3\mathrm{a}\, \delta_3\Big(\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{a}\Big), \tag{3.58}$$

а затем сдвигая переменные $\mathbf{x}(\eta) \to \mathbf{x}(\eta) + \mathbf{a}$ и то же для $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, с учетом явного вида (3.53) и указаных выше трансляционных свойств всех входящих величин, вычислением интеграла по d^3a получаем:

$$Y_A^{(n)}(T;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\mathbf{l}) = (2\pi)^3\delta_3\left(\mathbf{k} - \mathbf{l} + \sum_{j=1}^n(\mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j)\right) \;\cdot \tag{3.59}$$

$$\cdot\; e^{iTE(k)} \int d^3\mathrm{x} \int d^3\mathrm{y} < \mathbf{k}|\mathbf{x} > \frac{1}{T}\int\limits_0^T d\tau \;\;\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\, \delta_3\Big(\mathbf{x}(\tau)\Big) \mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^n\Big\{\mathcal{W}(T,\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j,[\mathbf{x}(\eta)])\Big\}< \mathbf{y}|\mathbf{l} > .$$

Или, выделяя в (3.56) среднюю точку: $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{h}/2$, $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{h}/2$, тем же путем находим:

$$Y_A^{(n)}(T;\mathbf{k};\{\mathbf{q}_j\}_1^n\,|\{\mathbf{p}_j\}_n^1;\mathbf{l}) = \delta_3\left(\mathbf{k} - \mathbf{l} + \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j)\right)\cdot \tag{3.60}$$
$$\cdot\, e^{iTE(k)}\int d^3\mathrm{h}\exp\left\{-\frac{i}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{h}\right\}\cdot$$
$$\cdot\int\limits_{\mathbf{x}(0)=-\mathbf{h}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{h}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\mathcal{L}_E\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\Big\{\mathcal{W}(T,\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j,[\mathbf{x}(\eta)])\Big\}.$$

2.2 Релятивистский случай.

Прежде всего, напомним основные этапы операции $\mathbf{T}_\psi$ приведения к нормальной форме хронологического произведения для экспоненты от квадратичного функционала [79], [99], [124]. Так как для любого функционала $F[\psi]$ ($\mathbf{I}$- единичный оператор):

$$\mathbf{T}_\psi F[\psi] = \mathbf{N}_\psi\left(\exp\left[\int d^4z\int d^4\zeta\,\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_\gamma^a(z)}\Delta^{(C)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)}(z|\zeta)\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^{*b}_{\gamma'}(\zeta)}\right]F[\phi]\Bigg|_{\substack{\phi\to\psi\\ \phi^*\to\psi^\dagger}}\right), \tag{3.61}$$

то тогда: $$\mathbf{T}_\psi\left(\exp\left[\int d^4x\int d^4y\;\psi^{\dagger a}_\alpha(x)\mathcal{K}^{ab}_{\alpha\beta}(x|y)\psi^b_\beta(y)\right]\right) = \tag{3.62}$$
$$= \det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right]\mathbf{N}_\psi\left(\exp\left[\int d^4x\int d^4y\;\psi^{\dagger a}_\alpha(x)\mathcal{T}^{ab}_{\alpha\beta}(x|y)\psi^b_\beta(y)\right]\right),$$

где пропагаторы и перестановочные функции распространения типа (2.52)-(2.55) для пробных полей ψ (3.16), (3.17), а также ядра операторов определены, с учетом (3.81) (ниже), соответственно, как:

$$\Delta^{(R)}_{(\psi)\widehat{E}}(x|y) = \theta(x_0 - y_0)\Delta_{(\psi)\widehat{E}}(x|y) = \int\limits_{\mathbf{x}(y_0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(x_0)=\mathbf{x}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{E}}\left(x_0|y_0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right), \tag{3.63}$$

$$\Delta^{ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y) = \Big\{\psi^a_\gamma(x)\,,\psi^{\dagger b}_{\gamma'}(y)\Big\} = \Delta^{(-)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y) + \Delta^{(+)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y) = \tag{3.64}$$

$$= \delta^{ab}\Big(e^{-i(x_0-y_0)\widehat{E}(\mathbf{P}_x)}\Big)_{\gamma\gamma'}\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^{ab} <\mathbf{x}|\Big(e^{-i(x_0-y_0)\widehat{E}(\mathbf{P})}\Big)_{\gamma\gamma'}|\mathbf{y}>; \tag{3.65}$$

$$\Delta^{(C)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y) \equiv \langle\gamma,a,x\,|\,\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}|y,b,\gamma'\rangle = \langle 0\,|\,\mathbf{T}\Big(\psi^a_\gamma(x)\,\psi^{\dagger b}_{\gamma'}(y)\Big)\,|0\rangle = \tag{3.66}$$

$$= \mathbf{T}\Big(\psi^a_\gamma(x)\,\psi^{\dagger b}_{\gamma'}(y)\Big) - \mathbf{N}\Big(\psi^a_\gamma(x)\,\psi^{\dagger b}_{\gamma'}(y)\Big) = \Delta^{(R)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y) - \Delta^{(+)ab}_{\gamma\gamma'(\psi)\widehat{E}}(x|y); \quad (3.67)$$

$$\mathcal{K}^{ab}_{\alpha\beta}(x|y) = \langle\alpha, a, x\,|\boldsymbol{\mathcal{K}}|y, b, \beta\rangle, \qquad \mathcal{T}^{ab}_{\alpha\beta}(x|y) = \langle\alpha, a, x\,|\boldsymbol{\mathcal{T}}|y, b, \beta\rangle; \quad (3.68)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{K}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\boldsymbol{\mathcal{T}} = \left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{K}} = \boldsymbol{\mathcal{K}} + \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\boldsymbol{\mathcal{K}} = \quad (3.69)$$

$$= \boldsymbol{\mathcal{K}}\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\boldsymbol{\mathcal{K}}\right]^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{K}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}\boldsymbol{\mathcal{K}}\left(\det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right]\right)^{-1}, \quad (3.70)$$

$$\det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right] = \exp\left\{Tr\left(\ln\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right]\right)\right\}, \quad (3.71)$$

и где $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ и $\det\left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\right]$, соответственно, минор Фредгольма и определитель Фредгольма [145] для оператора $\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}$. Ограничиваясь далее константной перенормировочной параметризацией (3.21) с $\tilde{\nu} = 0$, ее можно выбрать так, чтобы иметь в (3.65) обычный дираковский спектр, тогда [79], [80], при I- единичная матрица, $(\gamma\partial) = \gamma^\nu\partial_\nu = \gamma^0\partial_{x^0} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}:$

$$\widehat{E}(\mathbf{P}) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathbf{P}) + \gamma^0 m, \quad \omega(\mathbf{k}) = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad T = x_0 - y_0, \quad (3.72)$$

$$e^{-iT\widehat{E}(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})}e^{i\mathbf{kx}} = \left(I\cos(T\omega(\mathbf{k})) - i\widehat{E}(\mathbf{k})\frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})}\right)e^{i\mathbf{kx}} = \quad (3.73)$$

$$= \left(I\partial_{x^0} - i\widehat{E}(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})\right)\frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})}e^{i\mathbf{kx}} = \frac{1}{i}\Big(i(\gamma\partial) + m\Big)\gamma^0\,\frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})}e^{i\mathbf{kx}},$$

$$\Delta^{ab}_{\alpha\beta(\psi)\widehat{E}}(x-y) = \delta^{ab}\left[I\partial_{x^0} - i\widehat{E}(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})\right]_{\alpha\beta}D_m(x-y), \quad (3.74)$$

$$D_m(x-y) = \frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big[\theta(\varrho)J_0(m\sqrt{\varrho})\Big] = \quad (3.75)$$

$$= \frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2\pi}\left[\delta(\varrho) - \frac{m\,\theta(\varrho)}{2\sqrt{\varrho}}J_1(m\sqrt{\varrho})\right], \qquad \varrho = (x-y)^2,$$

$$\Delta^{(C)ab}_{\alpha\beta(\psi)\widehat{E}}(x-y) = \delta^{ab}\left[I\partial_{x^0} + i\widehat{E}(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})\right]^{-1}_{\alpha\beta}\delta_4(x-y), \quad (3.76)$$

$$\Delta^{(C)ab}_{\alpha\beta(\psi)\widehat{E}}(x-y) = \delta^{ab}\left[I\partial_{x^0} - i\widehat{E}(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})\right]_{\alpha\beta}D^{(C)}_m(x-y), \quad (3.77)$$

$$D^{(C)}_m(x-y) = \frac{i}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(K_0(m\sqrt{i\epsilon-\varrho})\right) = \frac{im}{(2\pi)^2}\,\frac{K_1(m\sqrt{i\epsilon-\varrho})}{\sqrt{i\epsilon-\varrho}},$$

$$D^{(C)}_0(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(i\epsilon-\varrho)}, \qquad D_0(x-y) = \frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2\pi}\,\delta(\varrho).$$

где $J_n(z)$, $K_n(z)$- функции Бесселя и Макдональда соответственно [165].

Покажем теперь, что в случаях (III) и (IV) в выражении (3.34) можно "расцепить" $\mathbf{T}_\psi$ и $\mathbf{T}_\gamma$, воспользовавшись, фактически, тем, что в процессе приведения к нормальной форме (3.62), ферми-поля ψ_α в (3.61) заменяются грассмановыми величинами ϕ_α. Соответственно, ферми-четные комбинации, например, в случае (III) (где для простоты $c_A = 0$) вида

$$\mathcal{B}^\nu_{(\phi)}(\mathbf{x},t) = \lambda\epsilon^\nu\Big(\overline{\phi}(\mathbf{x},t)(\gamma\epsilon)\phi(\mathbf{x},t)\Big), \text{ где: } \overline{\phi} = \phi^*\gamma^0, \ (\gamma\epsilon) = \gamma^\nu\epsilon_\nu, \quad (3.78)$$

становятся обычными c-числами. Сдвигая тогда в (3.34) переменную интегрирования:

$$\mathbf{p}(\eta) \longrightarrow \mathbf{p}(\eta) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(\phi)}(\mathbf{x}(\eta),\eta), \text{ при } u(\eta) \equiv (\mathbf{u}(\eta), u_0(\eta)) = (\dot{\mathbf{x}}(\eta), 1), \quad (3.79)$$

$$\text{получаем: } \mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}\,(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \ \cdot \quad (3.80)$$

$$\cdot\ \mathbf{T}_\psi\left(\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\Big(u(\eta)\,\mathcal{B}_{(\psi)}(\mathbf{x}(\eta),\eta)\Big)\right\}\right), \quad \text{где:}$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}\,(T|t,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \int\mathcal{D}\mathbf{p}(\eta)\mathbf{T}_\gamma\exp\left\{i\int\limits_t^T d\eta\Big[\Big(\mathbf{p}(\eta)\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta)\Big) - \widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{p}(\eta))\Big]\right\}, \quad (3.81)$$

аналогично (3.38). Однако, на этом аналогия заканчивается, и, поскольку причинный пропагатор (3.66), (3.67) более не является запаздывающим, из (3.62), вместо (3.42), (3.43), при $x(\eta) = (\mathbf{x}(\eta),\eta)$, $\dot{x}(\eta) = u(\eta)$,

$$\mathcal{T}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x|y) = \delta_3\Big(\mathbf{x}-\mathbf{x}(x_0)\Big)\,\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x_0|y_0)\,\delta_3\Big(\mathbf{y}-\mathbf{x}(y_0)\Big), \quad (3.82)$$

$$\mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x|y) = \delta_3\Big(\mathbf{x}-\mathbf{x}(x_0)\Big)\,\widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x_0|y_0)\,\delta_3\Big(\mathbf{y}-\mathbf{x}(y_0)\Big), \quad (3.83)$$

$$\widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) = -i\lambda(u(t)\,\epsilon)\gamma^0(\gamma\epsilon)\,\delta(t-\xi), \text{ получаем:} \quad (3.84)$$

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}\,(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)])\det\Big[\mathbf{I}-\boldsymbol{\mathcal{K}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\Big] \ \cdot \quad (3.85)$$

$$\cdot\ \mathbf{N}_\psi\left(\exp\left\{\int\limits_0^T dt\int\limits_0^T d\xi\Big(\psi^\dagger(x(t))\,\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)\,\psi(x(\xi))\Big)\right\}\right), \quad \text{где:}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) = \widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) + \int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^T d\eta\,\widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\tau)\Delta^{(C)}_{(\psi)}\Big(x(\tau)\Big|x(\eta)\Big)\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(\eta|\xi). \ (3.86)$$

Здесь, фактически, вновь имеем дело с одномерным, но уже фредгольмовским оператором с несимметричным функциональным матричным ядром

$$< t|\widehat{\boldsymbol{Z}}|\xi >= \widehat{Z}(t|\xi) = -i\lambda\Delta^{(C)}_{(\psi)\widehat{E}}\Big(x(t) - x(\xi)\Big)\gamma^0(\gamma\epsilon)(u(\xi)\,\epsilon), \tag{3.87}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) = \widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) + \int\limits_0^T d\tau\,\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\tau)\,\widehat{Z}(\tau|\xi). \tag{3.88}$$

$$Tr\left\{\widehat{\boldsymbol{Z}}\right\} = -i\lambda\Big((x(T) - x(0))\epsilon\Big)Sp\left(\Delta^{(C)}_{(\psi)\widehat{E}}(0)\gamma^0(\gamma\epsilon)\right) = 0, \quad \text{тогда:} \tag{3.89}$$

$$\det\Big[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\Big] = \det\Big[\mathbf{I} - \boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}\Big] \Longrightarrow \det\Big[\mathbf{I} - \widehat{\boldsymbol{Z}}\Big] = \tag{3.90}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left\{\int\limits_0^T d\xi_j\right\}\det_{(n)}\left[\widehat{Z}_{\alpha_k\alpha_l}(\xi_k|\xi_l)\right] = \tag{3.91}$$

$$= e^{-Tr\{\widehat{\boldsymbol{Z}}\}}\,\widetilde{\det}\Big[\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}\boldsymbol{\Delta}^{(C)}_{(\psi)}\Big] \Longrightarrow \tag{3.92}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\left\{\int\limits_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j\right\}\widetilde{\det}_{(n)}\left[\widehat{Z}_{\alpha_k\alpha_l}(\xi_k|\xi_l)\right],$$

где $\xi_0 = T$, использовано (D.1) и симметрия детерминанта n- ого порядка при произвольной, но одноименной перестановке и строк и столбцов, а тильда в последних равенствах означает, что, в соответствии с (3.71) и (3.89), его диагональные элементы вида $\widehat{Z}_{\alpha\alpha}(\xi|\xi)$ заменены нулями [170]. С помощью соотношений (3.63) и (3.81) вычисление первого члена разложения экспоненты в (3.85),

$$\mathcal{Y}^{(0)}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}}\mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\,\hat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)\det\left[\mathbf{I} - \widehat{\boldsymbol{Z}}\right], \tag{3.93}$$

сводится, в итоге, к интегрированию лишь по набору причинно упорядоченных траекторий $\mathbf{x}(\xi_j) \mapsto \mathbf{x}_j$, $x_j = (\mathbf{x}_j, \xi_j)$, $x_0 = (\mathbf{x}, T)$:

$$\mathcal{Y}^{(0)}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\left\{\int d^3\mathrm{x}_j\int\limits_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j\;\Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_{j-1}\Big|x_j\Big)\right\}\cdot \tag{3.94}$$

$$\cdot\,\Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_n\Big|y\Big)\,\widetilde{\det}_{(n)}\left[\widehat{Z}_{\alpha_k\alpha_l}(\xi_k|\xi_l)\right],$$

где, поэтому, в том числе и причинные пропагаторы в $\widehat{Z}_{\alpha_k\alpha_l}(\xi_k|\xi_l)$ заменятся соответствующими частотными частями (3.64), отвечающими, как и в нерелятивистском случае, распространению только реальных частиц, находящихся на массовых поверхностях, вообще говоря, различных, если $\widehat{\mathcal{E}} \neq \widehat{E}$. Используя (3.70) и аналогичное (3.91) выражение для $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ через сумму определителей, можно таким же путем привести к "причинному" виду и второй член разложения экспоненты в (3.85):

$$\mathcal{Y}^{(1)}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\, \widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \det\left[\mathbf{I} - \widehat{\boldsymbol{Z}}\right] \cdot \tag{3.95}$$

$$\cdot\, \mathbf{N}_\psi \left\{ \int\limits_0^T dt \int\limits_0^T d\xi \Big(\psi^\dagger(x(t))\, \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)\, \psi(x(\xi)) \Big) \right\} =$$

при $\mathbf{x}(\xi_j) \mapsto \mathbf{x}_j,\;\; x_j = (\mathbf{x}_j, \xi_j),\;\; x_0 = (\mathbf{x}, T)$,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\prod_{j=1}^{n+1} \left\{ \int d^3\mathrm{x}_j \int\limits_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j\; \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_{j-1}\Big|x_j\Big) \right\} \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_{n+1}\Big|y\Big) \cdot \right. \tag{3.96}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{\det}_{(n)} \left[\widehat{Z}_{\alpha_m\alpha_l}(\xi_m|\xi_l)\right]\Big|_{m,l\neq k} \mathbf{N}_\psi \left(\psi^\dagger_\alpha(x_k)\psi_\alpha(x_k)\right) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n+2} \left\{ \int d^3\mathrm{x}_j \int\limits_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j\; \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_{j-1}\Big|x_j\Big) \right\} \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}\Big(x_{n+2}\Big|y\Big) \cdot$$

$$\left. \cdot \sum_{r=1}^{n+2} \sum_{r\neq k=1}^{n+2} \widetilde{\det}_{(n+1)} \left[\widehat{Z}_{\alpha_m\alpha_l}(\xi_m|\xi_l)\right]\Big|_{l\neq r}^{m\neq k} \mathbf{N}_\psi \left(\psi^\dagger_{\alpha_r}(x_r)\psi_{\alpha_k}(x_k)\right) \right],$$

где вновь использовано (D.1) и (D.4). Таким образом, на уровне одно- и двухчастичных процессов прослеживается определенная связь предлагаемого подхода с методами Швингеровской теории источников [146], [147]. Как и в нерелятивистских моделях главы 2, предел при $T \to \infty$ коэффициентных функций операторов $\mathcal{Y}^{(0),(1)}_{(\psi)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0)$ должен содержать информацию обо всех собственных состояниях одно- и двух- частичного сектора [109] (смотри ниже, параграф 3).

2.3 Взаимодействие киральных фермионных полей.

Как уже было замечено выше, в случае (IV), при $\lambda_V + \lambda_A = 0$, имеем $\widehat{\mu}_0 = 0$. Тогда, при $m_0 = 0$ для оставшихся матриц $\widehat{\alpha}^\nu = \gamma^0\gamma^\nu$ и γ^5 можно выбрать блочно-диагональное спинорное представление ($\boldsymbol{\sigma}$-матрицы Паули (4.9)): $\widehat{\alpha}^0 = I$,

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \psi^a_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \phi^a_+(x) \\ \phi^a_-(x) \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

$$\widehat{E}(\mathbf{P}) = \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{P}), \ \ \Pi_\zeta = \frac{I + \zeta\gamma^5}{2}, \ \ \sigma_\zeta = (\zeta\boldsymbol{\sigma}, I), \ \ \zeta = \pm 1, \tag{3.98}$$

и аналогичное разбиение для гейзенберговских полей $\Psi^a_\zeta(x) = \Pi_\zeta \Psi^a(x)$. Представляя гамильтониан взаимодействия для этого случая в виде

$$\mathrm{H}_{I[\Psi]} = 2\lambda \left(\Psi^{\dagger a}_+(x)(\sigma_+\epsilon)\Psi^a_+(x)\right)\left(\Psi^{\dagger b}_-(x)(\sigma_-\epsilon)\Psi^b_-(x)\right), \tag{3.99}$$

с помощью вытекающих из него уравнений движения для полей и токов $j^a_{\nu(\Psi)}(x) = \left(\overline{\Psi}^a(x)\gamma_\nu\Psi^a(x)\right)$ и $\left(\Psi^{\dagger a}_\zeta(x)\boldsymbol{\mathcal{O}}\Psi^a_\zeta(x)\right)$, при любом $[\boldsymbol{\mathcal{O}}, (\sigma_\zeta\epsilon)] = 0$:

$$i\partial_t \Psi^a_\zeta(x) = \left[\zeta\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}\right) + 2\lambda\left(\Psi^{\dagger b}_{-\zeta}(x)(\sigma_{-\zeta}\epsilon)\Psi^b_{-\zeta}(x)\right)(\sigma_\zeta\epsilon)\right]\Psi^a_\zeta(x), \tag{3.100}$$

$$i\partial_t\left(\Psi^{\dagger a}_\zeta(x)\boldsymbol{\mathcal{O}}\Psi^a_\zeta(x)\right) = \Psi^{\dagger a}_\zeta(x)\zeta\left[\boldsymbol{\mathcal{O}}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}\right) - \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}^\dagger\right)\boldsymbol{\mathcal{O}}\right]\Psi^a_\zeta(x),$$

$$\text{откуда:}\quad \partial_\nu\left(\Psi^{\dagger a}_\zeta(x)\sigma^\nu_\zeta\Psi^a_\zeta(x)\right) = 0, \quad \partial^\nu j^a_{\nu(\Psi)}(x) = 0, \tag{3.101}$$

$$\text{при:}\quad \left(\Psi^{\dagger a}_{-\zeta}(x)(\sigma_{-\zeta}\epsilon)\Psi^a_{-\zeta}(x)\right) \Longrightarrow \left(\phi^{\dagger a}_{-\zeta}(x)(\sigma_{-\zeta}\epsilon)\phi^a_{-\zeta}(x)\right), \tag{3.102}$$

нетрудно убедиться, что блочно-диагональная структура (3.97) оператора (3.34) воспроизводится в процессе его эволюции (3.24)–(3.26):

$$\begin{pmatrix} \Psi^a_+(\mathbf{x},T) \\ \Psi^a_-(\mathbf{x},T) \end{pmatrix} = \int d^3\mathrm{y} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{(\phi_-)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_{(\phi_+)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^a_+(\mathbf{y},0) \\ \phi^a_-(\mathbf{y},0) \end{pmatrix}. \tag{3.103}$$

Повторяя преобразования (3.31)–(3.34) и (3.78)–(3.88) для каждого из

$$\mathcal{Y}_{(\phi_\zeta)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) \Longrightarrow <\mathbf{x}|\,\mathbf{T_x}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{T}_{\phi_\zeta}\ \cdot \tag{3.104}$$

$$\cdot\left(\exp\left\{i\int_0^T d\eta\left[\zeta\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}\right) - 2\lambda(\sigma_{-\zeta}\epsilon)\left(\phi^\dagger_\zeta(\mathbf{X},\eta)(\sigma_\zeta\epsilon)\phi_\zeta(\mathbf{X},\eta)\right)\right]\right\}\right)|\mathbf{y}>,$$

– этих блоков в отдельности, придем к следующим представлениям:

$$\mathcal{Y}_{(\phi_\zeta)}(T,\mathbf{x}|\mathbf{y},0) = \int\limits_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\, \hat{\mathcal{L}}_{\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \det\left[\mathbf{I} - \widehat{\boldsymbol{Z}}_\zeta\right] \cdot \tag{3.105}$$

$$\cdot\, \mathbf{N}_{\phi_\zeta}\left(\exp\left\{\int\limits_0^T dt \int\limits_0^T d\xi \Big(\phi_\zeta^\dagger(x(t))\, \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi)\, \phi_\zeta(x(\xi))\Big)\right\}\right), \quad \text{где:}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) = \int \mathcal{D}\mathbf{p}(\eta) \mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} \exp\left\{i\int\limits_0^T d\eta \Big[\Big(\mathbf{p}(\eta)\cdot(\dot{\mathbf{x}}(\eta)+\zeta\boldsymbol{\sigma})\Big)\Big]\right\}, \tag{3.106}$$

$$\int\limits_{\mathbf{x}(y_0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(x_0)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta)\, \hat{\mathcal{L}}_{-\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(x_0|y_0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) = \theta(x_0-y_0)\Delta_{(\phi_\zeta)}(x-y), \tag{3.107}$$

$$\Delta_{(\phi_\zeta)}(x-y) = e^{-i(x_0-y_0)\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{x}})}\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \tag{3.108}$$

$$= \left[I\partial_{x^0} - i\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{x}})\right] D_0(x-y) = (\sigma_{-\zeta}\,\partial_x)\,\frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2\pi}\,\delta\left((x-y)^2\right),$$

$$\Delta^{(C)}_{(\phi_\zeta)}(x-y) = (\sigma_\zeta\,\partial_x)^{-1}\delta_4(x-y) = \frac{2i}{(2\pi)^2}\,\frac{(\sigma_{-\zeta}\,(x-y))}{\left[(x-y)^2-i\epsilon\right]^2}\,, \tag{3.109}$$

$$\widehat{Z}_\zeta(t|\xi) = -2i\lambda\Delta^{(C)}_{(\phi_\zeta)}\Big(x(t)-x(\xi)\Big)(\sigma_\zeta\,\epsilon)(u(\xi)\,\epsilon), \tag{3.110}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi) = -2i\lambda(u(t)\,\epsilon)(\sigma_\zeta\,\epsilon)\,\delta(t-\xi), \tag{3.111}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi) = \widehat{\mathcal{I}}^0_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi) + \int\limits_0^T d\tau\, \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\tau)\, \widehat{Z}_\zeta(\tau|\xi). \tag{3.112}$$

Причинные выражения вида (3.93)-(3.96) для первых членов разложения экспоненты (3.105) также имеют место после выделения $\exp\left(-Tr\left\{\widehat{\boldsymbol{Z}}_\zeta\right\}\right)$, с заменой $\Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x|y) \longmapsto \Delta_{(\phi_{-\zeta})}(x-y)$ (3.108), и $\widehat{Z}(t|\xi) \longmapsto \widehat{Z}_\zeta(t|\xi)$ (3.110). То есть в каждой из соответствующих петель присутствуют функции распространения обоих полей $\phi_\pm(x)$.

В отличие от работ [139]-[143], для вычисления спинорных функционалов (3.106) как целого воспользуемся "естественной" регуляризацией массовым членом (3.72) при объединении их в представлении (3.81), (3.98):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{L}}_{-\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{L}}_{+\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \end{pmatrix} = \lim_{m\to 0} \hat{\mathcal{L}}_{\widehat{E}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right), \tag{3.113}$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{E}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)=\prod_{\eta=T}^{0}\left\{\int\frac{d^3\mathrm{p}_\eta}{(2\pi)^3}\exp\left[i\tau(\mathbf{p}_\eta\cdot\dot{\mathbf{x}}_\eta)-i\tau\widehat{E}(\mathbf{p}_\eta)\right]\right\},\quad \tau=\frac{T}{N}.$$

Тогда, с помощью (3.73)-(3.75) интегралы по $\mathbf{p}_\eta$ вычисляются в виде:

$$\left[I\partial_\tau-(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{z}})-im\gamma^0\right]\frac{\varepsilon(\tau)}{2\pi}\Big[\delta(\tau^2-\mathbf{z}^2)+O(m^2)\Big],\quad \mathbf{z}=\tau\dot{\mathbf{x}}_\eta. \qquad (3.114)$$

Отсюда, при $\tau\to+0$, $m\to0$, находим:

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)=\aleph\prod_{\eta=T}^{0}\left\{\delta^{(1)}\left(1-\dot{\mathbf{x}}^2(\eta)\right)\,\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2}\right\}, \qquad (3.115)$$

$$\text{или:}\quad \widehat{\mathcal{L}}_{\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right)=\Im[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\,\aleph\prod_{\eta=T}^{0}\Big\{\delta^{(1)}\left(1-\dot{\mathbf{x}}^2(\eta)\right)\Big\}, \qquad (3.116)$$

где $\aleph$- нормировочная константа. Так как оба сомножителя с правой стороны этого равенства определяются единым функциональным интегралом (3.106) в его левой части, то для функционала $\Im[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)]$ необходимо принять:

$$\dot{\mathbf{x}}^2(\eta)=1,\quad \text{откуда}\quad (\ddot{\mathbf{x}}(\eta)\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))=0. \qquad (3.117)$$

Тогда, для соседних сомножителей в моменты η и $\eta+\tau$ имеем:

$$\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta+\tau))}{2}\cdot\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2}=$$
$$=\frac{I+\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta+\tau)\Big)\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta)\Big)}{2}\cdot\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2}=$$
$$=\left[I+\tau\frac{i}{2}\Big((\ddot{\mathbf{x}}(\eta)\times\dot{\mathbf{x}}(\eta))\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\right]\cdot\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2}+O(\tau^2),$$

что позволяет получить для него представление:

$$\Im[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)]=\prod_{\eta=T}^{0}\left\{\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2}\right\}= \qquad (3.118)$$

$$=\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^T d\eta\Big((\ddot{\mathbf{x}}(\eta)\times\dot{\mathbf{x}}(\eta))\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\right\}\,\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(0))}{2}= \qquad (3.119)$$

$$=\frac{I-\zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(T))}{2}\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^T d\eta\Big((\ddot{\mathbf{x}}(\eta)\times\dot{\mathbf{x}}(\eta))\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\right\}.$$

В работах [139], [143] он был получен также в виде:

$$\Im_{D=3}[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)] = \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(T))}{2}\cdot\frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{x}}(0))}{2}\ \cdot \tag{3.120}$$

$$\cdot\left(\frac{I + (\dot{\mathbf{x}}(T)\cdot\dot{\mathbf{x}}(0))}{2}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{i}{2}\Phi_{D=3}\Big(C[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)] + \partial C\Big)\right\},$$

$$\text{где:}\ \ \Phi_{D=3}\Big(C[\mathbf{n}(\ell)] + \partial C\Big) = \int\limits_0^{2\pi} d\ell\dot{\phi}(\ell)(1-\cos\theta(\ell)), \tag{3.121}$$

$$\mathbf{n}(\ell) = \mathbf{n}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\,,$$

является фазой Берри [148], связанной с адиабатической эволюцией конца единичного вектора $\mathbf{n}(\ell)$, $0 \le \ell \le 2\pi$, по замкнутому контуру от начального положения вектора скорости $\mathbf{n}(0) = \zeta\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{n}(2\pi)$ к конечному положению вектора скорости $\mathbf{n}(\pi) = \zeta\dot{\mathbf{x}}(T)$ вдоль контура $C[\zeta\dot{\mathbf{x}}(\eta)]$ на единичной сфере, и обратно, по кратчайшей дуге ее большого круга ∂C. Геометрически фаза представляет собой площадь, ограниченную этим замкнутым контуром на единичной сфере – вырезанный им телесный угол $\Omega(C+\partial C)$. Таким образом, адиабатическое рассмотрение оказывается вполне адекватным при вычислении спинорного функционала (3.106), что указывает на его уместность и при определении остальных сомножителей в (3.105). Отметим, что сам единичный вектор скорости $\mathbf{u}(\eta) = \dot{\mathbf{x}}(\eta)$ *не описывает*, вообще говоря, замкнутого контура $C + \partial C$, поэтому натуральный параметр $0 \le \eta \le T$ траектории $\mathbf{x}(\eta)$ связан с эволюцией только по контуру C.

Используя замкнутость алгебры матриц Паули, матричную T- экспоненту в (3.119) можно заменить обычной:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\left\{\frac{i}{2}\int\limits_0^T d\eta\Big((\dot{\mathbf{u}}(\eta)\times\mathbf{u}(\eta))\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\right\} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\Big(\boldsymbol{w}(T)\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\right\}, \tag{3.122}$$

где вектор $\boldsymbol{w}(t) = r(t)\boldsymbol{v}(t)$, $|\boldsymbol{v}(t)| = 1$, определяется из уравнения

$$(\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v})(1-\cos r) - \dot{\boldsymbol{v}}\sin r - \boldsymbol{v}\dot{r} = (\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u})\,,\qquad r(0) = 0. \tag{3.123}$$

Для его вывода обозначим Т-экспоненту слева в (3.122) через $\mathbf{O}(T)$, а справа,– через $\widehat{\mathbf{O}}(T)$. Первая подчиняется уравнению:

$$\dot{\mathbf{O}}(t) = i\Big((\dot{\mathbf{u}}(t)\times\mathbf{u}(t))\cdot\mathbf{S}\Big)\mathbf{O}(t),\quad \mathbf{O}(0)=\mathbf{I},\quad \mathbf{S}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2},\quad \text{а вторая:}$$
$$\dot{\widehat{\mathbf{O}}}(t) = \widehat{\mathcal{W}}(t)\widehat{\mathbf{O}}(t),\quad \widehat{\mathcal{W}}(t) = -i\int\limits_0^1 d\xi e^{-i\xi(\mathbf{S}\boldsymbol{w}(t))}\Big(\mathbf{S}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t)\Big)e^{i\xi(\mathbf{S}\boldsymbol{w}(t))}.$$

Поскольку, под интегралом возник оператор спиновых вращений, немедленно получаем для $\widehat{\mathcal{W}}(t)$ выражение из левой части (3.123), умноженное на $i\mathbf{S}$. Равенство (3.122) означает [135]: $\widehat{\mathcal{W}}(t) = i\Big((\dot{\mathbf{u}}(t)\times\mathbf{u}(t))\cdot\mathbf{S}\Big)$, т.е. уравнение (3.123).

Как известно, фаза Берри связана с наличием кручения у траектории [148]. Будем искать единичный вектор $\boldsymbol{v}(t)$ в виде разложения по реперу Френе [149] единичных векторов $\mathbf{u},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}$– касательной, нормали и бинормали, связанных, согласно (3.117), с движением по траектории $\mathbf{x}(\eta)$:

$$\mathbf{u}=\dot{\mathbf{x}}(\eta),\quad \boldsymbol{\beta}=(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\nu}),\quad \boldsymbol{\nu}=(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{u}),\quad \mathbf{u}=(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}): \tag{3.124}$$
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}\left(\vartheta(t),\varphi(t)\right)=\mathbf{u}\sin\vartheta\cos\varphi+\boldsymbol{\nu}\sin\vartheta\sin\varphi+\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta. \tag{3.125}$$

Подставляя (3.125) в (3.123), с помощью (3.124) и уравнений Френе [149]:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}\\ \dot{\boldsymbol{\nu}}\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \kappa\\ 0 & -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\nu}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}, \tag{3.126}$$

где k- ее кривизна, а κ- ее кручение, также зависящие от t, после некоторых преобразований придем к системе уравнений:

$$\dot{r}=k\cos\vartheta,\qquad \dot{\varphi}=\kappa\cot\vartheta\cos\varphi-\frac{k}{2},\qquad \dot{\vartheta}=\kappa\sin\varphi-\frac{k}{2}\sin\vartheta\cot\frac{r}{2}. \tag{3.127}$$

Эту систему можно представить в "почти линейном" виде, если с разложением (3.125) в базисе Френе ассоциировать разложение *в неподвижном* базисе для вектора $\boldsymbol{R}(t)$ с компонентами:

$$\boldsymbol{R}(t) = (X, Y, Z) \equiv \sin\frac{r}{2}\ (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)\,, \tag{3.128}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k}{2} & 0 \\ -\dfrac{k}{2} & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k}{2}\sqrt{1-\boldsymbol{R}^2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}(0) = 0. \tag{3.129}$$

Полученная система, хотя и похожа на уравнения Френе (3.126), имеет совершенно иной смысл, так как описывает изменение *компонент* вектора в неподвижном базисе, а не самих векторов этого базиса. Отметим также уменьшение вдвое величины, соответствующей кривизне. Для произвольной зависимости от t кривизны и кручения эта система, безусловно, не проще исходной T-экспоненты. Однако, она упрощается, если, в адибатическом приближении, считать их медленно меняющимися функциями, и полностью линеаризуется, если таковым же принять и нелинейный неоднородный член, полагая его равным значению при $t = 0$, т.е. $k/2$. Тогда, решение (3.129), удовлетворяющее начальному условию имеет вид:

$$X(t) = \frac{k^2\kappa}{4\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right), \quad Y(t) = \frac{k\kappa}{2\omega^2}\left(1 - \cos\omega t\right), \tag{3.130}$$

$$Z(t) = \frac{k^3}{8\omega^2}\left(t + \frac{4\kappa^2}{k^2}\frac{\sin\omega t}{\omega}\right), \quad \omega = \sqrt{\kappa^2 + \frac{k^2}{4}},$$

Отметим, что без учета неоднородного члена в (3.129) было бы невозможно удовлетворить начальному условию. Получающееся отсюда, с учетом (3.125), громоздкое выражение для $\boldsymbol{w}(T)$ выписывать не будем. Ограничимся пределом этого выражения для "почти прямых" траекторий при $k \simeq \kappa$ и $\kappa T \ll 1$. Тогда: $\boldsymbol{w}(T) \simeq \boldsymbol{\beta}(T)\,\kappa T$, что и по величине и по направлению вполне согласуется с (3.119)-(3.121). Поскольку длина траектории, в принятых единицах, равна T, то, согласно формуле Гаусса-Бонне [149] в случае постоянного кручения, для замкнутого контура C имеем: $\kappa T = \Omega(C)$, то есть телесный угол, определяющий фазу Берри.

2.4 Модель Тирринга.

В то время, как в четырех измерениях имеется лишь слабая надежда с помощью преобразований Фирца по всем имеющимся индексам [28] установить эквивалентность того или иного 4-х фермионного взаимодействия одному из вариантов (I)–(IV), в двух измерениях, как показано еще Тиррингом, все 4-х фермионные взаимодействия, в отсутствие дополнительных индексов внутренних симметрий, в существенном [75] эквивалентны между собой. Это, безусловно, проливает свет на решаемость модели Тирринга с точки зрения предлагаемого здесь подхода, поскольку, непосредственно на уравнениях движения (3.135), (3.136), она оказывается прямым двумерным аналогом киральной модели из предыдущего пункта.

Действительно, для двумерного варианта взаимодействия типа (IV), (3.99), в соответствующем "киральном" представлении [80], [150], последовательно имеем вместо (3.97)–(3.102): (суммирования по ζ нигде нет!)

$$\gamma^0 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\alpha}^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.131}$$

$$\widehat{\alpha}^1 \Longrightarrow \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x^\zeta = t + \zeta \mathrm{x}^1, \quad \zeta = \pm 1, \tag{3.132}$$

$$\sigma^\nu_\zeta \mapsto \wp^\nu_\zeta = (\wp^1_\zeta, \wp^0_\zeta) = (\zeta, 1), \quad (\wp_\zeta \epsilon)(\wp_{-\zeta}\epsilon) = (\epsilon^0)^2 - (\zeta\epsilon^1)^2 = \epsilon^2 = 1, \tag{3.133}$$

$$j^\nu_{(\Psi)}(x) = \left(\overline{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x)\right), \ \mathrm{H}_{I[\Psi]} \longmapsto 2\lambda \left(\Psi^\dagger_+(x)\Psi_+(x)\right)\left(\Psi^\dagger_-(x)\Psi_-(x)\right), \tag{3.134}$$

$$i\partial_t \Psi_\zeta(x) = \left[\zeta \mathbf{P}^1 + 2\lambda\left(\Psi^\dagger_{-\zeta}(x)\Psi_{-\zeta}(x)\right)\right]\Psi_\zeta(x), \quad \text{или:} \tag{3.135}$$

$$\partial_\zeta \Psi_\zeta(x) = -i\lambda\left(\Psi^\dagger_{-\zeta}(x)\Psi_{-\zeta}(x)\right)\Psi_\zeta(x), \ \text{ где } 2\partial_\zeta = \partial_t + \zeta\partial_{\mathrm{x}^1} = \wp^\nu_\zeta \partial_\nu, \tag{3.136}$$

$$\partial_\nu j^\nu_{(\Psi)}(x) = 0, \quad \partial_\nu\left(\Psi^\dagger_\zeta(x)\wp^\nu_\zeta\Psi_\zeta(x)\right) = \partial_\zeta\left(\Psi^\dagger_\zeta(x)\Psi_\zeta(x)\right) = 0, \tag{3.137}$$

$$2\left(\Psi^\dagger_\zeta(x)\Psi_\zeta(x)\right) \Longrightarrow 2\left(\phi^\dagger_\zeta(x)\phi_\zeta(x)\right) = j^\zeta_\phi(x) = j^0_{(\psi)}(x) + \zeta j^1_{(\psi)}(x). \tag{3.138}$$

Таким образом, вектор Маркова-Юкавы ϵ^ν в двумерии автоматически исчезает из гамильтониана взаимодействия. Инвариантные функции свободных полей в двумерии получаются из (3.75), (3.77) отбрасыванием производной по ϱ и умножением на π [75], [80], [150], [152] (γ_e- постоянная Эйлера, μ- фиксированный массовый масштаб, $\epsilon \to +0$):

$$D_m(x) = \frac{\varepsilon(x_0)}{2}\theta(x^2)J_0(m\sqrt{x^2}) = D_m^{(-)}(x) + D_m^{(+)}(x), \quad x^2 = x^\zeta x^{-\zeta}, \tag{3.139}$$

$$D_m^{(C)}(x) = \frac{i}{2\pi}K_0\Big(m\sqrt{i\epsilon - x^2}\Big), \; D_0^{(C)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{i\epsilon - x^2}\right) + \gamma_e\right], \tag{3.140}$$

$$D_0^{(-)}(x) = \frac{1}{4\pi i}\left[\ln\left(\frac{i\epsilon x_0 - \mu^2 x^2}{4}\right) + 2\gamma_e\right], \quad D_0(x) = \frac{\varepsilon(x_0)}{2}\,\theta(x^2), \tag{3.141}$$

$$\Delta^{(C)}_{0(\psi)}(x)\gamma^0 = (\gamma\partial)D_0^{(C)}(x) = \frac{(\gamma x)}{2\pi i(x^2 - i\epsilon)}, \quad \text{а т.к.} \;\; \partial_\zeta\psi_\zeta(x) = 0, \;\; \text{то:} \tag{3.142}$$

$$\psi_\zeta(x) = \phi_\zeta(x^{-\zeta}), \; \Big\{\phi_{-\zeta}(x^\zeta), \phi^\dagger_{-\zeta'}(y^{\zeta'})\Big\} = \delta_{\zeta\zeta'}\delta(x^\zeta - y^\zeta) = \Delta_{(\phi_{-\zeta})}(x|y), \tag{3.143}$$

$$\langle 0|\,\mathbf{T}\Big(\phi_{-\zeta}(x^\zeta), \phi^\dagger_{-\zeta}(y^\zeta)\Big)\,|0\rangle = \frac{(2\pi i)^{-1}}{x^\zeta - y^\zeta - i\epsilon\varepsilon(x_0 - y_0)} = \Delta^{(C)}_{(\phi_{-\zeta})}(x|y), \tag{3.144}$$

$$\langle 0|\;\phi_{-\zeta}(x^\zeta)\phi^\dagger_{-\zeta}(y^\zeta)\;|0\rangle = \frac{1}{2\pi i}\;\frac{1}{(x^\zeta - y^\zeta - i\epsilon)} = \Delta^{(-)}_{(\phi_{-\zeta})}(x|y). \tag{3.145}$$

Как символические представления (3.24)–(3.26), так и функциональные представления (3.34)–(3.36), вида (3.103)–(3.105), приводят к одним и тем же выражениям для решения ГУ (3.135), (3.138):

$$\begin{aligned} &\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1, T) \equiv \widehat{\Psi}_\zeta(x^\zeta, x^{-\zeta}) = \int d\mathrm{y}^1 \mathcal{Y}_{(\phi_{-\zeta})}(T, \mathrm{x}^1|\mathrm{y}^1, 0)\,\Psi_\zeta(\mathrm{y}^1, 0) = & (3.146)\\ &= \mathbf{T}_\mathrm{x}\mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\left(\exp\left\{-i\int_0^T d\eta\left[\zeta\mathbf{P}^1_\mathrm{x} + \lambda j_\phi^{-\zeta}(\mathrm{x}^1, \eta)\right]\right\}\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1, 0)\right) = \\ &= e^{-iT\zeta\mathbf{P}^1_\mathrm{x}}\mathbf{T}_\mathrm{x}\mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\left(\exp\left\{-i\lambda\int_0^T d\eta\, e^{i\eta\zeta\mathbf{P}^1_\mathrm{x}} j_\phi^{-\zeta}(\mathrm{x}^1, \eta)e^{-i\eta\zeta\mathbf{P}^1_\mathrm{x}}\right\}\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1, 0)\right) \\ &\Longrightarrow \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\exp\left\{-i\lambda\int_0^T d\eta\, j_\phi^{-\zeta}\left(\mathrm{x}^1 - \zeta(T - \eta), \eta\right)\right\}\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1 - \zeta T, 0), & (3.147)\\ &\widehat{\Psi}_\zeta(x^\zeta, x^{-\zeta}) = \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\exp\left\{-i\lambda\int_{-x^{-\zeta}}^{x^\zeta} dy^\zeta\left(\phi^\dagger_{-\zeta}(y^\zeta)\phi_{-\zeta}(y^\zeta)\right)\right\}\widehat{\Psi}_\zeta(-x^{-\zeta}, x^{-\zeta}). \end{aligned}$$

В операции сдвига (3.79)–(3.81) теперь нет необходимости, поскольку нет соответствующего матричного упорядочения $\mathbf{T}_\sigma$, в силу чего, также, (3.107), с учетом (3.36), сводится к (3.143), поскольку (3.106) приводится теперь к виду:

$$\widehat{\mathcal{L}}_{-\zeta\boldsymbol{\sigma}}\left(T|0,[\dot{\mathbf{x}}(\eta)]\right) \longmapsto \widehat{\mathcal{L}}_{-\zeta}\left(T|0,[\dot{\mathrm{x}}^1(\eta)]\right) = \prod_{\eta=T}^{0}\Big\{\delta\left(\dot{\mathrm{x}}^1(\eta)-\zeta\right)\Big\}, \tag{3.148}$$

а эволюция ГП определяется теперь оператором (3.146) в виде:

$$\mathcal{Y}_{(\phi_{-\zeta})}(T,\mathrm{x}^1|\mathrm{y}^1,0) = \tag{3.149}$$

$$= \int\limits_{\mathrm{x}^1(0)=\mathrm{y}^1}^{\mathrm{x}^1(T)=\mathrm{x}^1} \mathcal{D}\mathrm{x}^1(\eta)\,\widehat{\mathcal{L}}_{-\zeta}\left(T|0,[\dot{\mathrm{x}}^1(\eta)]\right)\mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\exp\left\{-i\lambda\int\limits_0^T d\eta\, j_{\phi}^{-\zeta}\left(\mathrm{x}^1(\eta),\eta\right)\right\} =$$

$$= \delta\left(\mathrm{x}^1-\zeta T-\mathrm{y}^1\right)\,\mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}\exp\left\{-i\lambda\int\limits_0^T d\eta\, j_{\phi}^{-\zeta}\left(\mathrm{x}^1-\zeta(T-\eta),\eta\right)\right\}. \tag{3.150}$$

Таким образом, в роли пробного физического поля $\psi(x)$, так же как и в предыдущей модели, выступает одночастичное безмассовое фермионное поле $\psi_\zeta(\mathrm{x}^1,t)=\phi_\zeta(x^{-\zeta})$ (3.140)–(3.145), представимое в виде разложения по операторам рождения и уничтожения [150]:

$$\psi_\zeta(x)=\phi_\zeta(x^{-\zeta})=\int\frac{d\mathrm{p}^1}{\sqrt{2\pi}}\,\theta(\zeta\mathrm{p}^1)\left[e^{-i(px)}\mathrm{a}_\zeta(\mathrm{p}^1)+e^{i(px)}\mathrm{b}_\zeta^\dagger(\mathrm{p}^1)\right], \tag{3.151}$$

$$\left\{\mathrm{a}_\zeta(\mathrm{p}^1),\mathrm{a}_{\zeta'}^\dagger(\mathrm{q}^1)\right\}=\left\{\mathrm{b}_\zeta(\mathrm{p}^1),\mathrm{b}_{\zeta'}^\dagger(\mathrm{q}^1)\right\}=\delta_{\zeta\zeta'}\delta(\mathrm{p}^1-\mathrm{q}^1), \tag{3.152}$$

$$\left\{\mathrm{a}_\zeta(\mathrm{p}^1),\mathrm{b}_{\zeta'}^{\#}(\mathrm{q}^1)\right\}=0,\quad \mathrm{b}^{\#}=\mathrm{b},\mathrm{b}^\dagger,\quad (px)=|\mathrm{p}^1|t-\mathrm{p}^1\mathrm{x}^1.$$

Начальные условия к (3.146)–(3.147) также естестственно идентифицируются в терминах этих полей в виде:

$$\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1-\zeta T,0)\equiv\widehat{\Psi}_\zeta(-x^{-\zeta},x^{-\zeta})\Longrightarrow\phi_\zeta(x^{-\zeta}). \tag{3.153}$$

Обычное решение модели [75], отвечающее интегрированию уравнений (3.136), (3.138), будет отличаться от (3.147) множителем, связанным с выбором иного нижнего предела интегрирования: $-x^{-\zeta}\mapsto-\infty$ по dy^ζ, или $0 \mapsto -\infty$ по $d\eta$. Это принципиальное отличие связано с иной интерпретацией физических полей $\phi_\zeta(x^{-\zeta})$, – как асимптотических $in-$ полей:

$$\Psi_\zeta(\mathrm{x}^1 - \zeta T, -\infty) \equiv \widehat{\Psi}_\zeta(-\infty, x^{-\zeta}) \stackrel{(\mathrm{w})}{\Longrightarrow} \phi_{\zeta in}(x^{-\zeta}), \tag{3.154}$$

имеющей место, вообще говоря, лишь в слабом смысле. Несмотря на то, что, формально для (3.138), в силу (3.143):

$$\left[j^\zeta_\phi(\mathrm{x}^1, \eta), j^\zeta_\phi(\mathrm{y}^1, t)\right] = 0, \tag{3.155}$$

неопределенность произведения полей в (3.138) из-за $c-$ числовой сингулярности (3.144), (3.145) не позволяет просто опустить в решении (3.147), (3.150) символ упорядочения $\mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}}$. Его нужно заменить, при переходе к свободным скалярному и псевдоскалярному полям $\rho(x)$ и $\Sigma(x)$:

$$\begin{aligned} &dx^\zeta\, j^{-\zeta}_\phi(x^\zeta) \equiv dx^\zeta\, 2\Big(\phi^\dagger_{-\zeta}(x^\zeta)\, \phi_{-\zeta}(x^\zeta)\Big) = \\ &= dx_\nu \Big(\overline{\psi}(x)\gamma^\nu(I - \zeta\gamma^5)\psi(x)\Big) \Longrightarrow dx_\nu \partial^\nu \Big(\rho(x) - \zeta\Sigma(x)\Big), \end{aligned} \tag{3.156}$$

символом соответствующего нормального произведения [75], [80]. Очевидно, второй член разложения такой нормальной экспоненты от (3.150) будет, как и прежде, в (3.42), (3.95), (3.105), содержать первые степени этих "составных" полей, отвечающих фермионным связанным состояниям.

Таким образом, основное наблюдение предлагаемого здесь метода линеаризации ГУ выявляется как раз при сравнении этой процедуры в нерелятивистской модели 4-х фермионного взаимодействия и в модели Тирринга. Для линеаризации ГУ обеих моделей существенно, что в теории имеется только фермионное поле, но в первой она тесно связана с диагонализуемостью гамильтониана уже на одночастичных физических полях, а во второй обязана разделению переменных для прошлого и будущего светового конуса. Не трудно проследить аналогичный механизм линеаризации ГУ и в другой известной точно решаемой 2D модели взаимодействия двух различных массивных ферми-полей, – модели Федербуша [75], в которой, по видимому впервые, в том же контексте, что и в данной работе, фактически были явно использованы одночастичные "пробные" шредингеровские поля вида (3.17).

3 Проблема связанных состояний.

В главе 1, на примере $N\Theta$ модели было показано, что собственные состояния рассеяния полного гамильтониана просто совпадают с двухчастичными $in-$, $out-$ состояниями (и аналогично для связанных состояний), если представления коммутационных соотношений остаются неизменными в процессе эволюции, т.е., если полный и кинетический гамильтонианы могут быть реализованы (и диагонализованы) в одном и том же гильбертовом пространстве. Это невозможно в релятивистском случае, поскольку представления ККС для (гейзенберговских [81]) $in-$ и $out-$ операторов теперь отличаются на самом деле от представлений ККС для "голых" свободных или одночастичных "пробных" физических полей (3.16)-(3.18), диагонализующих, соответственно, или только "затравочную" часть, или весь "перенормированный" кинетический гамильтониан (3.18). Поэтому, при определении БС волновых функций связанных состояний и рассеяния в терминах $in-$ и $out-$ состояний приходится использовать асимптотические условия слабой сходимости LSZ [153]. То есть эти *in-*, *out-* состояния являются собственными состояниями только в слабом смысле, как в ($\star$) Введения или в (1.93).

Интересуясь здесь прежде всего проблемой связанных состояний, попытаемся непосредственно перенести результаты предыдущих двух глав на релятивистский случай (3.16)-(3.18). Заметим, прежде всего, что основное равенство нерелятивисткого случая, – связь между волновой функцией рассеяния и коэффициентной функцией динамического отображения вида (1.86), (2.26), имеет существенно асимптотический характер и содержится в нелинейном интегральном соотношении (1.100), (2.32) между ними. Это соотношение, в свою очередь, является элементарным следствием двух форм записи общего вида динамического отображения (2.15), (2.17) и *сильных – операторных* условий стабильности вакуума и одночастичного состояния (1.21), (2.19), которые, как видно из предыдущего, являются простым отражением диагональности полного гамильтониана на этих состояниях, т.е. отсутствия низших флуктуационных членов.

Таким образом, чтобы "перенести" эти формулы на релятивистский случай, необходимо так распорядиться свободой в выборе перенормировочной параметризации (3.21), чтобы пробные поля (3.16)-(3.18) оптимально подходили на роль диагонализующих. Другими словами, чтобы вклад недиагональных (флуктуационных) членов гамильтониана взаимодействия в терминах этих полей был, в некотором смысле, пренебрежимо мал в низших: нуль-, одно-, двух- частичных секторах (смотри Введение). Пренебрегая ими в первом приближении, получаем возможность одновременной диагонализации такого (нелокального) "полного" и кинетического гамильтонианов в вакуумном и одночастичном секторе, действующих тогда в одном гильбертовом пространстве, – над одним вакуумом, что вновь приводит к условиям вида (2.19) или (4.33) (ниже) для "повернутых" операторов рождения и уничтожения, составляющих теперь единое гейзенберговское поле (4.33). Тогда для него условиями стабильности вакуума и одночастичных состояний будут равенства:

$$\Psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)\ |0\rangle \Longrightarrow \psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)\ |0\rangle; \qquad \Psi^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{x},t)\ |0\rangle \Longrightarrow \psi^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{x},t)\ |0\rangle. \tag{3.157}$$

Это позволяет для одновременно́й БС волновой функции, аналогично (2.30), (2.31), получить:

$$\langle 0|\ \Psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)\Psi^b_\beta(-\mathbf{x},t)\ |\ 2,\mathcal{P}\rangle = e^{-itW_2(\mathcal{P})}\tilde{\chi}^{(\mathcal{P})ab}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \tag{3.158}$$
$$= e^{-itW_2(\mathcal{P})}\langle 0|\ \psi^a_\alpha(\mathbf{x},0)\psi^b_\beta(-\mathbf{x},0)\ |\ 2,\mathcal{P}\rangle = \langle 0|\ \psi^a_\alpha(\mathbf{x},t)\Psi^b_\beta(-\mathbf{x},t)\ |\ 2,\mathcal{P}\rangle.$$

Подстановка в последнее выражение разложения Хаага для динамического отображения $\Psi[\psi]$, например, (3.103), (3.105), должна, вероятно, привести к интегральным соотношениям вида (1.100), (2.32) для отдельных частотных частей БС волновой функции, откуда предельным переходом $t \to \pm\infty$ будет вытекать их искомая связь вида (1.86), (2.26) с его коэффициентными функциями. Включение флуктуационных членов по теории возмущений должно лишь слегка нарушать эту идилию, приводя к конечной ширине связанных состояний, определеяемых, как обычно, полюсами в амплитудах волновых функций рассеяния.

Заметим в заключении, что соотношения (3.157) и (3.158) приводят к совпадению лишь всех двухточечных функций (Грина и Уайтмана) для гейзенберговских и физических полей. Вакуумные средние трех и более полей уже не будут одинаковыми в соответствии с известной теоремой о реконструкции теории поля по *всем* ее функциям Уайтмана [80], [91].

4 Выводы.

Как известно, основную роль при построении решений двумерных моделей Тирринга и Швингера сыграло выяснение полевого состава и свойств имеющихся в модели фермионных токов [75], [80]. Во всех описанных выше примерах линеаризации ГУ делается попытка конструктивно ответить на аналогичный вопрос: Из какого поля построен фермионный ток в данной модели? Такая постановка вопроса правомерна не только в $N\Theta$– модели и моделях 4-х фермионного взаимодействия. Она правомерна, например, в КЭД, если учесть что сохранение фермионного векторного тока также является там следствием уравнений движения и имеет вид равенства (3.12). Однако, во-первых, этот ток *не содержится* непосредственно в ГУ для ферми-поля, что, в отсутствие операторной диагонализуемости лишает нас возможности самосогласованных предположений о его структуре и операторных начальных условиях. Во-вторых, у него имеются теперь различные, не коммутирующие между собой компоненты, в формировании которых, наряду с ферми-полями, также равноправно теперь участвуют *независимые* операторы квантованного ЭМП (ток смещения); например, в модели Швингера полный оператор тока складывается аддитивно из тока свободных фермионов и оператора ЭМП в калибровке Лоренца [150], [151]. Преодоление этих трудностей потребовало бы не только вновь деформировать исходный гамильтониан взаимодействия к одной из моделей типа Ли [76], либо привлечь вновь в теорию понятие операторного равенства в слабом смысле, но и как-то избавиться от этих операторов ЭМП. Поскольку обмен чисто поперечными фотонами не приводит к формированию связанного состояния и взаимодействие с ними оказывается чисто флуктуационным, отвечающим лишь за его распад или аннигиляцию, то для этой цели проще всего проинтегрировать производящий функционал по поперечному фотонному полю (в кулоновской калибровке), что возвращает нас к эффективной 4-х фермионной теории [47]-[53].

Глава 4

Неэквивалентные представления и симметрии.

В этой главе предложена нерелятивистская четырехфермионная модель со взаимодействием векторных токов с нетривиальной внутренней $SU(2)\times SU(2)\times U(1)$ симметрией, допускающая, как будет показано далее, непосредственную постановку и точное решение задачи на собственные значения гамильтониана в N – частичном секторе при $N=1,2$, и численное решение ее при $N=3$.

Здесь изучены три различные диагонализующие операторных реализации, отвечающие различным неэквивалентным представлениям КАС. Найдены энергии вакуумного и одночастичного состояний. Проведен подробный анализ исходной $SU(2)\times SU(2)\times U(1)$ - симметрии гамильтониана для всех трех реализаций. Показано, как в одной из них происходит спонтанное нарушение симметрии. Получены операторы соответствующих голдстоуновских бозонов как составных состояний двухфермионой системы. Дано обобщение квазиспиновой алгебры. Изучены неэквивалентные представления КАС над когерентными суперпозициями вырожденных вакуумных состояний. Прослежены различные варианты восстановления симметрии, процесс "подмены" одной спонтанно нарушенной симметрии другой и предельный переход от "кваркового" базиса к "адронному".

1 Мотивировка модели и нерелятивистский предел.

Как указывалось во Введении, одной из целей данной работы является построение "КХД- мотивированной" нерелятивистской модели контактного 4-х фермионного взаимодействия, точно решаемой в двухчастичном секторе при наличии спонтанного нарушения симметрии. В качестве прообраза такой модели рассмотрим гамильтониан (2.43) из главы 2, но с более богатым набором $SU(2)$ симметрий [5]. Допустим, что фермионное поле имеет помимо "изотопического" индекса $\alpha = 1,2$ еще один индекс "цветовой" симметрии $a = 1,2$. Эти названия довольно условны, как и сама интерпретация этих симметрий в нерелятивистском пределе. Действительно, отвлекаясь от сложной проблемы КХД- обоснования релятивистского 4-х фермионного взаимодействия [154], рассмотрим, например, релятивистские поправки, возникающие в нерелятивистском пределе из суммы релятивистских скалярного и векторного взаимодействий вида:

$$(\overline{\psi^a}(x)\psi^a(x))^2 + (\overline{\psi^a}(x)\gamma^\nu\psi^a(x))^2 \Longrightarrow 2\Big(S_\Psi(x)\Big)^2 - [\boldsymbol{J}_\Psi(x) - \boldsymbol{\zeta}_\Psi(x)]^2, \quad (4.1)$$

где в стандартном представлении γ - матриц принято:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^a(x) = \begin{bmatrix} \Psi^a(x) \\ \Xi^a(x) \end{bmatrix}, \quad \Xi^a_\alpha(x) \simeq \frac{1}{2mc}\left((\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P})\Psi^a(x)\right)_\alpha, \qquad (4.2)$$

но, в отличие от (2.35), токи определены теперь как (подразумевается свертка по повторяющимся α, β):

$$S^a_\Psi(x) = \left(\Psi^{\dagger a}_\alpha(x)\Psi^a_\alpha(x)\right), \quad \boldsymbol{J}^a_\Psi(x) = \frac{1}{2mc}\left(\Psi^{\dagger a}_\alpha(x)\overleftrightarrow{\mathbf{P}}\Psi^a_\alpha(x)\right), \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\zeta}^a_\Psi(x) = \frac{1}{2mc}\left(\boldsymbol{\nabla}\times(\Psi^{\dagger a}_\alpha(x)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\Psi^a_\beta(x))\right),$$
$$S_\Psi(x) = \sum_a S^a_\Psi(x), \quad \boldsymbol{J}_\Psi(x) = \sum_a \boldsymbol{J}^a_\Psi(x), \quad \boldsymbol{\zeta}_\Psi(x) = \sum_a \boldsymbol{\zeta}^a_\Psi(x).$$

Следовательно, структура взаимодействия (2.43) будет воспроизводиться и в случае "подмены" "изотопического" спина обычным (лоренцевым) спином, если пренебречь током спинового намагничивания $\boldsymbol{\zeta}(x)$ по сравнению с током электрического заряда $\boldsymbol{J}(x)$, другими словами, если пренебречь обычными спин-орбитальным и спин-спиновым взаимодействиями. Такое пренебрежение оказывается согласовано с нашим последующим рассмотрением. Можно показать, что аналогичный (4.1) вклад релятивистского псевдоскалярного и аксиально-векторного токов сводится в этом пределе лишь к различным вариантам спин-спинового взаимодействия.

Имея, наконец, в виду также разнообразные схемы расширения симметрии (в том числе цветовой [155]) в объединенных теориях сильного и электрослабого взаимодействий [156], принимаемое здесь допущение, о наличии "остаточной" $SU(2)\ \times\ SU(2)\ \times\ U(1)$ симметрии у 4-х фермионного взаимодействия конституентных (как будет видно ниже) кварков в нерелятивистском пределе, кажется вполне правдоподобным.

2 Симметрии модели.

Поэтому рассмотрим следующий гамильтониан с токами (4.3) (отличие в двойку коэффициента при $S(x)$ в (4.1) для дальнейшего роли не играет):

$$\mathrm{H}\{\Psi\} = \int d^3\mathrm{x}\left\{\Psi^{\dagger a}_\alpha(x)\,\mathcal{E}(\mathbf{P})\,\Psi^a_\alpha(x) - \frac{\lambda}{4}\left[\Big(S_\Psi(x)\Big)^2 - (\boldsymbol{J}_\Psi(x))^2\right]\right\}, \qquad (4.4)$$

с фермионными полями $\Psi^a_\alpha(x)$, удовлетворяющими антикоммутационны соотношениям для $a,\alpha=1,2$:

$$\left\{\Psi^a_\alpha(x)\,,\Psi^b_\beta(y)\right\}\big|_{x_0=y_0}=0,\ \ \left\{\Psi^a_\alpha(x)\,,\Psi^{\dagger b}_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}\,\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad(4.5)$$

$$\text{при условии, что}\qquad \left\{\Psi^a_\alpha(x)\,,\Psi^{\dagger b}_\beta(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0;\mathbf{x}=\mathbf{y}}\longrightarrow\delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}\,\frac{1}{V^*}.\ (4.6)$$

Здесь $\mathcal{E}(k)$ - пока произвольный "голый" одночастичный спектр, V^* имеет прежний смысл объема возбуждения, который далее будет связан с параметром импульсного обрезания Λ (4.19).

Гамильтониан (4.4) инвариантен относительно глобальных преобразований симметрии $SU_J(2)\times SU_T(2)\times U(1)$:

$$\begin{aligned}\Psi^a_\alpha(x)&\to{\Psi'}^a_\alpha(x)=e^{i\phi}\Psi^a_\alpha(x),\\ \Psi^a_\alpha(x)&\to{\Psi'}^a_\alpha(x)=W^{ab}\Psi^b_\alpha(x),\\ \Psi^a_\alpha(x)&\to{\Psi'}^a_\alpha(x)=U_{\alpha\beta}\Psi^a_\beta(x),\end{aligned}\qquad(4.7)$$

где $e^{i\phi}$ генерирует $U(1)$ - преобразования, (ϕ - вещественная константа), W^{ab}, $U_{\alpha\beta}$ - постоянные $SU(2)$ - матрицы, генерирующие $SU_T(2)$ и $SU_J(2)$ - преобразования соответственно. Согласно теореме Нетер [79] должны существовать сохраняющиеся токи, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно этих преобразований. Пользуясь стандартной процедурой, находим соответствующие генераторы:

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{J}^i\\ \mathcal{T}^r_{\alpha\beta}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int d^3\mathrm{x}\,\Psi^{\dagger a}_\alpha(x)\left\{\begin{array}{c}(\sigma^i)_{\alpha\beta}\delta^{ab}\\ (\tau^r)^{ab}\end{array}\right\}\Psi^b_\beta(x),\ \ \mathcal{U}=\frac{1}{2}\int d^3\mathrm{x}\,S_\Psi(x),\quad(4.8)$$

где $\mathcal{J}^i$ – генераторы "изотопических" $SU_J(2)$ преобразований, $\mathcal{T}^r=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{T}^r_{\alpha\beta}$ – генераторы дополнительных – "цветовых" $SU_T(2)$ преобразований, и $\mathcal{U}$ – $U(1)$ заряд, а σ^i,τ^r -два независимых набора матриц Паули:

$$\sigma^1_{\alpha\beta}=\tau^1_{ab}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma^2_{\alpha\beta}=\tau^2_{ab}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma^3_{\alpha\beta}=\tau^3_{ab}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\ (4.9)$$

Прямые вычисления дают следующие коммутационные соотношения:

$$\left[\mathcal{J}^i\,,\mathcal{J}^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^k, \quad \left[\mathcal{T}^r\,,\mathcal{T}^l\right] = i\epsilon_{rln}\mathcal{T}^n \tag{4.10}$$

$$\left[\mathcal{J}^i\,,\mathcal{T}^r\right] = \left[\mathcal{J}^i\,,\mathcal{U}\right] = \left[\mathcal{T}^r\,,\mathcal{U}\right] = 0.$$

$$\left[H\,,\mathcal{J}^i\right] = \left[H\,,\mathcal{T}^r\right] = \left[H\,,\mathcal{U}\right] = 0, \tag{4.11}$$

На самом деле симметрия системы гораздо шире и в модели имеется набор из $4 \times 4 = 16$ различных сохраняющихся зарядов

$$Z^{ab}_{\alpha\beta} = \int d^3\mathrm{x}\,\Psi^{\dagger a}_{\alpha}(x)\Psi^b_{\beta}(x), \qquad \left[H\,,Z^{ab}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{4.12}$$

$$\left[Z^{ab}_{\alpha\beta}\,,Z^{cd}_{\gamma\lambda}\right] = Z^{a'b'}_{\alpha'\beta'}\left(\delta^{a'a}\delta_{\alpha'\alpha}\delta^{b'd}\delta_{\beta'\lambda}\delta^{bc}\delta_{\beta\gamma} - \delta^{a'c}\delta_{\alpha'\gamma}\delta^{b'b}\delta_{\beta'\beta}\delta^{ad}\delta_{\alpha\lambda}\right), \tag{4.13}$$

представи́мый также в виде набора из $3\times4+3+1 = 16$ независимых зарядов (4.8), из которых можно выбрать семь генераторов прямого произведения групп (4.10). Возможны, однако, другие варианты выбора из (4.13) прямого произведения (под-) групп $SU(2)$, которые также будут использованы ниже. Более того, в гамильтониане (4.4) исходные симметрии $SU_J(2)$ и $SU_T(2)$ фермионных полей (4.7), очевидно, абсолютно неразличимы "на классическом уровне". Различие может проявиться только при квантовании, например при спонтанном нарушении одной из симметрий. При этом явный вид генераторов зависит от конкретной реализации гейзенберговских полей $\Psi^a_\alpha(x)$ через физические поля и соответствующие операторы рождения и уничтожения.

3 Преобразования Боголюбова и диагонализация.

Вводя гейзенберговы поля (ГП) в импульсном представлении

$$\Psi^a_\alpha(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,e^{i(\mathbf{kx})}\,b^a_\alpha(\mathbf{k},t), \quad \left\{b^a_\alpha(\mathbf{k},t)\,,b^{\dagger b}_\beta(\mathbf{q},t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q}), \tag{4.14}$$

рассмотрим различные операторные реализации ГП при $t=0$ через физические поля, связанные линейными преобразованиями Боголюбова:

$$b^a_\alpha(\mathbf{k},0)=e^{\mathbf{G}}\,d^a_\alpha(\mathbf{k})\,e^{-\mathbf{G}}=u_a\,d^a_\alpha(\mathbf{k})-v_a\epsilon_{\alpha\beta}d^{\dagger a}_\beta(-\mathbf{k}), \tag{4.15}$$

где, конечно, нет суммы по a, $\quad u_a=\cos\theta_a,\ \ v_a=\sin\theta_a$,

$$\Psi^a_\alpha(\mathbf{x},0)=e^{\mathbf{G}}\psi^a_\alpha(\mathbf{x},0)e^{-\mathbf{G}},\ \ \mathrm{H}\{\Psi\}\equiv\mathrm{H}\{b\}=e^{\mathbf{G}}H\{d\}e^{-\mathbf{G}},$$

$$\mathbf{G}=\sum_{a=1,2}\frac{\theta_a}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\int d^3k\left[d^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{k})d^{\dagger a}_\beta(-\mathbf{k})+d^a_\alpha(\mathbf{k})d^a_\beta(-\mathbf{k})\right]=-\mathbf{G}^\dagger, \tag{4.16}$$

а операторы $d^a_\alpha(\mathbf{k})$ подчиняются таким же коммутационным соотношениям (4.14). С учетом свойств (2.37), (2.38), (2.39) (для каждого фиксированного a), это приводит к редуцированному гамильтониану в нормальной форме, *точно диагонализуемому* над подходящим вакуумом для трех различных операторных реализаций при условиях $u_av_a=0$, $a=1,2$:

$$H\{d\}=\mathcal{V}w_0+\widehat{H}\{d\},\ \ \widehat{H}\{d\}=\widehat{H}_0+\widehat{H}_I,\ \ \mathcal{V}\text{- объем пространства}, \tag{4.17}$$

$$w_0=\frac{1}{V^*}\left[\left(2\ll\mathcal{E}(k)\gg-4g\right)\left(v_1^2+v_2^2\right)-8g(v_1v_2)^2\right],\ \ \ll 1\gg=1, \tag{4.18}$$

$$\ll\mathcal{E}(k)\gg\stackrel{def}{=}V^*\int^\Lambda\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\mathcal{E}(k),\ \ V^*=\frac{6\pi^2}{\Lambda^3},\ \ \ll k^2\gg=\frac{3}{5}\Lambda^2,\ \ g=\frac{\lambda}{4V^*}, \tag{4.19}$$

$$d^a_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle=0,\ \ \widehat{H}\{d\}\,|0\rangle=0,\ \ \left[\widehat{H}\{d\}\,,d^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{k})\right]|0\rangle=E^a(k)\,d^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle, \tag{4.20}$$

$$E^a(k)=\frac{g}{(2mc)^2}\left(k^2+\ll k^2\gg\right)+g+(1-2v_a^2)\left[\mathcal{E}(k)-2g(1+2v_{3-a}^2)\right], \tag{4.21}$$

$$\widehat{H}_0\{d\}=\sum_{a=1,2}\int d^3k\,E^a(k)\,d^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{k})\,d^a_\alpha(\mathbf{k}), \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\widehat{H}_I\{d\}&=\sum_{a,b}\int d^3k_1d^3k_2d^3k_3d^3k_4\ \delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\cdot\\&\cdot K^{(ab)}\left(\frac{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}{2};\frac{\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_3}{2}\right)d^{\dagger a}_\alpha(\mathbf{k}_1)d^{\dagger b}_\beta(\mathbf{k}_2)d^b_\beta(\mathbf{k}_3)d^a_\alpha(\mathbf{k}_4)=\\&=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3r\int d^3s\int d^3\mathcal{P}\left\{\frac{1}{4}\left[\mu\left((\mathbf{r}+\mathbf{s})^2-\mathcal{P}^2\right)+\lambda\right]\cdot\right.\\&\cdot\sum_{a=1,2}d^{\dagger a}_\alpha\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{r}\right)d^{\dagger a}_\beta\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}\right)d^a_\beta\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{s}\right)d^a_\alpha\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{s}\right)+\\&+\frac{1}{2}\left[\mu\left((\mathbf{r}+\mathbf{s})^2-\mathcal{P}^2\right)+\lambda(1-2v_1^2)(1-2v_2^2)\right]\cdot\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\cdot d_\alpha^{\dagger 1}\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{r}\right) d_\beta^{\dagger 2}\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}\right) d_\beta^{2}\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{s}\right) d_\alpha^{1}\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{s}\right)\Big\}, \quad \mu=\frac{\lambda}{(2mc)^2},$$

в противоположность вариационным решениям при $u_a v_a \neq 0$ с нефиксированным числом частиц, используемым обычно в теории сверхпроводимости и теории ядра [157]. Эти реализации соответствуют трем различным системам, когда $v_{1,2}$ *независимо* принимают значения 0,1. Каждая из этих систем реализуется на своих физических состояниях, которые строятся как возбуждения над своим собственным вакуумом (4.18), (4.20). При этом одночастичные состояния каждой из систем обладают различными симметриями и различными спектрами энергий (4.21). Физически это означает, что каждая из систем описывает свой набор частиц. В отсутствие внешнего макропараметра, меняющего свободную энергию системы (типа температуры, давления или химического потенциала T, P, μ), здесь имеем дело именно с тремя различными квантовополевыми системами, а не с различными фазами одной и той же физической системы. Вакуумная энергия (4.18), как обычно, фиксирует начало энергетической шкалы каждой из этих систем и далее считается вычтенной, так как ее абсолютное значение не несет физического смысла, поскольку (фазовые) переходы между *этими* системами не рассматриваются. Тем не менее, ниже, для удобства они названы как B,C,A системы или фазы одной квантовополевой теории (4.4). Рассмотрим последовательно все три системы.

B-система: $v_1=v_2=0$, $\theta_1=\theta_2=0$,

$\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{k})=d_\alpha^1(\mathbf{k})$, $\widetilde{\mathbf{B}}_\alpha(\mathbf{k})=d_\alpha^2(\mathbf{k})$, $w_0^B=0$,

$$E_B(\mathbf{k})=E_B^{1,2}(\mathbf{k})=E^a(k)=\frac{g}{(2mc)^2}\left(k^2+\ll k^2\gg\right)-g+\mathcal{E}(k). \qquad (4.24)$$

Пусть $\left(\widehat{\mathbf{f}}\right)^{ab} = f^{ab}$ - произвольная постоянная $SU_T(2)$ матрица, тогда ГП имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{k},t) \\ \widetilde{\mathbf{B}}_\alpha(\mathbf{k},t) \end{array} \right\} e^{-itE_B(\mathbf{k})} = e^{iHt} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{k}) \\ \widetilde{\mathbf{B}}_\alpha(\mathbf{k}) \end{array} \right\} e^{-iHt}, \tag{4.25}$$

$$\Psi^a_\alpha(x) \to \Psi^a_\alpha(x)_B = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[f^{a1}\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{k},t) + f^{a2}\widetilde{\mathbf{B}}_\alpha(\mathbf{k},t) \right] e^{i(\mathbf{kx})-itE_B(\mathbf{k})}.$$

Причинная функция Грина этой реализации, аналогично (2.55), совпадает с запаздывающей:

$$\begin{aligned} \Delta^{(C)ab}_{(\Psi_B)\alpha\beta}(x,y) &= {}_B\langle 0|\ \mathrm{T}\left(\Psi_\alpha(x)\,\Psi^\dagger_\beta(y)\right)|0\rangle_B = \\ &= \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\theta(x_0-y_0)\, e^{-i(x_0-y_0)E_B(\mathbf{P})}\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \\ &= i\delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-i(k(x-y))}\, \frac{1}{k_0 - E_B(\mathbf{k}) + i0}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Не трудно проверить, что соответствующее вакуумное состояние $|\,0\rangle_B$ является синглетным для обеих $SU_J(2)$ и $SU_T(2)$ групп, а одночастичные возбуждения B и $\widetilde{B}$ преобразуются по фундаментальному представлению $SU_J(2)$. Используя (4.8), (4.25), находим при $i,r,l = 1,2,3$:

$$\mathcal{J}^i = \frac{1}{2}\int d^3k\sigma^i_{\alpha\beta}\left[\mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{B}_\beta(\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{B}}_\beta(\mathbf{k})\right], \tag{4.27}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{B}}_\alpha(\mathbf{k})\right],$$

$$\mathcal{Y}^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{B}}_\beta(\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{B}_\beta(\mathbf{k})\right],$$

$$\mathcal{Y}^2_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\int d^3k\left[\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{B}_\beta(\mathbf{k}) - \mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{B}}_\beta(\mathbf{k})\right],$$

$$\mathcal{Y}^3_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{B}_\beta(\mathbf{k}) - \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{B}}_\beta(\mathbf{k})\right],$$

$$\mathcal{T}^r_{\alpha\beta} = \mathcal{Y}^l_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\widehat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^r\widehat{\mathbf{f}}\tau^l\right\}, \quad \mathcal{Y}^r_{\alpha\beta} = \mathcal{T}^l_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\widehat{\mathbf{f}}\tau^r\widehat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^l\right\}, \tag{4.28}$$

где $\mathcal{Y}^r_{\alpha\beta}$ представляют генераторы $\mathcal{T}^r_{\alpha\beta}$ при $f^{ab} \longrightarrow \delta^{ab}$. Так что вакуумное состояние $|\,0\rangle_B$, определенное по отношению к операторам $\mathbf{B}$ и

$\widetilde{\mathbf{B}}$, действительно обладает всеми нулевыми квантовыми числами, т.е. является состоянием с ненарушенной симметрией:

$$\mathcal{J}^i \ |0\rangle_B = \mathcal{U} \ |0\rangle_B = \mathcal{Y}^r_{\alpha\beta} \ |0\rangle_B = \mathcal{T}^r_{\alpha\beta} \ |0\rangle_B = 0, \tag{4.29}$$

и лежит в синглетном представлении по $SU_J(2)$ и $SU_T(2)$. Из условий

$$\mathcal{Y}^3 \mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle_B = +\frac{1}{2}\mathbf{B}^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle_B, \quad \mathcal{Y}^3 \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle_B = -\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle_B, \tag{4.30}$$

при $\mathcal{Y}^r \equiv \delta_{\alpha\beta}\mathcal{Y}^r_{\alpha\beta}$, следует, что одночастичные возбуждения B и $\widetilde{B}$ вместе образуют фундаментальное представление $SU_T(2)$.

С-система: $v_1 = v_2 = 1$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$,
$\epsilon_{\alpha\beta}\mathbf{C}_\beta(\mathbf{k}) = d^1_\alpha(\mathbf{k})$, $\epsilon_{\alpha\beta}\widetilde{\mathbf{C}}_\beta(\mathbf{k}) = d^2_\alpha(\mathbf{k})$, $w^C_0 = (4/V^*)\left(\ll\mathcal{E}(k)\gg - 4g\right)$,

$$E_C(\mathbf{k}) = E^{1,2}_C(\mathbf{k}) = E^a(k) = \frac{g}{(2mc)^2}\left(k^2 + \ll k^2 \gg\right) + 7g - \mathcal{E}(k), \tag{4.31}$$

$$\Psi^a_\alpha(x) \to \Psi^{\dagger a}_\alpha(x)_C = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\left[f^{a1}\mathbf{C}^\dagger_\alpha(\mathbf{k},t) + f^{a2}\widetilde{\mathbf{C}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k},t)\right] e^{itE_C(\mathbf{k}) - i(\mathbf{kx})},$$

где использованы определения аналогичные (4.25). Свойства симметрии этой системы также полностью аналогичны симметриям системы В, а ее причинная функция Грина аналогична (4.26).

А-система: $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, (или $v_1 = 1$, $v_2 = 0$),

$$\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k}) = d^1_\alpha(\mathbf{k}), \ \ \epsilon_{\alpha\beta}\widetilde{\mathbf{A}}_\beta(\mathbf{k}) = d^2_\alpha(\mathbf{k}), \ \ w^A_0 = \frac{2}{V^*}\left(\ll\mathcal{E}(k)\gg - 2g\right), \tag{4.32}$$

будет рассмотрена подробнее. Пусть f^{ab} снова произвольная постоянная $SU_T(2)$ матрица, тогда соответствующее ГП (4.14) и его причинная функция Грина по форме сходны с релятивистскими (далее $|0\rangle \equiv |0\rangle_A$):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k},t)\, e^{-itE^{(-)}_A(\mathbf{k})} \\ \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k},t)\, e^{-itE^{(+)}_A(\mathbf{k})} \end{Bmatrix} = e^{iHt}\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k}) \\ \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k}) \end{Bmatrix} e^{-iHt}, \quad \begin{matrix} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k},t) \ |0\rangle = \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle \\ \mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k},t) \ |0\rangle = \mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \ |0\rangle, \end{matrix} \tag{4.33}$$

$$\Psi^a_\alpha(x)_A = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\left[f^{a1}\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k},t)e^{-itE^{(-)}_A(\mathbf{k})} + f^{a2}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\alpha(-\mathbf{k},t)e^{itE^{(+)}_A(-\mathbf{k})}\right]e^{i(\mathbf{kx})},$$

$$\Delta^{(C)ab}_{(\Psi_A)\alpha\beta}(x,y) \equiv \langle 0|\,\mathrm{T}\left(\Psi^a_\alpha(x)\Psi^{\dagger b}_\beta(y)\right)|0\rangle = \tag{4.34}$$
$$= \delta_{\alpha\beta}\left[\theta(T)e^{-iTE^{(-)}_A(\mathbf{P})}f^{a1}\overset{*}{f}{}^{b1} - \theta(-T)e^{iTE^{(+)}_A(\mathbf{P})}f^{a2}\overset{*}{f}{}^{b2}\right]\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) =$$
$$= i\delta_{\alpha\beta}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-i(k(x-y))}\left[\frac{f^{a1}\overset{*}{f}{}^{b1}}{k_0 - E^{(-)}_A(\mathbf{k}) + i0} + \frac{f^{a2}\overset{*}{f}{}^{b2}}{k_0 + E^{(+)}_A(-\mathbf{k}) - i0}\right],$$

где $T = x_0 - y_0$, а спектры имеют вид:

$$E^a(\mathbf{k}) \equiv E_A^{\binom{2}{1}}(\mathbf{k}) = E^{(\pm)}_A(\mathbf{k}) \equiv \tag{4.35}$$
$$\equiv E_{\left\{\substack{\widetilde{A}\\ A}\right\}}(\mathbf{k}) = \frac{g}{(2mc)^2}\left(k^2 + \ll k^2 \gg\right) - g \pm \left(4g - \mathcal{E}(k)\right).$$

Для этой реализации гейзенберговского поля (4.33), с учетом $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, имеем следующие сохраняющиеся заряды при $i, r, l = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{J}^i = \frac{1}{2}\int d^3k\sigma^i_{\alpha\beta}\left[\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{A}_\beta(\mathbf{k}) - \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\right], \tag{4.36}$$
$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\alpha(-\mathbf{k})\right],$$
$$\mathcal{G}^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\mathbf{A}_\beta(\mathbf{k})\right],$$
$$\mathcal{G}^2_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\int d^3k\left[\widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\mathbf{A}_\beta(\mathbf{k}) - \mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k})\right],$$
$$\mathcal{G}^3_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{A}_\beta(\mathbf{k}) - \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k})\right],$$
$$\mathcal{G}^0_{\alpha\beta} = \mathcal{T}^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int d^3k\left[\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{A}_\beta(\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(-\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k})\right],$$
$$\mathcal{T}^r_{\alpha\beta} = \mathcal{G}^l_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^r\hat{\mathbf{f}}\tau^l\right\},\quad \mathcal{G}^r_{\alpha\beta} = \mathcal{T}^l_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathbf{f}}\tau^r\hat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^l\right\}, \tag{4.37}$$

где теперь $\mathcal{G}^r_{\alpha\beta}$ представляют генераторы $\mathcal{T}^r_{\alpha\beta}$ при $f^{ab} \longrightarrow \delta^{ab}$. Полагая $\tau^0 = I$, при $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$, с учетом $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\tau}) = 0$ и тождеств Фирца:

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{3}\tau^\nu_{ab}\tau^\nu_{cd} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\tau}_{ab}\cdot\boldsymbol{\tau}_{cd}\right) + \frac{1}{2}\delta_{ab}\delta_{cd} = \delta_{ad}\delta_{bc},\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau^\nu\tau^\mu) = \delta^{\nu\mu}, \tag{4.38}$$

последнее равенство (4.36) и (4.37) можно обьединить в виде:

$$\mathcal{T}^\nu_{\alpha\beta} = \mathcal{G}^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^\nu\hat{\mathbf{f}}\tau^\mu\right\},\quad \mathcal{G}^\nu_{\alpha\beta} = \mathcal{T}^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathbf{f}}\tau^\nu\hat{\mathbf{f}}^\dagger\tau^\mu\right\}. \tag{4.39}$$

4 Спонтанное нарушение симметрии.

4.1 Конденсаты и алгебра квазиспина.

В действительности матрица $f^{ab} = \left(\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{n})\right)^{ab}$ с точностью до фазового $U(1)$ - множителя параметризует некоторый поворот единичного вектора от оси z к единичному вектору $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\vartheta, \varphi)$ вокруг вектора $\boldsymbol{u}$ на угол ϑ:

$$\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{n}) = e^{-i\varphi \mathrm{T}_3} e^{-i\vartheta \mathrm{T}_2} = e^{-i\vartheta(\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{u})} e^{-i\varphi \mathrm{T}_3}, \ \mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}, \ \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{n}) \mathrm{T}_3 \widehat{\mathbf{f}}^\dagger(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{T}), \quad (4.40)$$

$$\boldsymbol{n}(\vartheta, \varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \, \sin\vartheta\sin\varphi, \, \cos\vartheta), \quad \boldsymbol{u} = (-\sin\varphi, \, \cos\varphi, \, 0), \quad (4.41)$$

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) = 0, \ \text{тогда, при} \ \mathcal{G}^r = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{G}^r_{\alpha\beta}: \ (\boldsymbol{\mathcal{T}})^2 = (\boldsymbol{\mathcal{G}})^2, \ (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}) = \mathcal{G}^3, \quad (4.42)$$

где учтены также соотношения (4.37), (4.38).

Используя (4.4), (4.8) и (4.33), (4.34) можно убедиться, что для системы A $SU_T(2)$ и $U(1)$ – симметрии оказываются спонтанно нарушены:

$$\langle 0 |\, \mathrm{T} \left(\Psi^a_\alpha(x) \boldsymbol{\tau}_{ba} \Psi^{\dagger b}_\beta(x) \right) | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} \, \frac{\boldsymbol{n}}{V^*}, \qquad | 0 \rangle \equiv | 0 \rangle_A, \quad (4.43)$$

$$-\langle 0 | \, (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}) \, | 0 \rangle = -\langle 0 | \, \mathcal{G}^3 \, | 0 \rangle = \langle 0 | \, \mathcal{U} \, | 0 \rangle = \frac{\mathcal{V}}{V^*} \equiv \mathcal{L}, \quad (4.44)$$

где T-произведение (4.34) в одной точке, при $T = 0$, определяется как полусумма пределов $T \to \pm 0$, $\mathcal{V}$ - пространственный объем системы, а конденсат (4.43) дает макроскопические величины (4.44), пропорциональные этому объему. Соответственно теореме Голдстоуна [80], существуют *четыре* составных голдстоуновских состояния с бозонными квантовыми числами. Их можно ассоциировать с волнами переворота спина (магнонами) вакуумной "среды", обладающей $U(1)$ зарядом $\mathcal{L}$ и спонтанной "цветовой" намагниченностью $-\mathcal{L}$ (4.44) в направлении единичного вектора $\boldsymbol{n}$ (4.43) [92]. Они порождаются (и уничтожаются) из $|0\rangle_A$ операторами:

$$\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}(0) = \mathcal{T}^r_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{Tr} \left\{ \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{n}) \tau^{\pm} \widehat{\mathbf{f}}^\dagger(\boldsymbol{n}) \tau^r \right\} = \int d^3k \left\{ \begin{array}{c} A^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \, \widetilde{A}^\dagger_\beta(-\mathbf{k}) \\ \widetilde{A}_\alpha(\mathbf{k}) \, A_\beta(-\mathbf{k}) \end{array} \right\}, \quad (4.45)$$

$$\text{для которых}\quad [H\,,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}(0)]=0,\quad \text{где:}\quad \tau^{\pm}=\tau^{1}\pm i\tau^{2}. \tag{4.46}$$

В соответствии со смыслом величины V^* в (4.6) и последним равенством (4.44) величину $\mathcal{L}$ можно также интерпретировать, как (стремящееся к бесконечности) число коррелированных фермионных пар "старых" d (B)-фермионов в "новом" вакууме A-системы или как эффективное количество плоских волн, формирующих голдстоуновский волновой пакет [158]. То есть, в то время, как гамильтониан (4.4) вовсе "не чувствует" повороты фермионных полей (4.7), (4.40):

$$\Psi^{a}_{\alpha}(x)=f^{ab}(\boldsymbol{n})\,\mathring{\Psi}^{b}_{\alpha}(x)=e^{i(\boldsymbol{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{\Omega})}\,\mathring{\Psi}^{a}_{\alpha}(x)\,e^{-i(\boldsymbol{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{\Omega})},\quad \mathcal{T}^{r}=e^{i(\boldsymbol{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{\Omega})}\mathcal{G}^{r}e^{-i(\boldsymbol{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{\Omega})}, \tag{4.47}$$

$$\cos\frac{\Omega}{2}=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}=\left(-\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},\,\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},\,\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{n})=e^{-i(\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\Omega})},\qquad \Omega=|\boldsymbol{\Omega}|;\qquad \left[H\,,\mathcal{T}^{r}_{\alpha\beta}\right]=\left[H\,,\mathcal{G}^{r}_{\alpha\beta}\right]=0, \tag{4.48}$$

где $\mathring{\Psi}^{a}_{\alpha}(x)$ есть (4.33) с $f^{ab}\longrightarrow\delta^{ab}$, а $\mathcal{G}^{r}_{\alpha\beta}\equiv\mathring{\mathcal{T}}^{r}_{\alpha\beta}$ выражается через $\mathring{\Psi}^{a}_{\alpha}(x)$ той же формулой (4.8), вакуумные же средние (4.43) существенно характеризуются вектором $\boldsymbol{n}(\vartheta,\varphi)$: разным его направлениям отвечают разные унитарно неэквивалентные вакуумы, связанные соответствующим оператором боголюбовского поворота (4.47) [159], в качестве генераторов которого выступают теперь операторы $\mathcal{G}^{r}$, образующие ту же алгебру $SU_T(2)$ (4.10). Оператор Казимира на этой алгебре имеет известный спектр:

$$(\boldsymbol{\mathcal{G}})^{2}\longrightarrow \text{Ł}(\text{Ł}+1),\quad \text{Ł}=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\ldots;\quad \mathcal{G}^{3}\longrightarrow -\text{Ł},-\text{Ł}+1,\cdots\text{Ł}. \tag{4.49}$$

Вводя повышающий и понижающий операторы

$$\mathcal{G}^{\pm}\Longrightarrow\delta_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta},\quad \mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}=\mathcal{G}^{1}_{\alpha\beta}\pm i\mathcal{G}^{2}_{\alpha\beta}=\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}(0), \tag{4.50}$$

легко убедиться, что действие $\mathcal{G}^{+}$ на вакуум увеличивает число пар $A\widetilde{A}$ в состоянии с нулевым полным "изотопспином", уменьшая абсолютную величину "цветовой намагниченности" в направлении $\boldsymbol{n}$:

$$(\boldsymbol{\mathcal{T}})^2\,|0\rangle = (\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\,|0\rangle = \mathcal{L}\,(\mathcal{L}+1)\,|0\rangle, \quad \mathcal{G}^-\,|0\rangle = 0, \tag{4.51}$$
$$(\boldsymbol{\mathcal{T}})^2\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle = (\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle = \mathcal{L}\,(\mathcal{L}+1)\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle,$$
$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}})\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle = \mathcal{G}^3\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle = (-\mathcal{L}+N)\left(\mathcal{G}^+\right)^N|0\rangle, \tag{4.52}$$

но, не выводя, однако, за пределы "вакуумного цветового $\mathcal{L}$ – мультиплета" размерности $2\mathcal{L}+1$. Таким образом, приписывая вакуумному состоянию определенные (стремящиеся к бесконечности) квантовые числа по группе $SU_T(2)$, для нормированных N-голдстоуновских состояний с нулевым "изотопспином" имеем:

$$|0\rangle_A \equiv |\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle = e^{\mathbf{G}_A}\,|0\rangle_B, \quad {}_A\langle 0||0\rangle_A = \langle\mathcal{L},N-\mathcal{L}|\mathcal{L},N-\mathcal{L}\rangle = 1, \tag{4.53}$$
$$|\mathcal{L},N-\mathcal{L}\rangle = \sqrt{\frac{(2\mathcal{L}-N)!}{(2\mathcal{L})!N!}}\left(\mathcal{G}^+\right)^N|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle. \tag{4.54}$$

Зависимость от N значения макроскопической величины "цветовой" намагниченности (4.44), (4.52) указывает на унитарную неэквивалентность представлений *антикоммутационных* соотношений (4.14), построенных над состояниями (4.54) с макроскопически большими $N\sim\mathcal{L}$, как над вакуумными [159]. Поэтому должен существовать *независящий от* $\mathcal{L}$, формально унитарный оператор боголюбовского преобразования, "осуществляющий" эту унитарную неэквивалентность. Его нетрудно построить [160], как "производящий оператор", отвечающий произвольному не фиксированному числу "изоскалярных" голдстоуновских бозонов в виде определенной "когерентной суперпозиции" этих вырожденных по энергии "вакуумных" состояний:

$$|\eta\rangle_{\mathcal{L}} = \aleph_{\mathcal{L}}(\eta)\sum_{N=0}^{\infty}\eta^N\sqrt{\frac{(2\mathcal{L})!}{(2\mathcal{L}-N)!N!}}\,|\mathcal{L},N-\mathcal{L}\rangle = \tag{4.55}$$
$$= \aleph_{\mathcal{L}}(\eta)\exp\left(\eta\mathcal{G}^+\right)|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle.$$

Соответствующий нормировочный множитель $\aleph_{\mathcal{L}}(\eta)$ легко вычисляется с помощью формул (C.1), (C.2) и весь оператор восстанавливается из соображений формальной унитарности:

$$\aleph_{\mathcal{L}}(\eta) = \left(1 + |\eta|^2\right)^{-\mathcal{L}}, \tag{4.56}$$

$$|\eta\rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{(1+|\eta|^2)^{\mathcal{L}}} \sum_{S=-\mathcal{L}}^{\mathcal{L}} \eta^{\mathcal{L}+S} \sqrt{\frac{(2\mathcal{L})!}{(\mathcal{L}+S)!(\mathcal{L}-S)!}}\, |\mathcal{L}, S\rangle = \tag{4.57}$$

$$= \exp\left(\eta \mathcal{G}^+\right) \exp\left(\mathcal{G}^3 \ln(1+|\eta|^2)\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle =$$

$$= \exp\left(\eta \mathcal{G}^+\right) \exp\left(\mathcal{G}^3 \ln(1+|\eta|^2)\right) \exp\left(-\eta^* \mathcal{G}^-\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \equiv \tag{4.58}$$

$$\equiv \exp\left(\upsilon \mathcal{G}^+ - \upsilon^* \mathcal{G}^-\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \equiv \exp\left(-i\theta(\boldsymbol{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{u})\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle, \tag{4.59}$$

$$\text{где, при } \eta = -\tan\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi}, \text{ имеем: } \upsilon = -\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi}. \tag{4.60}$$

В последних выражениях (4.57)-(4.60) не трудно узнать представление когерентных состояний на группе $SU_T(2)$ [161]- [163] (с учетом реального обрыва ряда в (4.55) при $N = 2\mathcal{L}$), и стандартное выражение *оператора* поворота вида (4.40) состояний (4.54) с определенным значением "намагниченности" $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ вдоль оси z в состояния с таким же ее значением вдоль направления единичного вектора $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ вида (4.41), чья стереографическая проекция на комплексную плоскость дается числом η (4.60):

$$\mathcal{G}^3 |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle = -\mathcal{L}\, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle, \quad (\boldsymbol{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle_{\mathcal{L}} = -\mathcal{L} |\mathbf{n}\rangle_{\mathcal{L}}, \quad |\mathbf{n}\rangle_{\mathcal{L}} \equiv |\eta\rangle_{\mathcal{L}}. \tag{4.61}$$

Таким образом, переменный вектор представления когерентных состояний $\mathbf{n}(\eta) = \mathbf{n}(\theta, \phi)$ в (4.58)-(4.61) соответствует вектору "вакуумной намагниченности" $\boldsymbol{n}(\vartheta, \varphi)$ в (4.43), а равенство (4.61) соответствует равенствам (4.44), (4.52) при переходе от преобразования операторов (4.47) к преобразованию "вакуумного" состояния (4.58), если операторы (4.59) и (4.47) осуществляют один и тот же поворот состояний.

Скалярное произведение двух когерентных состояний имеет вид [161]:

$${}_{\mathcal{L}}\langle \eta' \,|\, \eta \rangle_{\mathcal{L}} = \left[\frac{(1 + \eta'^* \eta)^2}{(1 + |\eta'|^2)\,(1 + |\eta|^2)}\right]^{\mathcal{L}} = {}_{\mathcal{L}}\langle \mathbf{n}'(\eta') \,|\, \mathbf{n}(\eta) \rangle_{\mathcal{L}}, \tag{4.62}$$

$$\left|{}_{\mathcal{L}}\langle\eta'\,|\,\eta\rangle_{\mathcal{L}}\right|^2 = \left[1 - \frac{|\eta'-\eta|^2}{(1+|\eta'|^2)\,(1+|\eta|^2)}\right]^{2\mathcal{L}} = \left[\frac{1+(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n})}{2}\right]^{2\mathcal{L}} \overset{(\mathcal{L}\to\infty)}{\longrightarrow} 0, \quad (4.63)$$

так как выражение в квадратных скобках при фиксированных $\eta' \neq \eta$ по модулю всегда меньше 1. Эта ортогональность (4.63) явно демонстрирует унитарную неэквивалентность представлений КАС (4.14) для когерентных – "вакуумных" состояний с разными $\mathbf{n}(\eta)$ при $\mathcal{L}\to\infty$. Возможен, однако, рассмотренный ниже иной предельный переход для этих состояний, переводящий их в бозонные когерентные состояния.

Алгебра, построенная на операторах $\mathcal{G}^{\pm}, \mathcal{G}^3$ в литературе носит название квазиспиновой алгебры [158].

4.2 Обобщения квазиспиновой алгебры.

В данной модели эта алгебра может быть обобщена следующим образом. Прежде всего, с помощью (4.36), (4.50) можно увидеть, что одночастичные состояния, имея "изотопспин" 1/2, принадлежат цветовому мультиплету *на единицу* меньшей размерности $2\mathcal{L}$:

$$\mathcal{G}^-\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \quad (\boldsymbol{\mathcal{T}})^2\,\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle = \left(\mathcal{L}^2 - \frac{1}{4}\right)\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle, \quad (4.64)$$
$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}})\,\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle \equiv \mathcal{G}^3\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle = \left(-\mathcal{L} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{A}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle.$$

Тоже самое имеет место для $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\,|0\rangle$. Чтобы понизить эту размерность (например, до нуля), *не меняя* при этом других квантовых чисел, необходимо, в соответствии с (4.15), (4.53), убрать из вакуума $|0\rangle_A$ *бесконечное* число частиц *одного* сорта, – $\widetilde{A}$, объединенных (попарно) в состояния с нулевым "изотопспином". Генератор соответствующего преобразования Боголюбова [160], по сути, обратного к (4.53), есть просто оператор $-\mathbf{G}_A$ (4.16), при $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, выраженный в терминах операторов $\widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{G}_A = \frac{\pi}{2}\int d^3k\,\epsilon_{\alpha\beta}\left[\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\beta(-\mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{A}}_\beta(-\mathbf{k})\right]. \quad (4.65)$$

Возможны, однако, иные пути получения "бесцветных состояний", отправляясь от вакуума A-системы. Используя вытекающие из (4.13) коммутационные соотношения:

$$\left[\mathcal{G}^3\,,\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right]=\left[\mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\,,\mathcal{G}^\pm\right]=\pm\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta},\quad \left[\sigma^k_{\alpha\beta}\mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\,,\sigma^l_{\gamma\lambda}\mathcal{G}^\pm_{\gamma\lambda}\right]=\pm\delta^{kl}\mathcal{G}^\pm, \tag{4.66}$$

$$\left[\mathcal{G}^\pm\,,\mathcal{G}^\mp_{\alpha\beta}\right]=\pm2\mathcal{G}^3_{\alpha\beta},\ \ \left[\sigma^k_{\alpha\beta}\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\,,\sigma^l_{\gamma\lambda}\mathcal{G}^\mp_{\gamma\lambda}\right]=\pm2\delta^{kl}\mathcal{G}^3+i\varepsilon^{kln}\sigma^n_{\alpha\beta}\mathcal{G}^0_{\alpha\beta},$$

$$\left[(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\,,\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right]=\pm2\left(\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\mathcal{G}^3-\mathcal{G}^\pm\mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\right),\ \left[\mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\,,\mathcal{G}^\pm_{\gamma\lambda}\right]=0,\ \text{т.к.}\ (\tau^\pm)^2=0, \tag{4.67}$$

$$\mathcal{J}^n=\left(\sigma^n_{\alpha\beta}\mathcal{G}^0_{\alpha\beta}\right),\ \ \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})=0,\ \ \left[\mathcal{G}^r_{\alpha\beta}\,,\mathcal{G}^r\right]=0,\ r=1,2,3, \tag{4.68}$$

$$\text{и свойства вакуума:}\quad |0\rangle=|0\rangle_A,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}\,|0\rangle=0,\ \ \mathcal{G}^-_{\alpha\beta}\,|0\rangle=0=\left(\mathcal{G}^3_{\alpha\beta}+\mathcal{G}^0_{\alpha\beta}\right)|0\rangle,\ \ \mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\,|0\rangle=-\delta_{\alpha\beta}\frac{\mathcal{L}}{2}\,|0\rangle, \tag{4.69}$$

$$\text{имеем:}\quad \mathcal{G}^3\left(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)|0\rangle=(1-\mathcal{L})\left(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)|0\rangle, \tag{4.70}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\left(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)|0\rangle=\mathcal{L}\,(\mathcal{L}-1)\left(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)|0\rangle, \tag{4.71}$$

т.е. добавление к вакууму *одной* голдстоуновской фермионной пары в состоянии с *единичным* "изотопспином", аналогично (4.64), понижает уже *на единицу* полный "цветовой" спин, т.е. *на два* размерность "вакуумного цветового мультиплета" [1]. Чтобы продвинуть это наблюдение дальше, введем в изотопическом пространстве вектор $\boldsymbol{w}$ и рассмотрим состояния вида $\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^N|0\rangle$. В Приложении C показано, что из (4.51), (4.66)-(4.71) следует

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^N|0\rangle&=\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^N|0\rangle\,(\mathcal{L}-N)(\mathcal{L}-N+1)-\\&-\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^{N-2}(\boldsymbol{w})^2\left(\mathcal{G}^+\right)^2|0\rangle\,N(N-1),\end{aligned} \tag{4.72}$$

Это соотношение подсказывает два пути получения из вакуума нижнего состояния мультиплета с полным "цветовым" спином $\mathcal{L}-N$.

Первый путь: при $(\boldsymbol{w})^2=1$, будем искать решение уравнений

$$(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle=(\mathcal{L}-N)(\mathcal{L}-N+1)\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle, \tag{4.73}$$

---

[1] Согласно (4.69), полный "изотопспин" вакуума $|0\rangle_A$ равен нулю.

$$\mathcal{G}^3\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle = (N-\mathcal{L})\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle,$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}\cdot\boldsymbol{w})\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle = 0, \qquad \text{в ввиде:} \tag{4.74}$$

$$|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle = \sum_{l=0}^{[N/2]} a_l^N \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^{N-2l}\left(\mathcal{G}^+\right)^{2l}|\,0\rangle, \tag{4.75}$$

где $[N/2]$– целая часть числа $N/2$. Из уравнений (4.72)-(4.75) вытекает рекурентное соотношение для коэффициентов a_l^N

$$a_l^N = a_{l-1}^N\,\frac{(N-2l+1)(N-2l+2)}{2l(2\mathcal{L}-2N+2l+1)}, \quad \text{решение которого дает:} \tag{4.76}$$

$$a_l^N = \frac{a_0^N N!(-1)^l\Gamma\left(N-\mathcal{L}-l-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(N-\mathcal{L}-\frac{1}{2}\right)2^{2l}l!(N-2l)!}, \quad \text{или, при } \mathcal{L}>N>2l, \tag{4.77}$$

$$a_l^N = \frac{a_0^N N!\Gamma\left(\mathcal{L}-N+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\mathcal{L}-N+l+\frac{3}{2}\right)2^{2l}l!(N-2l)!}, \quad \text{откуда для состояний имеем:}$$

$$|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle =$$

$$a_0^N\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)^N {}_2F_1\left(-\frac{N}{2},\frac{1}{2}-\frac{N}{2};\mathcal{L}-N+\frac{3}{2};\left[\frac{\mathcal{G}^+}{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}}\right]^2\right)|\,0\rangle$$

$$= \frac{(-1)^N a_0^N\,\Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}-N\right)N!}{2^N\Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}\left(\mathcal{G}^+\right)^N C_N^{(-\mathcal{L}-\frac{1}{2})}\left(\frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}}{\mathcal{G}^+}\right)|\,0\rangle = \tag{4.78}$$

$$= \frac{a_0^N\Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}-N\right)2^{2\mathcal{L}+1-N}\mathcal{L}!}{\sqrt{\pi}\,(2\mathcal{L}+1-N)!}\,\cdot \tag{4.79}$$

$$\cdot\left(\mathcal{G}^+\right)^N {}_2F_1\left(N-2\mathcal{L}-1,-N;-\mathcal{L};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^+_{\alpha\beta}}{\mathcal{G}^+}\right)|\,0\rangle,$$

где ${}_2F_1(a,b;c;z)$ - гипергеометрическая функция [164], вырождающаяся здесь в полином Гегенбауэра $C_n^{(\lambda)}(x)$ [165]. Последнее выражение (4.79) позволяет при $\mathcal{L}>N>0$ получить интегральное представление

$$C_N^{(-\mathcal{L}-\frac{1}{2})}(z) = \frac{(-1)^N 2^N\,\Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,N!(\mathcal{L}-N)!}\int_{-1}^{1} d\eta(1-\eta^2)^{\mathcal{L}-N}(\eta+z)^N, \tag{4.80}$$

весьма полезное для вычисления нормировочной константы в Приложении С. В итоге приходим к следующему "подменяющему" оператору:

$$|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};0\rangle = \tag{4.81}$$

$$= \frac{a_0^N \Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}-N\right)}{\sqrt{\pi}\,(\mathcal{L}-N)!} \int\limits_{-1}^{1} d\eta (1-\eta^2)^{\mathcal{L}-N} \left[\eta \mathcal{G}^+ + \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^+_{\alpha\beta}\right)\right]^N \, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle,$$

$$a_0^N = \frac{\sqrt{\pi}\; 2^{N-2\mathcal{L}-1}}{\Gamma\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}-N\right)\mathcal{L}!} \sqrt{\frac{(2\mathcal{L}+1-N)!(2\mathcal{L}+1-2N)!}{N!}}, \qquad (4.82)$$

который понижает на N значение полного "цветового спина" вакуума, одновременно увеличивая на N максмальное значение полного "изотопспина" в этом состоянии. Т.е. такое "обесцвечивание" вакуумного состояния сопровождается его своеобразной "изотопизацией": состояние (4.81) является суперпозицией состояний со всеми возможными значениями (см. (4.90), ниже) полного "изотопспина" $\leq N$ той же четности, но с фиксированной проекцией "изотопспина" на вектор $\boldsymbol{w}$, равной нулю. В частности, если $\mathcal{L}$ – целое, то, при $N=\mathcal{L}$, получаем "бесцветное" состояние с (стремящимся к бесконечности) полным "изотопспином" $\mathcal{L}$, ортогональным $\boldsymbol{w}$:

$$|0,0;0\rangle = \frac{\left(\mathcal{G}^+_L\right)^{\mathcal{L}+1} - \left(-\mathcal{G}^+_R\right)^{\mathcal{L}+1}}{\left(\mathcal{G}^+_L + \mathcal{G}^+_R\right)\mathcal{L}!\sqrt{\mathcal{L}+1}}\, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle. \qquad (4.83)$$

Здесь введены два набора, – "левых" и "правых" операторов:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G}^r_L \\ \mathcal{G}^r_R \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{G}^r \pm \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^r_{\alpha\beta}\right)\right], \quad \text{то есть,} \qquad (4.84)$$

$$\mathcal{G}^r = \mathcal{G}^r_L + \mathcal{G}^r_R, \quad \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^r_{\alpha\beta}\right) = \mathcal{G}^r_L - \mathcal{G}^r_R, \quad r = 1,2,3,+,-.$$

В силу (4.50), (4.66), (4.67):

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{G}^\pm, \mathcal{G}^\mp\right] = \pm 2\mathcal{G}^3 = \left[\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right), \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\mp_{\alpha\beta}\right)\right], \qquad (4.85)\\
&\left[\mathcal{G}^3, \mathcal{G}^\pm\right] = \pm \mathcal{G}^\pm = \left[\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\right), \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right)\right],\\
&\left[\mathcal{G}^3, \left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right)\right] = \left[\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\right), \mathcal{G}^\pm\right] = \pm\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right),\\
&\left[\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^\pm_{\alpha\beta}\right), \mathcal{G}^\mp\right] = \pm 2\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^3_{\alpha\beta}\right),
\end{aligned}$$

следовательно, операторы (4.84) образуют две коммутирующих между собой, "киральных" подалгебры $SU_L(2)\times SU_R(2)$ полной алгебры (4.12) симметрии гамильтониана:

$$\left[\mathcal{G}^{\pm}_{L,R}\,,\mathcal{G}^{\mp}_{L,R}\right] = \pm 2\mathcal{G}^{3}_{L,R}, \quad \left[\mathcal{G}^{3}_{L,R}\,,\mathcal{G}^{\pm}_{L,R}\right] = \pm\mathcal{G}^{\pm}_{L,R}, \quad \left[\mathcal{G}^{r}_{L}\,,\mathcal{G}^{k}_{R}\right] = 0. \tag{4.86}$$

Поскольку, из (4.44), (4.69), (4.84) следует, что

$$\langle 0|\,\mathcal{G}^3_L\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathcal{G}^3_R\,|0\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}, \tag{4.87}$$

эта "киральная" симметрия для системы A также спонтанно нарушена. Нетрудно убедиться, что она остается нарушенной и в новом "обесцвеченном вакууме" (4.83).

Второй путь: при $(\boldsymbol{w})^2 = 0$, т.е. $\sqrt{2}\,\boldsymbol{w}_\pm = (1, \pm i, 0)$, дополнив соотношения (4.66)–(4.71) и (4.72) равенствами для любого целого $n > 0$:

$$\begin{gathered}\left[\mathcal{J}^3\,, \left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^n\right] = \pm n\left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^n\,,\ \left[\mathcal{J}^3\,, \left(\sigma^{3}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)\right] = 0, \qquad (4.88)\\ \left[\mathcal{J}^{\pm}\,, \left(\sigma^{3}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^n\right] = \mp n\left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)\left(\sigma^{3}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{n-1}\,,\ \left[\mathcal{J}^{\pm}\,, \left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)\right] = 0,\\ \left[\mathcal{J}^{\pm}\,, \left(\sigma^{\mp}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^n\right] = \pm 2n\left(\sigma^{3}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)\left(\sigma^{\mp}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{n-1}\,, \quad \text{где:}\end{gathered}$$

$$\sigma^{\pm} = \sigma^1 \pm i\sigma^2 = \sqrt{2}\left(\boldsymbol{w}_\pm\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),\ \left[\left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)\,,\left(\sigma^{\mp}_{\gamma\lambda}\mathcal{G}^{-}_{\gamma\lambda}\right)\right] = 4\left(\mathcal{G}^3 \pm \mathcal{J}^3\right), \tag{4.89}$$

находим, что операторы $\mathcal{J}^{\pm,3}, (\boldsymbol{\mathcal{J}})^2$ переводят друг в друга мономы

$$\mathcal{A}(n_+, n_-, n_3) = \left(\sigma^{+}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{n_+}\left(\sigma^{-}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{n_-}\left(\sigma^{3}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{n_3} \tag{4.90}$$

с фиксированным значением суммы $n_+ + n_- + n_3 = \overline{n}$. В частности, наряду с уравнениями "цветового" спина (4.73) будут удовлетворяться и уравнения "изотопического" спина для нормированных состояний:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\mathcal{J}})^2\,|\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \pm N\rangle = N(N+1)\,|\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \pm N\rangle, \qquad (4.91)\\ \mathcal{J}^3\,|\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \pm N\rangle = \pm N\,|\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \pm N\rangle,\\ |\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \pm N\rangle = \sqrt{\frac{(\mathcal{L}-N)!}{N!\mathcal{L}!}}\left(\frac{1}{2}\,\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^N |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle. \qquad (4.92)\end{gathered}$$

Соответствующий им оператор также понижает на N значение полного "цветового спина" вакуума, одновременно, увеличивая на *эту же величину* N абсолютные значения полного "изотопспина" и его третьей проекции. Т.е. этот процесс "обесцвечивания" вакуумного состояния также сопровождается встречным процессом "изотопизации", который, однако, полностью подменяет один тип спина другим. Если $\mathcal{L}$ – целое, то, при $N=\mathcal{L}$ вновь получаем "бесцветное" состояние со (стремящимся к бесконечности) полным "изотопспином" $\pm\mathcal{L}$ вдоль третьей оси:

$$|0,0;\pm\mathcal{L}\rangle = \frac{1}{\mathcal{L}!}\left(\frac{1}{2}\,\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)^{\mathcal{L}}|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle. \tag{4.93}$$

Очевидно, что при такой "подмене" группы $SU_T(2)$ и $SU_J(2)$ полностью меняются ролями. Оказывается, что и в этом случае, аналогично (4.55), можно построить, *независящий от* $\mathcal{L}$ "производящий оператор" в виде когерентной суммы вырожденных состояний (4.92), отвечающий произвольному не фиксированному числу уже "изовекторных" голдстоуновских бозонов и осуществляющий соответствующее унитарно неэквивалентное преобразование Боголюбова:

$$\begin{aligned}|\xi,[\pm]\rangle_{\mathcal{L}} &= \aleph^{[\pm]}_{\mathcal{L}}(\xi)\sum_{N=0}^{\infty}\xi^{N}\sqrt{\frac{\mathcal{L}!}{(\mathcal{L}-N)!N!}}\,|\mathcal{L}-N,N-\mathcal{L};\pm N\rangle = \\ &= \aleph^{[\pm]}_{\mathcal{L}}(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{2}\,\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right)|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle.\end{aligned} \tag{4.94}$$

Из соотношений (4.88)-(4.89) явствует, что две тройки генераторов также образуют две коммутирующие между собой алгебры $SU_{[\pm]}(2)$:

$$\begin{aligned}&L^{+}_{[\pm]} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{\pm}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{+}_{\alpha\beta}\right),\ L^{-}_{[\pm]} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{\mp}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{-}_{\alpha\beta}\right) = \left(L^{+}_{[\pm]}\right)^{\dagger},\ L^{3}_{[\pm]} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{3}\pm\mathcal{J}^{3}\right), \\ &\iota=\pm,\ \left[L^{+}_{[\iota]},L^{-}_{[\iota']}\right] = 2L^{3}_{[\iota]}\,\delta_{\iota\iota'},\ \left[L^{3}_{[\iota]},L^{\pm}_{[\iota']}\right] = \pm L^{\pm}_{[\iota]}\,\delta_{\iota\iota'},\ \text{где:}\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$L^{3}_{[\iota]}\,|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle = -\frac{\mathcal{L}}{2}\,|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle,\ \ \left(\boldsymbol{L}_{[\iota]}\right)^{2}|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle = \frac{\mathcal{L}}{2}\left(\frac{\mathcal{L}}{2}+1\right)|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle. \tag{4.96}$$

Это позволяет, дословно повторяя рассуждения и выкладки предыдущего пункта, получить следующий аналог представления когерентных состояний на выбранном из прямого произведения представлений $SU_T(2) \times SU_J(2)$ подпространстве состояний (4.92) с $0 \leq N \leq \mathcal{L}$, $\iota = \pm$, реализующих представление (4.96) $SU_{[\pm]}(2)$:

$$|\xi, [\iota]\rangle_{\mathcal{L}} = \aleph_{\mathcal{L}}^{[\iota]}(\xi) \sum_{N=0}^{\mathcal{L}} \xi^N \sqrt{\frac{\mathcal{L}!}{(\mathcal{L}-N)!N!}} \, |\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; \iota N\rangle \tag{4.97}$$

$$= \exp\left(\xi L_{[\iota]}^{+}\right) \exp\left(L_{[\iota]}^{3} \ln(1+|\xi|^2)\right) \, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle = \tag{4.98}$$

$$= \exp\left(\xi L_{[\iota]}^{+}\right) \exp\left(L_{[\iota]}^{3} \ln(1+|\xi|^2)\right) \exp\left(-\xi^* L_{[\iota]}^{-}\right) \, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \equiv$$

$$\equiv \exp\left(\nu L_{[\iota]}^{+} - \nu^* L_{[\iota]}^{-}\right) \, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle, \quad \aleph_{\mathcal{L}}^{[\iota]}(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{-\mathcal{L}/2},$$

$$\text{где, при } \xi = -\tan\frac{\Theta}{2}\, e^{-i\Phi} : \; \nu = -\frac{\Theta}{2}\, e^{-i\Phi}, \tag{4.99}$$

$$\left|{}_{\mathcal{L}}\langle \xi', [\iota'] \, | \, \xi, [\iota]\rangle_{\mathcal{L}}\right|^2 = \delta_{\iota\iota'} \left[1 - \frac{|\xi'-\xi|^2}{(1+|\xi'|^2)\,(1+|\xi|^2)}\right]^{\mathcal{L}} \stackrel{(\mathcal{L}\to\infty)}{\longrightarrow} 0. \tag{4.100}$$

"Изовекторные" когерентные состояния с $\mathcal{J}^3 = 0$ должны, вероятно, получаться аналогичным построением на векторах $|\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; 0\rangle$ (4.81), при $\boldsymbol{w}_{[0]} = (0,0,1)$, поскольку из (4.85) не трудно извлечь соответствующую им симметрию $SU_{[0]}(2)$, которая, однако, не коммутирует с $SU_{[\pm]}(2)$:

$$L_{[0]}^{\pm} = \left(\sigma_{\alpha\beta}^{3} \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\pm}\right), \;\; L_{[0]}^{3} = \mathcal{G}^3, \;\; \left[L_{[0]}^{+}, L_{[0]}^{-}\right] = 2L_{[0]}^{3}, \;\; \left[L_{[0]}^{3}, L_{[0]}^{\pm}\right] = \pm L_{[0]}^{\pm}, \tag{4.101}$$

$$\left[L_{[0]}^{3}, L_{[\iota]}^{\pm}\right] = \pm L_{[\iota]}^{\pm}, \;\; \left[L_{[\iota]}^{3}, L_{[0]}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2} L_{[0]}^{\pm}, \;\; \left[L_{[0]}^{-}, L_{[\pm]}^{+}\right] = \pm \mathcal{J}^{\pm}. \tag{4.102}$$

Воспользовавшись формальной асимптотикой производящей функции полиномов Гегенбауэра [165], содержащей функцию Бесселя $J_{\lambda-1/2}(x)$, при $-\mathcal{L} - \frac{1}{2} = \lambda \to \infty$ имеем:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\zeta \mathcal{G}^{+}\right)^N C_N^{(\lambda)} \left(\frac{L_{[0]}^{+}}{\mathcal{G}^{+}}\right) \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(2\lambda+N)} = \tag{4.103}$$

$$= \exp\left(\zeta L_{[0]}^{+}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left[\zeta \sqrt{\mathcal{G}_L^{+} \mathcal{G}_R^{+}}\right]^{1/2-\lambda} J_{\lambda-1/2}\left(2\zeta \sqrt{\mathcal{G}_L^{+} \mathcal{G}_R^{+}}\right) \simeq \exp\left(\zeta L_{[0]}^{+}\right).$$

Соответствующее когерентное состояние при больших $\mathcal{L}$ можно тогда формально записать также в виде суммы:

$$|\zeta, [0]\rangle_{\mathcal{L}} = \aleph_{\mathcal{L}}^{[0]}(\zeta) \exp\left(\zeta L_{[0]}^{+}\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \simeq \tag{4.104}$$
$$\simeq \aleph_{\mathcal{L}}^{[0]}(\zeta) \sum_{N=0}^{\infty} \zeta^N \sqrt{\frac{(2\mathcal{L}+1-N)!}{(2\mathcal{L}+1-2N)!N!}}\, |\mathcal{L}-N, N-\mathcal{L}; 0\rangle,$$
$$|\zeta, [0]\rangle_{\mathcal{L}} = \exp\left(\zeta L_{[0]}^{+}\right) \exp\left(L_{[0]}^{3} \ln(1+|\zeta|^2)\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle = \tag{4.105}$$
$$= \exp\left(\zeta L_{[0]}^{+}\right) \exp\left(L_{[0]}^{3} \ln(1+|\zeta|^2)\right) \exp\left(-\zeta^* L_{[0]}^{-}\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \equiv$$
$$\equiv \exp\left(\kappa L_{[0]}^{+} - \kappa^* L_{[0]}^{-}\right) |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle, \quad \aleph_{\mathcal{L}}^{[0]}(\zeta) = \left(1+|\zeta|^2\right)^{-\mathcal{L}},$$
$$\text{где, при } \zeta = -\tan\frac{\omega}{2}\, e^{-i\psi} : \quad \kappa = -\frac{\omega}{2}\, e^{-i\psi}, \tag{4.106}$$
$$\left|{}_{\mathcal{L}}\langle \zeta', [0]\,|\,\zeta, [0]\rangle_{\mathcal{L}}\right|^2 = \left[1 - \frac{|\zeta'-\zeta|^2}{(1+|\zeta'|^2)\,(1+|\zeta|^2)}\right]^{2\mathcal{L}} \stackrel{(\mathcal{L}\to\infty)}{\longrightarrow} 0. \tag{4.107}$$

4.3 Переход к "адронному" базису

Замечательным свойством построенных когерентных состояний является возможность предельного перехода к базису чисто бозонных когерентных состояний. Действительно, имея ввиду известное представление Холстейна-Примакова [166] для $SU_T(2)$ генераторов в представлении с фиксированным полным моментом $\mathcal{L}$ через бозонные операторы рождения и уничтожения $X^{\pm}$:

$$\mathcal{G}^{\pm} = X^{\pm} \sqrt{2\mathcal{L} - X^+X^- + (1\mp 1)/2}, \quad \mathcal{G}^3 = X^+X^- - \mathcal{L}, \tag{4.108}$$

аналогично, положим и для $SU_{[0,\pm]}(2)$ [161] при $\iota = \pm$, $\mathcal{L} \to \infty$:

$$\mathcal{G}^3 \to -\mathcal{L}, \;\; \mathcal{G}^{\pm} \to X^{\pm}\sqrt{2\mathcal{L}}, \;\; L_{[\iota]}^{\pm} \to \Pi_{[\iota]}^{\pm}\sqrt{\mathcal{L}}, \;\; L_{[0]}^{\pm} \to \Pi_{[0]}^{\pm}\sqrt{2\mathcal{L}}, \tag{4.109}$$
$$\eta \to \frac{\alpha}{\sqrt{2\mathcal{L}}}, \quad \xi \to \frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{L}}}, \quad \zeta \to \frac{\gamma}{\sqrt{2\mathcal{L}}}.$$

Тогда, в пределе коммутационные соотношения для операторов моментов (4.85), (4.95), (4.101), (4.102) и когерентные состояния (4.58), (4.98), (4.105) превращаются в стандартные бозонные коммутационные соотношения и бозонные когерентные состояния соответственно, но уже при $\iota = 0, \pm$, формируя обычные "изоскалярное" и "изовекторное" бозонные представления над бозонным вакуумом $|0\rangle_\infty$, если, для некоторого $Z_{\mathcal{L}}$,

$$\lim_{\mathcal{L}\to\infty} Z_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle \Longrightarrow |0\rangle_\infty, \quad \text{тогда:} \tag{4.110}$$

$$\left[X^-, X^+\right] = 1, \quad \left[\Pi^-_{[\iota]}, \Pi^+_{[\iota']}\right] = \delta_{[\iota\iota']}, \tag{4.111}$$

$$Z_{\mathcal{L}} |\eta\rangle_{\mathcal{L}} \Longrightarrow \exp\left(-|\alpha|^2/2\right) \exp\left(\alpha X^+\right) |0\rangle_\infty, \tag{4.112}$$

$$Z_{\mathcal{L}} |\xi, [\pm]\rangle_{\mathcal{L}} \Longrightarrow \exp\left(-|\beta|^2/2\right) \exp\left(\beta \Pi^+_{[\pm]}\right) |0\rangle_\infty, \tag{4.113}$$

$$Z_{\mathcal{L}} |\zeta, [0]\rangle_{\mathcal{L}} \Longrightarrow \exp\left(-|\gamma|^2/2\right) \exp\left(\gamma \Pi^+_{[0]}\right) |0\rangle_\infty. \tag{4.114}$$

Сам предельный переход $\mathcal{L} \to \infty$ можно, таким образом, интерпретировать как переход к термодинамическому пределу, сопровождающий фазовый переход "кварковой" многочастичной системы в "адронную" многочастичную систему.

Интересно отметить, что предельные "изоскалярные" и "изовекторные" голдстоуновские бозоны (4.111)-(4.114) оказались связаны с совершенно различными сериями когерентных состояний "кварковых пар", отвечающих существенно различным подгруппам $SU_T(2)$ и $SU_{[0,\pm]}(2)$ полной группы симметрии гамильтониана. Это позволяет предложить простой способ решения возможного в этой модели аналога известной $U(1)$-проблемы: отсутствия в физическом спектре мезонов изоскалярного голдстоуновского бозона, а заодно указать на возможное происхождение величины $Z_{\mathcal{L}}$ в (4.113), (4.114). Для этого здесь достаточно потребовать, чтобы физические "адронные" состояния не зависели от направления единичного вектора $\mathbf{n}(\eta) = \mathbf{n}(\theta, \phi)$ в (4.58)-(4.61), т.е., чтобы наблюдались только состояния, усредненные по всем его направлениям *до перехода* к термодинамическому пределу $\mathcal{L} \to \infty$ (т.е. $\mathcal{V} \to \infty$ и/или $\Lambda \to \infty$). Предлагаемый рецепт аналогичен рецепту [47] усреднения по параметрам топологического вырождения вакуумных решений для неабелевой калибровочной теории в конечном объеме. Поскольку, усреднение уже с *произвольной* весовой функцией $\rho_{\mathcal{L}}\left(|\eta|^2\right)$ "убирает" из любого когерентного состояния (4.57) все "изоскалярные" операторы $\mathcal{G}^+$ [161], оставляя только вакуумное состояние (4.53), (которое, в силу (4.61), само является когерентным состоянием "вдоль третьей оси"), ее можно выбрать так, чтобы, помимо (4.110), (4.112), при усреднении с мерой

$$d\mu_{\mathcal{L}}(\eta) = \frac{(2\mathcal{L}+1)\, d^2\eta}{\pi\left(1+|\eta|^2\right)^2}, \quad \int d\mu_{\mathcal{L}}(\eta)\, \rho_{\mathcal{L}}\left(|\eta|^2\right) |\eta\rangle_{\mathcal{L}} = Z_{\mathcal{L}}\, |\mathcal{L}, -\mathcal{L}\rangle. \qquad (4.115)$$

Такое усреднение навсегда "хоронит" в предельном вакуумном состоянии (4.110) информацию о направлении "вакуумной намагниченности" $\boldsymbol{n}(\vartheta,\varphi)$ (4.43). В итоге, предельный переход оставляет только когерентные состояния (4.113), (4.114) для "изовекторных" операторов с $\mathcal{J}^3 = \pm 1, 0$. Таким образом, гильбертовы пространства "адронных" когерентных состояний с различными значениями "изоспина" оказываются определенными пределами совокупностей различных, и, вообще говоря, унитарно неэквивалентных гильбертовых пространств когерентных состояний "кварковых пар" со всевозможными значениями и направлениями "вакуумной цветовой намагниченности".

5 Выводы.

Выше показана возможность диагонализуемости нерелятивистской полевой модели четырехфермионного взаимодействия с участием векторных токов, в "фазе" со спонтанным нарушением симметрии, на полях, содержащих операторы и рождения и уничтожения. Получен явный вид причинной функции Грина и связанных с ней фермионных конденсатов. Наличие достаточно богатой симметрии позволило: построить обобщение квазиспиновой алгебры, проследить механизмы восстановления симметрии и подмены одной спонтанно нарушенной симметрии другой, проклассифицировать различные унитарно неэквивалентные секторы модели путем построения подходящих когерентных состояний. В термодинамическом пределе $\mathcal{L} = \mathcal{V}/V^* \to \infty$ в данной модели удалось проследить фазовый переход "кварковой" многочастичной системы в "адронную", при котором различные унитарно неэквивалентные сектора полного гильбертова пространства "кварковых" состояний переходят в пространства состояний различных "адронов", соответствующих голдстоуновским бозонам – "пионам" с различным "изотопспином":

$$\Pi^+_{[0,\pm]} \Longleftarrow \lim_{\mathcal{L}\to\infty} \int d^3k A^\dagger_\alpha(\mathbf{k}) \frac{\left(\boldsymbol{w}_{[0,\pm]} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)_{\alpha\beta}}{\sqrt{2\mathcal{L}}} \widetilde{A}^\dagger_\beta(-\mathbf{k}). \tag{4.116}$$

Проведенный учет вырождения "вакуумных состояний" по отношению к симметриям $SU_{[0,\pm]}(2)$, означает частичное восстановление на квантовом уровне отмеченной ранее неразличимости групп $SU_T(2)$ и $SU_J(2)$, как симметрий гамильтониана (4.4), поскольку, и при наличии спонтанного нарушения одной из них невозможно указать, *какая именно из них нарушена.* Однако, если *назвать* нарушенную симметрию $SU_T(2)$, то оставшаяся ненарушенной симметрия будет определять классификацию соответствующих голдстоуновских бозонов и, в этом смысле, она есть симметрия $SU_J(2)$. Кроме того, из формул (4.33), (4.47) явствует, что преобразование Боголюбова (4.15), (4.16) спонтанно нарушает $SU_T(2)$ симметрию гамильтониана ценой явного нарушения соответствующих трансформационных свойств фермионного поля. В частности, интерпретация $\widetilde{A}^\dagger_\alpha$ как оператора рождения античастицы к $A^\dagger_\alpha$ в этой сугубо нерелятивистской модели, в отсутствие зарядового сопряжения, является условной; фермионное ГП (4.33) *не является* обычным нерелятивистским пределом релятивистского биспинорного ГП вида (4.2).

Глава 5

Двухчастичные состояния и перенормировка тонкой подстройкой.

В этой главе исследуются одно- и двухчастичный сектор предложенной выше модели. Развита процедура перенормировки путем "тонкой подстройки" зависимости "голых" параметров (массы и константы связи) от обрезания и последующего предельного перехода $\Lambda \to \infty$. Показано, как этот рецепт Λ-обрезания вместе с тонкой подстройкой приводит к точным решениям для волновых функций и энергетических спектров собственных состояний гамильтониана в одно- и двухчастичном секторах. В системе со спонтанно нарушенной симметрией установлен спектр энергии и структура связанных состояний соответствующих составным голдстоуновским бозонам.

1 Голдстоуновские бозоны и галилеевская инвариантность.

Взаимодействие между всеми частицами в системах B и C такое же как для AA, $\widetilde{A}\widetilde{A}$ – каналов в системе A. Поэтому сосредоточимся на последней. Далее BB означает BB, $\widetilde{B}\widetilde{B}$, $B\widetilde{B}$ и аналогичный смысл имеет CC. Определяя ядра взаимодействий (4.23) и двухчастичные энергии как:

$$K^{(QQ')}(\mathbf{s},\mathbf{k}) = K^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\mathbf{s},\mathbf{k}), \quad \text{для } QQ' = \left\{ {\widetilde{A}\widetilde{A},\, AA,\, BB,\, CC \atop A\widetilde{A}} \right\} \text{ соответственно},$$

$$-2K^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\mathbf{s},\mathbf{k}) = \frac{V^*}{(2\pi)^3}\cdot\frac{2g}{(2mc)^2}\left[(\mathbf{s}+\mathbf{k})^2 + Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}\right], \tag{5.1}$$

$$Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}} = \{\pm\}(2mc)^2 - \mathcal{P}^2, \tag{5.2}$$

$$E_2^{QQ'}(\mathcal{P},\mathbf{k}) = E_Q\left(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k}\right) + E_{Q'}\left(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k}\right) = E_{2\{\pm\}}(\mathcal{P},\mathbf{k}), \tag{5.3}$$

$$E_{2\{\pm\}}(\mathcal{P},\mathbf{k}) \equiv \frac{2g}{(2mc)^2}\left[\ll k^2 \gg + Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}} + k^2 + \frac{5}{4}\mathcal{P}^2\right] + \Theta_{\{\pm\}}, \quad \text{где}$$

$$\Theta_{\{+\}} = \left\{ \begin{matrix} \pm\left[4g - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k}) - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k})\right] \\ \pm\left[12g - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k}) - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k})\right] \end{matrix} \right\}, \quad \text{для} \quad QQ' = \begin{Bmatrix} \widetilde{A}\widetilde{A} \\ BB \\ CC \\ AA \end{Bmatrix},$$

$$\Theta_{\{-\}} = \left[\mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k}) - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k})\right], \qquad \text{для} \quad QQ' = A\widetilde{A}.$$

можно, как в Главе 2, сформулировать задачу на собственные значения редуцированного гамильтониана $\widehat{H}$ (4.17) в пространстве Фока, построенном по его кинетической части $\widehat{H}_0$ (4.22):

$$\widehat{H} \mid R^{\pm(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle = E_2^{QQ'}(\mathcal{P},\mathbf{q}) \mid R^{\pm(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle, \tag{5.4}$$

$$\widehat{H} \mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}(QQ')}_{\alpha\beta}\rangle = M_2^{QQ'}(\mathcal{P}) \mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}(QQ')}_{\alpha\beta}\rangle, \quad M_2^{QQ'}(\mathcal{P}) = E_2^{QQ'}(\mathcal{P}, q=ib),$$

$$\mid R^{\pm(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{q})\rangle = \int d^3k\, \Phi^{\pm QQ'}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}) \mid R^{0(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{k})\rangle, \tag{5.5}$$

$$\mid \mathrm{B}^{\mathcal{P}(QQ')}_{\alpha\beta}\rangle = \int d^3k\, \Phi^{QQ'}_{\mathcal{P}b}(\mathbf{k}) \mid R^{0(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{k})\rangle, \tag{5.6}$$

$$\mid R^{0(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P},\mathbf{k})\rangle = \mathbf{Q}^\dagger_\alpha(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k})\,\mathbf{Q}'^\dagger_\beta(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k})\mid 0\rangle,$$

где $\mathbf{Q},\mathbf{Q}'$ означают операторы рождения $\mathbf{A},\widetilde{\mathbf{A}}$, или $\mathbf{B},\widetilde{\mathbf{B}}$, или $\mathbf{C},\widetilde{\mathbf{C}}$, в терминах уравнения Шредингера для соответствующих волновых функций рассеяния и связанных состояний:

$$\Big[E_2^{QQ'}(\mathcal{P},\mathbf{k}) - M_2^{QQ'}(\mathcal{P})\Big]\,\Phi_{\mathcal{P}b}^{QQ'}(\mathbf{k}) = -2\int d^3s\,\Phi_{\mathcal{P}b}^{QQ'}(\mathbf{s})\,K^{(QQ')}(\mathbf{s},\mathbf{k}). \qquad (5.7)$$

Обрезая расходящийся интеграл справа на величине Λ, и используя определения (4.19), (4.21), (5.3) *с тем же значением* Λ (смотри Выводы в главе 1), не трудно убедиться [108], [110], что, при $m(\Lambda)\to\infty$ вместе с $\Lambda\to\infty$, это уравнение в случае $\{-\}$, практически независимо от явного вида "голого" спектра $\mathcal{E}(k)$ обладает простым решением:

$$\Phi_{\mathcal{P}b_G}^{A\widetilde{A}}(\mathbf{k}) = const_G,\quad M_{2G}^{A\widetilde{A}}(\mathcal{P}) = \frac{5}{4}\frac{2g\mathcal{P}^2}{(2mc)^2} \Longrightarrow \frac{5}{4}\frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{M}_0},\quad \mathcal{M}_0 = \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{(2mc)^2}{2g}. \qquad (5.8)$$

Оно представляет четыре *движущихся* голдстоуновских состояния с обычным магнонным спектром [167] в пределе длиных волн или плотной спиновой решетки, с массами $m_G = (2/5)\mathcal{M}_0$, чьи операторы рождения при $const_G = 1$ определяются (5.6) в виде:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{+}(\mathcal{P}) = \int d^3k\,\mathbf{A}_{\alpha}^{\dagger}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k})\,\widetilde{\mathbf{A}}_{\beta}^{\dagger}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k}), \qquad (5.9)$$

демонстрируя явную галилеевскую инвариантность этих состояний, несмотря на то, что исходный гамильтониан (4.4), (5.1) из-за члена с векторным током $\boldsymbol{J}^a(x)$ ею явно не обладает. При $\mathcal{P}=0$ они сводятся к (4.45) и точно коммутируют (4.46) с гамильтонианом (4.4), т.е. уравнение (5.7) *для этого решения* удовлетворяется тождественно даже при конечных Λ (см., однако, ниже, пункт 2.4)! Дополнительные условия нужны лишь при $\mathcal{P}\neq 0$:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} m(\Lambda)\to\infty,\quad \mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_0 + mc^2h(\zeta^2),\quad h'(0)<\infty, \qquad (5.10)$$
$$\zeta = \frac{k}{mc},\quad \lim_{k\to\infty}\Big[\mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}+\mathbf{k}) - \mathcal{E}(\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{k})\Big]\cdot k^{-2} = 0.$$

Они выполняются для весьма широкого класса спектров, включая как релятивистский $h(z)=\sqrt{1+z}$, так и нерелятивистский $h(z)=z/2$. Нормировка волновой функции (5.8) на (большой) конечный пространственный объем $\mathcal{V}$ автоматически приводит к выражению (4.116) для этого оператора рождения (в бесконечном объеме $\mathcal{V} \longmapsto (2\pi)^3$):

$$\Phi^{A\widetilde{A}}_{\mathcal{P}b_G}(\mathbf{k}) = const_G = \sqrt{\frac{V^*}{\mathcal{V}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}}, \qquad \psi_{b_G}(\mathbf{x}) = \sqrt{V^*}\delta_3(\mathbf{x}). \tag{5.11}$$

Подчеркнем, что это, – в определенном смысле, обобщенное (см. следующую главу) решение, в силу (5.1)-(5.3), является точным в системе покоя только в $A\widetilde{A}$ – канале системы А, и что частицы, соответствующие этим голдстоуновским состояниям, остались бы неподвижными в отсутствии взаимодействия векторных токов $\boldsymbol{J}^a(x)$ (4.3) в (4.4), т.е. при $c = \infty$.

Любопытно, что аналогичное (4.4), (5.1) одномерное взаимодействие (бозонных) векторных токов также непосредственно приводит к собственному связанному состоянию с полной энергией вида (5.8), ассоциируемому с классическим двухсолитонным решением [168].

Существование конечного ненулевого предела для величины $\mathcal{M}_0$ в (5.8) означает определенную "тонкую подстройку" зависимости от Λ у затравочных массы и константы связи. Как будет показано ниже, соответствующий полюс уже в half-shell-T-матрице, в принятых выше условиях, в точности параметрически сокращается, что позволяет, в принципе, интерпретировать это состояние как связанное состяние, погруженное в континуум ([169] стр. 246), хотя сама T-матрица *в этом случае* исчезает при $\Lambda \to \infty$. Однако, непосредственная интерпретация решения (5.8) как связанного состояния осложняется тем что его волновая функция (5.11) не может быть нормирована стандартным образом, хотя физически она, казалось бы, просто означает, что комптоновская длина волны частицы значительно больше ее храктерного размера [51]. На самом деле голдстоуновская мода, проявляющаяся как связанное состояние с *нулевой* энергией связи при *нулевом* орбитальном моменте, *в принципе* *не может* появиться как обычное квадратично интегрируемое решение (нерелятивистского) уравнения Шредингера *ни с каким* короткодействующим потенциалом, что проявляется, в частности, в известной теореме Левинсона [170].

В следующей главе этот вопрос будет рассмотрен в рамках теории расширений операторов с выходом в пространства с индефинитной метрикой.

2 Перенормировка тонкой подстройкой.

2.1 Одночастичный сектор.

Согласно (4.21), квадратичная форма "голого" одночастичного спектра трансформируется в следующие *квадратичные* же перенормированные спектры для различных систем:

$$\mathcal{E}(k) = \frac{k^2}{2m} + \mathcal{E}_0 \longmapsto E_Q^{(\pm)}(k) = \frac{k^2}{2\mathcal{M}^{(\pm)}} + E_{Q0}^{(\pm)}, \tag{5.12}$$

$$E_{Q0}^{(\pm)} = g\left(\frac{\ll k^2 \gg}{(2mc)^2} + c_Q^{(\pm)}\right) \mp \mathcal{E}_0, \quad c_A^{(\pm)} \equiv c_{\left\{\begin{smallmatrix}\widetilde{A}\\ A\end{smallmatrix}\right\}} = -1 \pm 4, \quad c_{\left\{\begin{smallmatrix}C(+)\\ B(-)\end{smallmatrix}\right\}} = 3 \pm 4,$$

$$\frac{1}{2\mathcal{M}^{(\pm)}} = \frac{g}{(2mc)^2} \mp \frac{1}{2m}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda\mathcal{M}^{(\pm)}}{2}, \quad \mu_0 = \frac{\lambda_0}{(2mc)^2} \equiv \frac{\mu\mathcal{M}^{(\pm)}}{2}. \tag{5.13}$$

Индексы $(\pm)$ и/или $\{\pm\}$ в очевидных случаях в дальнейшем опускаются. Для фиксации зависимости от обрезания удобно ввести безразмерную эффективную "константу связи" векторного тока:

$$\gamma \equiv \gamma_{\{\pm\}}^{(\pm)}(\Lambda), \quad \gamma_{\{-\}} \equiv 1,$$

$$\gamma_{\{+\}}^{(\pm)}(\Lambda) = 1 \pm \frac{\mathcal{M}^{(\pm)}}{m} = \frac{2\mathcal{M}^{(\pm)}g}{(2mc)^2} = \frac{\mu_0}{V^*} \Longrightarrow \left[1 \mp \frac{c\sqrt{\nu(\Lambda)}}{\Lambda G(\Lambda)}\right]^{-1}, \tag{5.14}$$

$$\text{и функции: } (2mc)^2 = \Lambda^2\nu(\Lambda), \quad g(\Lambda) = \Lambda^2 G(\Lambda), \quad \mathcal{E}_0(\Lambda) = \Lambda^2\epsilon(\Lambda), \tag{5.15}$$

$$\text{где принято: } G(\Lambda) = G_0 + \frac{G_1}{\Lambda} + \frac{G_2}{\Lambda^2} + \cdots, \tag{5.16}$$

$$\nu(\Lambda) = \nu_0 + \frac{\nu_1}{\Lambda} + \frac{\nu_2}{\Lambda^2} + \cdots, \qquad \epsilon(\Lambda) = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{\Lambda} + \frac{\epsilon_2}{\Lambda^2} + \cdots,$$

$$\gamma^{(\pm)}_{\{+\}}(\Lambda) = \gamma^{(\pm)}_{0\{+\}} + \frac{\gamma^{(\pm)}_{1\{+\}}}{\Lambda} + \cdots, \qquad \mathcal{M}^{(\pm)}(\Lambda) = \mathcal{M}^{(\pm)}_0 + \frac{\mathcal{M}^{(\pm)}_1}{\Lambda} + \cdots,$$

$$\text{тогда}\ \ E^{(\pm)}_{Q0}(\Lambda) = \Lambda^2 \left\{ G(\Lambda) \left[\frac{3}{5\nu(\Lambda)} + c^{(\pm)}_Q \right] \mp \epsilon(\Lambda) \right\}, \tag{5.17}$$

Ниже будет показано, что зависимость $g(\Lambda)$ связана, вообще говоря, с условиями перенормировки двухчастичной задачи. Тогда как при заданной $g(\Lambda)$ всегда можно подобрать зависимость "голых" величин $m(\Lambda)$, $\mathcal{E}_0(\Lambda)$ от параметра обрезания Λ, так чтобы перенормированные величины $\mathcal{M}(\Lambda)$, $E_{Q0}(\Lambda)$ оставались конечными при $\Lambda \to \infty$. Принятый здесь вид этой зависимости (5.15), (5.16) согласован как с условиями существования голдстоуновских решений (5.10), так и с соображениями размерности и "автомодельности" этих перенормированных величин, и, как станет ясно далее, с условием галилеевской инвариантности, и, для $G_0, \nu_0 \neq 0, \infty$, приводит к конечным значениям для:

$$\gamma^{(\pm)}_{0\{\pm\}} = 1, \ \ \gamma^{(\pm)}_{1\{+\}} = \pm\frac{c\sqrt{\nu_0}}{G_0}, \ \ \mathcal{M}^{(\pm)}_{0\{\pm\}} = \mathcal{M}_0 = \frac{\nu_0}{2G_0}, \tag{5.18}$$

$$E^{(\pm)}_{Q0}(\Lambda) = \Lambda^2 \left[G_0 \left(\frac{3}{5\nu_0} + c^{(\pm)}_Q \right) \mp \epsilon_0 \right] + \Lambda \left[G_1 \left(\frac{3}{5\nu_0} + c^{(\pm)}_Q \right) \mp \epsilon_1 - \frac{3G_0\nu_1}{5\nu_0^2} \right]$$
$$+ \left[G_2 \left(\frac{3}{5\nu_0} + c^{(\pm)}_Q \right) \mp \epsilon_2 - \frac{3}{5} \left(\frac{G_0\nu_2 + G_1\nu_1}{\nu_0^2} - \frac{G_0\nu_1^2}{\nu_0^3} \right) \right]. \tag{5.19}$$

Следовательно, условия перенормировки в одночастичном секторе подразумевают, что выражения в первых и вторых квадратных скобках (5.19) исчезают. Как показано в следующем пункте, значение ν_0 диктуется условиями перенормировки в двухчастичном секторе, что для QQ-каналов, – случай $\{+\}$, приводит к выражениям:

$$E_{\{+\}}(k) \equiv E_{\left\{\begin{smallmatrix}\tilde{A}\\ B\\ C\\ A\end{smallmatrix}\right\}}(k) = \frac{k^2 + \nu_2}{2\mathcal{M}_0} - \frac{5}{3}\nu_1 \left(G_1 - \frac{\nu_1}{2\mathcal{M}_0} \right) + \left\{ \begin{matrix} \pm(2G_2 - \epsilon_2) \\ \pm(6G_2 - \epsilon_2) \end{matrix} \right\},$$

$$\text{для:}\ \left\{\begin{array}{l}\left(\epsilon_0 = 2G_0,\ \ \epsilon_1 = 2G_1 \pm \dfrac{\nu_1}{2\mathcal{M}_0}\right) \\ \left(\epsilon_0 = 6G_0,\ \ \epsilon_1 = 6G_1 \pm \dfrac{\nu_1}{2\mathcal{M}_0}\right)\end{array}\right\},\quad \text{при}\quad \nu_0 = -\frac{3}{5}, \tag{5.20}$$

где четыре позиции слева соответствуют четырем позициям справа. В противоположность этому, для $A\widetilde{A}$-канала, – в случае $\{-\}$, требование конечности одновременно *обоих* одночастичных спектров $E_A^{(\pm)}(k)$ (4.35) при $\Lambda \to \infty$ *независимо* приводит к условиям

$$\gamma_{\{-\}} \equiv 1,\ \ \mathcal{M}_{0\{-\}}^{(\pm)} \equiv \widetilde{\mathcal{M}}_0 = \frac{\widetilde{\nu}_0}{2G_0},\ \ \widetilde{\nu}_0 = \frac{3}{5},\ \ \widetilde{\nu}_1 = 0,\ \ \widetilde{\epsilon}_{0,1} = 4G_{0,1}, \tag{5.21}$$

третье из которых *совпадает* с найденным ниже условием перенормировки в *двухчастичном* секторе (5.43), (5.51). При этом они имеют вид:

$$E_{\{-\}}(k) = E_A^{(\pm)}(k) \equiv \widetilde{E}_{\left\{\substack{\widetilde{A}\\ A}\right\}}(k) = \frac{k^2 - \nu_2}{2\widetilde{\mathcal{M}}_0} \pm (4G_2 - \epsilon_2), \tag{5.22}$$

и сводятся к стандартным перенормированным спектрам в среде:

$$E_A^{(\pm)}(k) \Longrightarrow \frac{k^2}{2\widetilde{\mathcal{M}}_0} + \widetilde{M}c^2 \pm \widetilde{\mu}_A, \quad \text{если, помимо (5.21), положить:} \tag{5.23}$$

$$\widetilde{\nu}_2 \Longrightarrow -2\widetilde{\mathcal{M}}_0\widetilde{M}c^2 < 0,\ \ 4G_2 - \widetilde{\epsilon}_2 = \widetilde{\mu}_A,\ \text{(химический потенциал).} \tag{5.24}$$

Параметр $\widetilde{M}$ имеет смысл инертной массы физического "кварка", которая, в соответствии с "неизлечимо" нерелятивистским характером модели (см. Введение), не обязана совпадать с его эффективной кинетической – конституентной массой $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, и вполне может быть много меньше нее, – порядка токовой массы соответствующего кварка, $\widetilde{M} \ll \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Такие физические "кварки" аналогичны квазичастицам в теории конденсированного состояния [160] и не могут получаться из токовых кварков по теории возмущений КХД [101]. Они имеют смысл лишь как "диагонализующие конституенты", формирующие только медленно движущиеся связанные состояния с нерелятивистскими импульсами $\mathcal{P}_h^2 \ll 2\widetilde{\mathcal{M}}_0\widetilde{M}c^2$. Это условие и (5.24) связаны также с интерпретацией голдстоуновской моды в теории расширений (6.119), обсуждаемой в следующей главе.

2.2 Двухчастичный сектор.

В координатном представлении уравнение (5.7) для обоих вариантов $\{\pm\}$ в (5.1)-(5.3) содержит сильно сингулярный сосредоточенный потенциал взаимодействия и для состояний рассеяния в (5.4)-(5.6) имеет вид:

$$\left(-\nabla^2 - q^2\right)\psi_q(\mathbf{x}) = \delta_3(\mathbf{x})N_1(q) - \nabla^2\delta_3(\mathbf{x})N_2(q) - 2\mu_0\left((\boldsymbol{\nabla}\psi_q)(0)\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta_3(\mathbf{x})\right),$$

$$N_1(q) \equiv (\{\pm\}\lambda_0 - \mu_0\mathcal{P}^2)\psi_q(0) - \mu_0(\nabla^2\psi_q)(0), \quad N_2(q) \equiv \mu_0\psi_q(0). \quad (5.25)$$

Здесь первый и второй члены справа создают взаимодействие в состоянии с орбитальным моментом $l = 0$, а третий член приводит к взаимодействию только в состояниях с $l = 1$.

В следующей главе этот сильно сингулярный потенциал рассмотрен методами теории расширений симметричных операторов с выходом в пространства с индефинитной метрикой, развитыми в работах [16]-[25]. Однако, при $\mu_0 = 0$, т.е. $c \to \infty$, $\mathcal{M} \to m$, гамильтониан (4.4) сводится к гамильтониану (2.42), а уравнение (5.25) сводится к уравнению Шредингера с сингулярным дельта-потенциалом. Поэтому идею тонкой подстройки можно, помимо [12], почерпнуть фактически уже в основополагающей работе [13] по этому сингулярному уравнению:

$$\left(-\nabla^2 - q^2\right)\psi_q(\mathbf{x}) = \lambda_0\delta_3(\mathbf{x})\psi_q(\mathbf{x}) = \lambda_0\delta_3(\mathbf{x})\psi_q(0). \quad (5.26)$$

В импульсном представлении его формальные решения для связанных состояний и рассеяния имеют вид (2.66), (2.67), (2.70), (2.72):

$$\psi_q^{\pm}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i(\mathbf{kx})}\, \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}), \quad \psi_b(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i(\mathbf{kx})}\, \Phi_{\mathcal{P}b}(\mathbf{k}), \quad (5.27)$$

$$\Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}) = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) + \frac{\lambda_0\psi_q^{\pm}(0)}{(k^2 - q^2 \mp i0)}, \qquad \Phi_{\mathcal{P}b}(\mathbf{k}) = \frac{\lambda_0\psi_b(0)}{k^2 + b^2}, \quad (5.28)$$

где параметр b, $q \to ib$ – определяет энергию связи. Подставляя их в *стандартные* условия нормировки:

$$\int d^3k\, \Phi^{\pm *}_{\mathcal{P}p}(\mathbf{k})\, \Phi^{\pm}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}) = \delta_3(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \int d^3k\, \left|\Phi_{\mathcal{P}b}(\mathbf{k})\right|^2 = (2\pi)^3, \quad (5.29)$$

$$\text{имеем:}\quad \left[\lambda_0\psi_q^{\pm}(0)\right]^{-1} - \left[\lambda_0^*\psi_p^{\pm *}(0)\right]^{-1} = -2\pi^2\left[\pm iq - (\pm ip)^*\right],$$
$$\text{а, при}\ \ b>0,\ \lambda_0\psi_b(0) = \sqrt{8\pi b}. \tag{5.30}$$

Отсюда видно, что при любом $Im\ b = 0$ можно записать:

$$\left[\lambda_0\psi_q^{\pm}(0)\right]^{-1} = -2\pi^2(b \pm iq), \quad \text{где}\ \ \mathrm{sign}(b) \overset{\text{взамен}}{\longrightarrow} \mathrm{sign}(\lambda_0), \tag{5.31}$$

т.е. в дополнительных граничных условиях в точке $\mathbf{x} = 0$ (5.30), (5.31) естественно возникает *произвольный* вещественный параметр (самосопряженного расширения) b. В тоже время, ни λ_0 ни $\psi(0)$, в отличие от их произведения, не имеют смысла по отдельности. Уравнение же на связанное состояние (2.69) (если таковое существует), при наличии процедуры обрезания превращается в условие *размерной трансмутации* [103], [104] "голой" константы связи и параметра обрезания Λ в неизвестный *размерный* параметр связанного состояния b. Таким образом, это же решение (5.28), (5.30), (5.31), полученное с использованием процедуры Λ-обрезания, подразумевает "тонкую подстройку" в виде подстановки и вычитания:

$$1 = \lambda_0 \int\limits_{k<\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2+b^2)} = \frac{\lambda_0}{4\pi}\left(\frac{2}{\pi}\Lambda - b\right), \quad \text{что эквивалентно:} \tag{5.32}$$

$$b = \frac{2}{\pi}\Lambda - \frac{4\pi}{\lambda_0},\ \text{или}\ \lambda_0 \to \lambda_0(\Lambda) \simeq \frac{2\pi^2}{\Lambda} + \frac{\pi^3 b}{\Lambda^2} + \ldots. \tag{5.33}$$

$$\text{Тогда:}\ \left[\lambda_0\psi_q^{\pm}(0)\right]^{-1} \equiv \frac{(2\pi)^3}{\lambda_0}\left[1 - \lambda_0\int\limits_{k<\Lambda}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-q^2\mp i0)}\right] =$$
$$= \int\limits_{k<\Lambda} d^3k\left[\frac{1}{(k^2+b^2)} - \frac{1}{(k^2-q^2\mp i0)}\right]\Bigg|_{\Lambda\to\infty} \Longrightarrow -2\pi^2(b \pm iq). \tag{5.34}$$

Положив в уравнении (5.32) $b = \Lambda z$, $\lambda_0(\Lambda) = \lambda_1/\Lambda + \ldots$, видим, что конечность b подразумевает наличие у него решения $z_0 = 0$, необходимым условием чего является тонкая подстройка $\lambda_1 = 2\pi^2$ в (5.33).

Другой важный урок состоит в том, что можно сформулировать условия перенормировки непосредственно в виде дополнительных граничных условий (5.30), (5.31) без какой-либо аппеляции к процедуре Λ-обрезания. Заметим, что такая фиксация через физические (наблюдаемые) параметры "ренорминвариантной" комбинации на некотором масштабе аналогична обычной фиксации условий перенормировки матричных элементов различных операторов в ренормируемых теориях поля [79], [104].

Возвращаясь к уравнению (5.4), (5.7), (5.25), запишем его решения при $\Lambda \to \infty$ в виде, аналогичном (2.62) – (2.70) (символ $\Longrightarrow$ везде означает "сводится к"):

$$| \, l, \mathrm{J}, \mathrm{m}; \mathcal{P}, q\rangle^{\pm} = \int d^3k \, \phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})_{\alpha\beta} \; | \, R^{0(QQ')}_{\alpha\beta}(\mathcal{P}, \mathbf{k})\rangle, \tag{5.35}$$

$$\phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})_{\alpha\beta} = \chi^{(\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta} \Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}), \tag{5.36}$$

$$\text{где:} \quad \chi^{(0,0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2} - \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \, \epsilon_{\alpha\beta}, \tag{5.37}$$

$$\chi^{(1,0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2} + \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}) \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \, \hat{\tau}^{(0)}_{\alpha\beta}, \quad \chi^{(1,\pm 1)}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1} \\ \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 2} \end{Bmatrix} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \, \hat{\tau}^{(\pm 1)}_{\alpha\beta},$$

$$\Phi^{\pm(l)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left[\delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + (-1)^l \delta_3(\mathbf{k} + \mathbf{q})\right] + \frac{\mathcal{T}^{(l)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q}; \mathbf{k})}{k^2 - q^2 \mp i0}, \tag{5.38}$$

$$\mathcal{T}^{(0)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q}; \mathbf{k}) = \gamma V^* \frac{\gamma \ll [k^2] \gg + Z^{\mathcal{P}} + q^2 + (1-\gamma)k^2}{(2\pi)^3 \left[\mathcal{D}^{\mathcal{P}}(\mp iq) - \mathcal{D}^{\mathcal{P}}(b)\right]}\Bigg|_{\Lambda \to \infty} \Longrightarrow \tag{5.39}$$

$$\Longrightarrow \frac{T(\mp iq)}{2\pi^2} = \frac{-\Upsilon}{2\pi^2(\Upsilon + b \mp iq)(b \pm iq)}, \qquad \left(Z^{\mathcal{P}} = Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}\right), \quad \text{при:} \tag{5.40}$$

$$\mathcal{D}^{\mathcal{P}}(\varrho) = \mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho) = (1-\gamma)^2 - \mathcal{J}_0(\varrho)\left[\gamma \ll [k^2] \gg + Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}} - (2-\gamma)\varrho^2\right], \tag{5.41}$$

$$\text{причем:} \; \mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(b) = 0, \;\; \mathrm{sign}(b) \stackrel{\text{взамен}}{\longrightarrow} \mathrm{sign}(\lambda), \;\; \Phi^{(0)}_{\mathcal{P}b}(\mathbf{k}) = \frac{const}{(\mathbf{k}^2 + b^2)}, \tag{5.42}$$

$$\text{откуда:} \;\; \Upsilon = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{5}\gamma_1 + \sigma\{\pm\}\nu_1\right), \quad \nu_{0\{\pm\}} = -\{\pm\}\frac{3}{5}. \tag{5.43}$$

$$\mathcal{T}^{(1)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q}; \mathbf{k}) = 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}) \, \frac{\gamma V^*}{(2\pi)^3}\left[1 - \frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\mp iq)\right]^{-1}\Bigg|_{\Lambda \to \infty} \Longrightarrow 0. \tag{5.44}$$

$$\text{Для } Q = Q' : \; \phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{k})_{\alpha\beta} = -\phi^{\pm(l,\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\mathcal{P}q}(-\mathbf{k})_{\beta\alpha}, \;\; \text{т.е. } l = \mathrm{J} = 0, 1. \tag{5.45}$$

Выражения (5.39), (5.44) и (5.41) вытекают из (2.67) и (2.60), (2.61), соответственно, и рекурентных соотношений для интегралов (2.59) в случае квадратичного спектра (5.12), (5.25), где:

$$D_0^{\mathcal{P}}(-iE_2(\mathcal{P},i\varrho)) \Longrightarrow \mathcal{D}_{\{\pm\}}^{\mathcal{P}}(\varrho), \quad \mu\, \mathrm{J}_n^{\mathcal{P}}(-iE_2(\mathcal{P},i\varrho)) \Longrightarrow \mathcal{J}_n(\varrho), \tag{5.46}$$

$$\mathcal{J}_n(\varrho) \stackrel{def}{=} \gamma V^* \int^{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\left(k^2\right)^n}{(k^2+\varrho^2)} = \gamma \ll [k^2]^{n-1} \gg -\ \varrho^2\, \mathcal{J}_{n-1}(\varrho), \tag{5.47}$$

$$\mathcal{J}_0(\varrho) = \frac{\gamma V^*}{2\pi^2}\left(\Lambda - \varrho \arctan\frac{\Lambda}{\varrho}\right) = \frac{\gamma V^*}{2\pi^2}\left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\sqrt{\varrho^2} + \varrho \arctan\frac{\varrho}{\Lambda}\right). \tag{5.48}$$

Если, аналогично упрощенной модели (5.32), принять, что уравнение на связанное состояние с $l=0$ (2.69) служит условием размерной трансмутации "голых" параметров λ_0, μ_0 (5.13) и обрезания Λ в *неизвестные* физические параметры рассеяния Υ и связанного состояния b, то из (5.41) и (5.42) имеем, при

$$b \equiv \Lambda z, \quad Y(\Lambda) \equiv \frac{\gamma \ll [k^2] \gg + Z_{\{\pm\}}^{\mathcal{P}}}{\Lambda^2(2-\gamma)} = Y_0 + \frac{Y_1}{\Lambda} + \cdots \quad : \tag{5.49}$$

$$\mathcal{D}_{\{\pm\}}^{\mathcal{P}}(b) = (1-\gamma)^2 - \gamma(2-\gamma)\left(Y - z^2\right)\left(1 - z\arctan\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{5.50}$$

Заметим, что предельный переход $\Lambda \to \infty$ выполняется *после* интегрирования по k. Как и прежде в (5.32) и (5.33), конечность b подразумевает здесь существование для (5.50) решения $z_0 = 0$, которое, совместно с (5.18) приводит к условиям тонкой подстройки (5.43) в двухчастичном секторе в виде:

$$\gamma_0 = 1, \quad Y_0 = \frac{3}{5}\gamma_0\{\pm\}\nu_0 = 0; \quad Y_1 = \frac{3}{5}\gamma_1 + \gamma_0\, \sigma\{\pm\}\nu_1; \;\; \Upsilon = \frac{\pi}{2}Y_1. \tag{5.51}$$

Перенормированная Т-матрица для $l=0$ после вычитания в знаменателе (5.39) имеет вид при $\Lambda \to \infty$:

$$-\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\Lambda^2 Y + \left[q^2 + k^2(1-\gamma)\right](2-\gamma)^{-1}}{\Lambda^2 Y(b \pm iq) + (2/\pi)\Lambda(1-Y)(b^2+q^2) - (b^3 \pm (iq)^3) + O(1/\Lambda)}, \tag{5.52}$$

и, при условиях (5.18), (5.51)=(5.43), сводится к (5.40). При этом вещественные величины b и Υ оказываются *произвольными* параметрами (самосопряженного расширения), и некоторые из них могут выражаться через коэффициенты формальной Λ- зависимости "голых" величин (5.16), (5.15) посредством соотношений тонкой подстройки (5.43).

Заметим, что если ограничиться формальной процедурой вычитания, не требуя выполнения вытекающего из (5.42) условия (5.51), то формальный предел $\Lambda \to \infty$ в (5.52) при $Y_0 \neq 0$ приводит вновь к решению (5.31). Однако, невыполнение условий тонкой подстройки (5.51) означает, что на самом деле в этом случае $b \sim \Lambda$, что воспроизводит исчезновение исходной невычтенной T-матрицы $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}^{(0)\pm}(\mathbf{q};\mathbf{k})$ (или (6.63) ниже), как Λ^{-1}.

Для $l=1$ невычтенная T-матрица (5.44) с $\gamma_0=1$ исчезает при $\Lambda \to \infty$ как Λ^{-3}, а формально вычтенная, – как Λ^{-1}. Таким образом, в любом случае не существует ни состояний рассеяния ни связанных состояний с $l=1$ для расширения, задаваемого (5.18), (5.19), (5.43).

2.3 Другие расширения.

Рассмотрим теперь возможность выбора конечной "голой" массы m. Тогда:

$$\nu_0 = \nu_1 = 0, \quad \text{и, с необходимостью,} \quad G_0 = G_1 = 0, \quad \text{т.е.:} \tag{5.53}$$

$$g(\Lambda) = g_0 + \frac{g_1}{\Lambda} + \ldots; \quad g_n = G_{n+2}; \quad \mathcal{M}^{(\pm)} = \pm m(\gamma^{(\pm)} - 1); \tag{5.54}$$

$$E_{Q0}^{(\pm)}(\Lambda) = \Lambda^2 \left[\frac{3g_0}{5(2mc)^2} \mp \epsilon_0\right] + \Lambda \left[\frac{3g_1}{5(2mc)^2} \mp \epsilon_1\right] + $$
$$+ \left[\frac{3g_2}{5(2mc)^2} + g_0 c_Q^{(\pm)} \mp \epsilon_2\right]. \tag{5.55}$$

Выражения в первых и вторых квадратных скобках вновь должны исчезать, что возможно либо только для частиц типа (+): $\widetilde{A}, C$, либо только для частиц типа $(-)$: A, B. Переходя к двухчастичному сектору обнаруживаем, что для пары частиц типа $(+)$ связанное состояние и такой способ перенормировки оказываются вовсе невозможны, если m остается конечным. Точно таким же образом, как и выше, приходим к условиям трансмутации для состояний пары частиц типа $(-)$:

$$\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{+\}}(b)\mid_{\Lambda\to\infty}=(1-\gamma_0)^2-\frac{9}{5}\gamma_0^2=0, \quad \text{тогда:} \tag{5.56}$$

$$\gamma_0^{(-)}=1-\frac{3}{4}(3\pm\sqrt{5})<1, \quad \mathcal{M}_0^{(-)}=m\frac{3}{4}(3\pm\sqrt{5}), \quad b=\frac{4}{\pi}\frac{g_1}{g_0}. \tag{5.57}$$

Тогда решения для связанных состояний и состояний рассеяния выглядят здесь так же как в упрощенной модели (5.28), (5.31):

$$\mathcal{T}^{(0)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};\mathbf{k})\mid_{\Lambda\to\infty}=\frac{-\left(2\pi^2\right)^{-1}}{(b\pm iq)}, \quad \psi_b^{(0)}(\mathbf{x})=\frac{\sqrt{8\pi b}}{4\pi}\frac{e^{-br}}{r}, \quad (r=|\mathbf{x}|). \tag{5.58}$$

Формальный предельный переход $\Upsilon\to\infty$, т.е. введение нового *независимого* регулятора $\sigma\to\infty$ в предыдущем решении (5.39), (5.40)-(5.43), позволяет получить эти же выражения (5.58) для произвольного QQ'-канала. Связанные состояния и рассеяние при $l=1$ здесь также отсутствуют.

Если же, в поисках других расширений, применить вышеописанную процедуру перенормировки непосредственно к случаю $l=1$, то знаменатель (5.44) с $q\to ib_1$, $b_1=\Lambda y$, дает условия трансмутации следующего вида:

$$y^3-\frac{2}{\pi}y^2-\frac{2}{3\pi}\left(\frac{3}{2\gamma}-1\right)=0, \quad y_0=0, \tag{5.59}$$

которые означают, что $\gamma_0=3/2$. Но, тогда конечность $\mathcal{M}_0$ приводит вновь к требованиям (5.53). В этом случае обе Т-матрицы $\mathcal{T}^{(0)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};\mathbf{k})$, $\mathcal{T}^{(1)\pm}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q};\mathbf{k})$ стремятся к нулю как Λ^{-1}. Так что такое расширение полностью эквивалентно свободному двухчастичному гамильтониану – оператору Лапласа (расширение по Фридрихсу [14]).

2.4 Физические условия перенормировки.

Волновая функция связанного состояния с $l = 0$ (5.42) совпадает с таковой (5.28) для предыдущей модели. Заметим, что галилеевская инвариантность, означающая независимость от $\mathcal{P}$ Т-матрицы (5.40) и волновых функций рассеяния и связанных состояний, вновь восстанавливается в данной модели, как и для голдстоуновсих мод, лишь в пределе $\Lambda \to \infty$, и только благодаря используемой перенормировочной процедуре (5.14) – (5.17), (5.21), (5.39), (5.43), (5.51). Качественная картина состоит в том, что физический вакуум А- системы (4.53), (4.110), прозрачный для "адронов" (5.6), (4.116), совершенно не прозрачен для "голых" (нерелятивистских!) "кварков" (4.14), (4.15), и потому является для них сложной, но гипотетической средой, свойства которой, однако, заранее не известны и должны определяться согласованно со свойствами (5.23) способных двигаться сквозь нее физических "кварков" (4.32), при диагонализации 4-х фермионного гамильтониана (4.4) преобразованием Боголюбова (4.15). Предельный переход $\Lambda \to \infty$ (4.116), (5.8), (5.39) и является проявлением такой (само) согласованности. Расходимость в (4.32), при условиях (5.21), *ненаблюдаемой* вакуумной энергии $w_0^A(\Lambda) \Longrightarrow 2(3\pi^2)^{-1}G_0\Lambda^5 \to +\infty$ не отвергает преобразования (4.15), (4.32). Введение в исходный (нерелятивистский!) гамильтониан (4.4) соответствующего вычитательного слагаемого $-\mathcal{V}w_0^A(\Lambda)$, означающее незаполненность всех собственных состояний и с отрицательными энергиями выше этого значения, и, в конечном счете, неустойчивость его "голого" ферми-вакуума и одночастичных возбуждений над ним при $\Lambda \to \infty$, естественно интерпретируется при этом как примитивное проявление конфаймента "голых" (нерелятивистских!) "кварков" с массой $m(\Lambda) \to \infty$ (5.15), (5.16).

Происхождение параметра σ в (5.43) требует отдельного пояснения. Дело в том, что, поскольку из (5.14), (5.21), $\gamma_{1\{-\}} \equiv 0$, $\tilde{\nu}_1 \equiv \nu_{1\{-\}} = 0$, получить ненулевое решение вида (5.35) – (5.38), (5.40) (но без ограничения (5.45)) в случае $\{-\}$ (для $A\widetilde{A}$-канала) *возможно, только если есть различие в членах неведущего порядка у формально одинаково расходящихся интегралов* в выражениях для $\ll k^2 \gg$ (4.19) и $\ll [k^2] \gg$ (5.47). Эти расходящиеся выражения возникают, соответственно, при регуляризациях антикоммутатора (4.5), (4.6) в одночастичном спектре и ядра оператора двухчастичного взаимодействия (5.1) (смотри Выводы в главе 1). Их различие, отражающее их различную физическую природу, можно легко ввести как фиксированный сдвиг параметра обрезания (о необходимости двух регуляторов см. также [12]), проявляющийся в замене:

$$\left(\Lambda \longmapsto \Lambda + \frac{\sigma}{3}\right) \;\Rightarrow\; \left(\ll [k^2] \gg \longmapsto \ll k^2 \gg + \sigma\Lambda\right), \tag{5.60}$$

которая и приводит, в силу (5.39) и (5.41), к появлению σ в (5.51), (5.43). Однако, этот сдвиг неизбежно разрушает голдстоуновское решение (5.8) при любом конечном Λ даже для $\mathcal{P} = 0$.

Таким образом, соотношения тонкой подстройки отличаются не только для различных систем A, B, C, но и в одной системе A существование голдстоуновской моды и наличие рассеяния и связанного состояния в $A\widetilde{A}$-канале, и, в тоже время, наличие последних в AA и $\widetilde{A}\widetilde{A}$-каналах предполагает взаимно исключающие условия тонкой подстройки (5.20), (5.21) в одночастичном секторе и условия перенормировки (5.43), (5.51) в двухчастичном секторе. Следовательно, оставаясь в рамках регуляризации Λ-обрезанием в A-системе невозможно *одновременно*, наряду с перенормированными собственными связанными состояниями и состояниями рассеяния различных частиц A и $\widetilde{A}$, иметь связанные состояния одинаковых частиц (что вполне естественно и из физических соображений), конечные спектры для частиц обоих видов и движущиеся голдстоуновские решения. Разумеется, в системах B и C все каналы физически эквивалентны, и эта проблема отсутствует.

Поскольку, как уже отмечалось, для $A\widetilde{A}$-канала, – в случае $\{-\}$, условия (5.21) конечности одновременно *обоих* одночастичных спектров (5.22) *совпадают* с условиями перенормировки двухчастичного сектора (5.43), этот канал представляется физически явно более предпочтительным. Остается лишь "примирить" ненулевую Т-матрицу в этом канале с голдстоуновской модой. Эта задача решена в следующей главе в рамках теории расширений, путем построения такого расширения, которое, с одной стороны, приводит к решению (5.40), (5.42), воспризводя в определенном смысле манипуляции с расходимостями вида (5.60), а с другой стороны, дает новую математическую интерпретацию обобщенному голдстоуновскому решению (5.8).

3 Выводы.

Прежде всего заметим, что простая проверка условия нормировки состояний рассеяния (5.29) для решений (5.38), (5.40) немедленно показывает необходимость еще, по крайней мере, одной дополнительной дискретной компоненты волновой функции с положительным или отрицательным вкладом в метрику в соответствии со знаком Υ:

$$\Phi^{\pm(0)}_{\mathcal{P}k}(\mathbf{s}) = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{s}) - \frac{t(k^2 \pm i0)}{(s^2-k^2 \mp i0)}, \quad t(k^2 \pm i0) = -\frac{T(\mp ik)}{2\pi^2}, \tag{5.61}$$

$$\int d^3 s\, \Phi^{\pm*(0)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{s})\Phi^{\pm(0)}_{\mathcal{P}k}(\mathbf{s}) = \delta_3(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \frac{2\pi^2}{\Upsilon} t(q^2 \mp i0)\, t(k^2 \pm i0),$$

$$\text{откуда для}\ \ \boldsymbol{\psi}^{\pm}_k(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \Phi^{\pm(0)}_{\mathcal{P}k}(\mathbf{s}) \\ \ell^{\pm}(k) \end{pmatrix}: \ \ \ell^{\pm}(k) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{|\Upsilon|}}\, t(k^2 \pm i0), \ \text{и} \tag{5.62}$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}^{\pm}_q \,|\, \boldsymbol{\psi}^{\pm}_k \rangle = \int d^3 s\, \Phi^{\pm*(0)}_{\mathcal{P}q}(\mathbf{s})\Phi^{\pm(0)}_{\mathcal{P}k}(\mathbf{s}) + \mathrm{sign}(\Upsilon)\, \ell^{\pm*}(q)\ell^{\pm}(k) = \delta_3(\mathbf{q}-\mathbf{k}). \tag{5.63}$$

Однако, эта дополнительная дискретная компонента собственных волновых функций $\ell^{\pm}(k)$ только "корректирует" их скалярное произведение.

Она пропорциональна $T(\mp iq)$ (или ее вычету в связанном состоянии) и полностью определяется теми же параметрами самосопряженного расширения. Она не меняет ни свойств ни физического смысла компонент решений в обычном пространстве, перераспределяя лишь нормировку:

$$\langle \boldsymbol{\psi}_b | \boldsymbol{\psi}_b \rangle = (2\pi)^3, \quad \boldsymbol{\psi}_b(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \Phi^{(0)}_{\mathcal{P}b}(\mathbf{s}) \\ \ell_b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{8\pi b \Upsilon}{\Upsilon + 2b}} \begin{pmatrix} (\mathbf{s}^2 + b^2)^{-1} \\ -\sqrt{2\pi^2/|\Upsilon|} \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

и было бы неуместно связывать здесь с этой дополнительной компонентой дополнительный набор операторов рождения и уничтожения [21]. Как показано ниже, такие дополнительные дискретные компоненты естественно возникают при интерпретации сингулярного возмущения (5.25) в теории расширений с выходом в пространства с индефинитной метрикой [16]-[25].

Как в упрощенной модели из (5.31), (5.33), так и здесь, из (4.19), (5.15), (5.16), (5.18), (5.40), (5.42), убеждаемся в отсутствие какой бы то ни было корреляции между характером точечного взаимодействия и знаком "голых" констант связи в (2.43) и (4.4) соответственно. Этот непривычный для "классической физики" результат находит естественное подтверждение в рамках теории расширений в следующей главе. Он, однако, не является неожиданным, поскольку четырехфермионное взаимодействие способно обладать стабильным вакуумом при любом знаке константы связи [12].

Наконец, "самосогласованные условия перенормировки", обобщающие условия (5.30), (5.31), для решений (5.40), (5.42) или (5.61), (5.62), (5.64) могут быть выбраны в виде:

$$\lambda_0 \psi_q(0) = \mu_0 \psi_q(0) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \psi_q(0) = 0, \quad \mu_0 (\nabla^2 \psi^{\pm}_q)(0) = t(q^2 \pm i0),$$
$$\mu_0 (\nabla^2 \psi_b)(0) = \sqrt{\frac{8\pi b \Upsilon}{\Upsilon + 2b}}. \qquad (5.65)$$

Однако, их самосогласованность также подразумевает наличие дополнительных дискретных компонент векторов (5.62), (5.64).

Глава 6

Теория перенормировок как Теория расширений.

В этой главе прослеживается взаимосвязь между полученными выше решениями путем регуляризации и перенормировки тонкой подстройкой, и процедурой построения самосопряженных расширений гамильтониана в двухчастичном секторе с выходом в пространства Понтрягина. Как и в [15], выбранная модель позволяет провести такой анализ в квантовой теории поля. Предложена новая интерпретация голдстоуновского состояния как дискретной компоненты инвариантного гильбертова подпространства расширенного гамильтониана.

1 Элементы теории расширений.

Как известно, к описанию динамики в квантовой теории допускаются только самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, что обеспечивает полноту этого описания, вещественность средних и собственных значений операторов и вероятностную интерпретацию состояний. Однако, в сингулярных случаях построение таких операторов порой оказывается возможным лишь путем "временного" выхода в более широкие пространства.

Осознанием того что проблема перенормировки есть проблема построения самосопряженного расширения исходного сингулярного оператора Гамильтона мы во многом обязаны Ф.А.Березину [15]. Ему же принадлежит идея использования для этой цели пространств с индефинитной метрикой, подходящий способ определения последней и алгебраическая формулировка соответствующей теории расширений. Эти идеи через много лет были переоткрыты Ю.М.Широковым [16]-[18], а их весьма эффективная формулировка с использованием пространств Понтрягина дана Ю.Г.Шондиным [22]. В этом параграфе собраны так или иначе используемые известные конструкции теории расширений [14]-[25], [171]-[175].

1.1 Основные определения.

Прежде всего заметим, что такие основные понятия теории расширений как "ортогональное дополнение" ($\perp$), "плотное", "замкнутое" множество, а также "симметричный" , "замкнутый", "(само) сопряженный" оператор, без каких либо изменений переносятся с гильбертова пространства на любое комплексное векторное пространство $\mathcal{L}$, снабженное линейным, эрмитовым, невырожденным (но, возможно, индефинитным) скалярным произведением (билинейной формой): $(u, \lambda v) = \lambda(u, v) = (\lambda v, u)^*$; $(v \in \mathcal{M}^\perp) \Longleftrightarrow (\forall\, m \in \mathcal{M} \Rightarrow (m, v) = 0)$; ($\mathcal{M}$ плотно в $\mathcal{D}$)$\Longleftrightarrow\big(\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{D}\big)$; $\mathcal{M}$ замкнуто, $(\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}) \Longleftrightarrow (\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M})$. При этом: $\overline{\mathcal{M}^\perp} = \mathcal{M}^\perp$. Сопряженный оператор A^* задается, как обычно, множеством пар:

$$\Big(\mathcal{D}(A^*) \ni v,\ w(v) \stackrel{def}{=} A^* v\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists w \in \mathcal{L}, \Rightarrow (Au, v) = (u, w), \forall u \in \mathcal{D}(A)\Big), \tag{6.1}$$

и определен однозначно только для плотно заданного в $\mathcal{L}$ оператора A: $\mathcal{D}(A)^{\perp\perp} = \mathcal{L}$. Далее, при плотно определенном A^*, можно таким же образом определить A^{**}, причем, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^{**})$, однако, $A^{***} = A^*$. Если $\mathcal{R}(A) = A\mathcal{D}(A)$ – область значений плотно заданного оператора A, то

$\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)$, где $(y \in \mathcal{N}(A^*)) \iff (A^*y = 0)$ – ядро сопряженного оператора. Тогда имеет место разложение:

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^*) = \overline{\mathcal{R}(A^*)} \oplus \mathcal{N}(A). \tag{6.2}$$

Оператор симметричен, если $(Au, v) = (u, Av)$. При *любом* определении сходимости оператор $T = \overline{T}$ – замкнут, если из того, что:

$$(a)\ x_n \in \mathcal{D}(T),\ \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x; \quad (b)\ Tx_n \equiv y_n,\ \ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = y, \tag{6.3}$$
$$\text{следует, что:}\ \ (A)\ x \in \mathcal{D}(T), \quad (B)\ Tx = y.$$

(Для непрерывного оператора (b) следует из (a).) Область значений замкнутого оператора замкнута: $\mathcal{R}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{R}(\overline{T})}$. Оператор T- замыкаем (допускает замыкание), если он имеет замкнутые расширения, *наименьшее* из которых и есть его замыкание $\overline{T}$. Оно получается присоединением к $\mathcal{D}(T)$ и $\mathcal{R}(T)$, соответственно, *всех* x и y, удовлетворяющих (6.3). Очевидно, $\mathcal{D}(\overline{T}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(T)}$. Из определения (6.1): $\overline{T^*} = T^*$. Следуя [171], будем обозначать, что T есть расширение оператора A, как $A \subset T$. Для плотно заданного A из $(A \subset T) \Rightarrow (T^* \subset A^*)$. Тогда, для симметричного плотно заданного A и его симметричного расширения T имеем: $A \subset T \subset T^* \subset A^*$. Для замыкаемого плотно заданного оператора T будем иметь: (i) $\left(\overline{T}\right)^* = T^* = \overline{T^*}$, и (ii) $\overline{T} = T^{**}$. Таким образом, эрмитовый, т.е. симметричный плотно заданный оператор T всегда замыкаем, и $T \subset T^{**} \subset T^*$. Если он уже замкнут, то $T = T^{**} \subset T^*$. Если же он "в существенном самосопряжен", т.е. обладает единственным самосопряженным расширением $\overline{T} = T^{**}$, то $T \subset T^{**} = T^*$. Наконец, если он самосопряжен, то $T = T^{**} = T^*$. Для того, чтобы $R_T(z)$ была резольвентой самосопряженного оператора в $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого резольвентного множества $\rho(T)$ выполнялись условия:

$$(1)\ \ R_T(z) = (T - z)^{-1},\ \ \text{– существует при}\ \ z \in \rho(T) \neq \emptyset; \tag{6.4}$$

(2) $R_T(z) - R_T(\zeta) = (z-\zeta)\, R_T(z)\, R_T(\zeta),$ – тождество Гильберта;

(3) $(R_T(z))^* = R_T(\overline{z})$;

(4) $(R_T(z)\phi = 0) \iff (\phi = 0)\,,$ – иньективность.

В этой чисто алгебраической конструкции в общем случае отсутствует какой бы то ни было контроль за спектром самосопряженного оператора в $\mathcal{L}$. Однако, в случае гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$ пункт (1) здесь заменяется на

$$(1)' \;\; R_T(z) = (T-z)^{-1}, \;\text{ – аналитическая функция } z \text{ при } Im\, z \neq 0. \tag{6.5}$$

1.2 Расширения в гильбертовом пространстве.

Пусть T эрмитов, но не самосопряженный (в существенном) оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{H}_0(=L^2)$: $T \subset T^{**} \subset T^*$, и $T^{**} \neq T^*$. Тогда существуют *два* целых числа, – два индекса дефекта:

$$n_{\pm} = dim\, \mathcal{N}\,(T^* \mp i\omega) \equiv dim\, \mathcal{N}^*_{\pm} = codim\, \mathcal{R}\,(T \pm i\omega)\,, \tag{6.6}$$

определяющих его отклонение от (существенной) самосопряженности. Это числа линейно независимых решений в $\mathcal{H}_0$ уравнений

$$T^*\phi_{\pm} = \pm i\omega\, \phi_{\pm}, \quad \phi_{\pm} \in \mathcal{H}_0, \;\text{ для любого } Re\, \omega > 0. \tag{6.7}$$

При этом, для замкнутого оператора T:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{R}(T \pm i\omega)} \oplus \mathcal{N}(T^* \mp i\omega) \Longrightarrow \mathcal{R}(T \pm i\omega) \oplus \mathcal{N}(T^* \mp i\omega). \tag{6.8}$$

Структура максимального замкнутого расширения T^* симметричного оператора T такова: $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\overline{T}) \oplus \mathcal{N}^*_+ \oplus \mathcal{N}^*_-$. Самосопряженное расширение A этого оператора возможно *только при* $n_+ = n_- = n$, и определяется расширением его преобразования Кэли $V_T = (T-i\omega)(T+i\omega)^{-1}$

до унитарного оператора $U = (A - i\omega)(A + i\omega)^{-1}$ по формулам:

$$\begin{aligned} &A = -i\omega(U+1)(U-1)^{-1}, \quad Ax = -i\omega(U+1)y, \\ &\text{где: } \forall y \in \mathcal{H}_0, \ \ x = (U-1)y, \ \ \mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(U-1), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad Uy = V_T y, \ \ y \in \mathcal{R}(T + i\omega), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad Uy = V_n y, \ \ y \in \mathcal{N}(T^* - i\omega), \end{aligned} \tag{6.9}$$

поскольку V_T является однозначным изометрическим отображением его области определения $\mathcal{D}(V_T) = \mathcal{R}(T + i\omega)$ на $\mathcal{R}(V_T) = \mathcal{R}(T - i\omega)$ [175], а преобразование Кэли U самосопряженного оператора A должно быть унитарно, что означает: $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A + i\omega) = \mathcal{R}(A - i\omega) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{H}_0$. Произвол расширения сосредоточен, таким образом, в произвольной унитарной $n \times n$- матрице $\mathcal{W}_n$, определяющей изометрическое отображение $\mathcal{N}_+^* \stackrel{U}{\longmapsto} \mathcal{N}_-^*$ по формуле $U\,\phi_+ \equiv V_n\,\phi_+ = (\mathcal{W}_n \bullet \{\phi_-\})$. Область определения оператора A получается соответствующим *сужением* $\mathcal{D}(T^*)$:

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\overline{T}) \oplus \mathcal{N}_+^* \oplus U\mathcal{N}_+^* = \mathcal{D}(\overline{T}) \oplus \mathcal{N}_+^* \oplus (\mathcal{W}_n \bullet \{\mathcal{N}_-^*\})\,, \tag{6.10}$$

на котором:

$$A\mathcal{D}(A) \Longrightarrow T\mathcal{D}(\overline{T}) \oplus (+i\omega)\mathcal{N}_+^* \oplus (-i\omega)\,(\mathcal{W}_n \bullet \{\mathcal{N}_-^*\})\,. \tag{6.11}$$

1.3 Дельта-потенциал в теории расширений.

Процедура построения самосопряженного расширения для сингулярного уравнения (5.26) рассмотрена в пионерской работе [13], а дальнейшее развитие этих идей содержится в [14] и [176], [177], [178]. Поскольку $\delta_3(\mathbf{x})$ не является оператором в гильбертовом пространстве, наш квантово-механический гамильтониан оказывется изначально корректно определеным только на подпространстве $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ полного гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$:

$$\Big(\psi(\mathbf{x}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_0\Big) \iff \Big(\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_0, \ \psi(0) = 0\Big), \tag{6.12}$$

где он просто совпадает со свободным гамильтонианом, – оператором Лапласа $T_0 = -\nabla^2_{\mathrm{x}}$, и весьма нуждается в расширении. Самосопряженное расширение именно этого, *суженного* оператора Лапласа $\widetilde{T}_0$, $\mathcal{D}\left(\widetilde{T}_0\right) = \widetilde{\mathcal{D}}_0$, и составляет суть всей констркуции [13] и приводит к решению модели (2.42), (5.26). Информация о знаке "голой" константы связи теряется, очевидно, уже на первом шаге сужения на подпространство $\widetilde{\mathcal{D}}_0$. Поэтому классические представления о притяжении и отталкивании здесь теряют силу. Выбор между этими двумя возможностями требует дополнительных физических условий. Аналогичное наблюдение для двумерного дельта-потенциала обсуждается в работе [179].

Другой урок этой задачи, весьма существенный для дальнейшего перехода к расширениям в пространства с индефинитной метрикой, состоит в том, что уже здесь проявляется важность определения множества дефектных элементов $\phi_\pm$, как ортогонального дополнения:

$$\left[\mathcal{R}\left(\widetilde{T}_0 \pm i\omega\right)\right]^\perp \equiv \left[\left(\widetilde{T}_0 \pm i\omega\right)\mathcal{D}\left(\widetilde{T}_0\right)\right]^\perp, \tag{6.13}$$

тогда как уравнение (6.7) справедливо теперь лишь "с точностью до множества меры нуль". Действительно, если вместо (6.7):

$$\begin{gathered}\forall\psi \in \mathcal{D}\left(\widetilde{T}_0\right), \quad 0 = \psi(0) = (\chi,\, \psi)\,, \quad \text{и} \quad \left(\widetilde{T}_0^* \mp i\omega\right)\phi_\pm = \chi, \\ \text{то:} \quad (\chi,\, \psi) = \left(\left(\widetilde{T}_0^* \mp i\omega\right)\phi_\pm,\, \psi\right) = \left(\phi_\pm,\, \left(\widetilde{T}_0 \pm i\omega\right)\psi\right) = 0,\end{gathered} \tag{6.14}$$

для чего достаточно выбрать $\chi(\mathbf{x}) = \delta_3(\mathbf{x})$. В соответствии с (6.7), индексы дефекта оператора $\widetilde{T}_0$ тогда равны $n_+ = n_- = 1$, а его дефектные элементы в координатном представлении [176], при $i\omega = \kappa^2$, $Im\,\kappa > 0$:

$$\phi_+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\widetilde{T}_0^* - i\omega\right)}\chi = \frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \phi_-(\mathbf{x}) \equiv \left(\phi_+(\mathbf{x})\right)^*, \quad \phi_\pm(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_0. \tag{6.15}$$

Стандартные рассуждения [171] приводят, согласно (6.11), к однопараметрическому семейству самосопряженных расширений в $\mathcal{H}_0 = L^2$ вида:

$$\mathcal{D}(T_{\mathrm{w}}) = \mathcal{D}\left(\overline{\widetilde{T}_0}\right) \oplus c\phi_+ \oplus cU\phi_+ = \mathcal{D}\left(\overline{\widetilde{T}_0}\right) \oplus c\phi_+ \oplus c\mathrm{w}\phi_-, \quad |\mathrm{w}| = 1, \tag{6.16}$$

$$\text{для которого:}\quad T_{\mathrm w}\mathcal{D}(T_{\mathrm w}) = \widetilde{T}_0\mathcal{D}\left(\overline{\widetilde{T}_0}\right) \oplus (+i\omega)c\phi_+ \oplus (-i\omega)c\mathrm{w}\phi_-. \quad (6.17)$$

Новый параметр расширенного оператора связан только с расширением его исходной области определения (6.12), с $\mathrm{a}_1 \equiv u(0) = \mathrm{a}_0 \equiv u'(0) = 0$, на функции (6.15), (6.16), имеющие при $\mathbf{x} \to 0$ вид [177]:

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{a}_1}{|\mathbf{x}|} + \mathrm{a}_0, \quad \text{причем,} \quad \mathrm{a}_1 = -\xi \mathrm{a}_0, \quad \text{где:} \quad \xi = \frac{e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{1+\mathrm{w}}{1+i\mathrm{w}}\right). \quad (6.18)$$

Вещественная (при $\omega > 0$) величина $\xi = 1/b$ определяет длину рассеяния. Поскольку расширенный оператор не выводит из $\mathcal{H}_0$: $T_{\mathrm w}\widetilde{\psi} \in \mathcal{H}_0$, уравнение (5.26) и граничное условие (6.18) записываются теперь как:

$$\left(-\nabla_{\mathrm x}^2 - q^2\right)\widetilde{\psi}_q(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{или, для} \quad \widetilde{\psi}_q(\mathbf{x}) \Longrightarrow \frac{\widetilde{u}_q(r)}{r}, \quad r = |\mathbf{x}|: \qquad (6.19)$$

$$\left(-\partial_r^2 - q^2\right)\widetilde{u}_q(r) = 0, \quad \widetilde{u}_q(r) \propto \sin\left(qr + \delta(q)\right), \quad \widetilde{u}_q(0) = -\xi\widetilde{u}_q'(0), \quad (6.20)$$

и приводят непосредственно к решениям (5.28), (5.30), (5.31). Таким образом, выбросив сперва из области определения две линейно независимые "нулевые моды" (6.18) или (6.20) соответственно для оператора $\boldsymbol{\nabla}^2$ или ∂_r^2, мы возвращаем их обратно, просто "повесив" уже на расширенный оператор единственный возникающий при этом произвол в отношении ξ их коэффициентов. Более явное описание расширенного оператора непосредственно через параметр расширения ξ дается формулой Крейна для его резольвенты и приведено в следующем пункте.

1.4 Расширения в пространства Понтрягина.

Дополнительные компоненты пространства расширения естественно возникают при попытке распространения сценария предыдущего пункта на более сингулярные точечные взаимодействия вида $H = T_0 + |\chi\rangle\lambda_0\langle\chi|$, где $\langle\chi|$ – точечный функционал, т.е. $\chi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\chi\rangle \propto (\boldsymbol{\nabla}^2)^m\delta_3(\mathbf{x})$. Пытаясь построить расширения соответствующего суженного оператора $\widetilde{T}_0$ с

$\left(\mathcal{D}\left(\widetilde{T}_0\right) \ni \psi\right) \Longleftrightarrow \Big(\psi,\, T_0\psi \in \mathcal{H}_m,\ \langle\chi\,|\,\psi\rangle = 0\Big)$, немедленно обнаруживаем, что теперь его дефектные элементы, вообще говоря, *не принадлежат* $\mathcal{H}_0$. Здесь $m \geq 1$ - наименьшее целое число, такое что, для любого $\zeta \in \rho\left(\widetilde{T}_0\right)$ – из резольвентного множества (6.4) оператора $\widetilde{T}_0$:

$$\chi^{(0)} = [R_0(\zeta)]^{m+1}\chi \in \mathcal{H}_0, \ \text{ но, } \ \chi^{(-1)} = [R_0(\zeta)]^{m}\chi \notin \mathcal{H}_0,$$

$$\text{где, для } \ R_0(\zeta) = \left(\widetilde{T}_0 - \zeta\right)^{-1}: \ \ \mathcal{H}_n = [R_0(\zeta)]^n\mathcal{H}_0, \tag{6.21}$$

$$\chi^{(n)} = [R_0(\zeta)]^{m+1+n}\chi \in \mathcal{H}_n, \ \ \chi \in \mathcal{H}_{-m-1}, \ \ \phi_\pm \longmapsto \chi^{(-m)} = R_0(\zeta)\chi, \tag{6.22}$$

$$\ldots \subseteq \mathcal{H}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{H}_{-n} \subseteq \ldots, \tag{6.23}$$

$$\left(\mathcal{D}\left(\widehat{T}_0\right) \ni \psi_m\right) \Longleftrightarrow \Big(\psi_{m+1} \in \mathcal{H}_{m+1},\ \psi_m = \psi_{m+1} + c_m\chi^{(m)}\Big), \tag{6.24}$$

$$\left(\mathcal{D}\left(\widetilde{T}\right) \ni \psi_m\right) \Longleftrightarrow \left(\psi_m \in \mathcal{D}\left(\widehat{T}_0\right),\ \langle\chi\,|\,\psi_m\rangle = 0\right), \ \ \widetilde{T}_0 \subset \widetilde{T} \subset \widehat{T}_0, \tag{6.25}$$

т.е. исходное пространство $\mathcal{H}_0$ оснащается "$\widetilde{T}_0$-градуированной" шкалой (не зависящих на самом деле от ζ) пространств, а различие между $\widetilde{T}_0$ и $\widetilde{T}_0^*$ на $\mathcal{H}_0$ теперь несущественно. Поскольку дефектный элемент лежит в $\mathcal{H}_{-m}$, понадобятся и все "промежуточные", – "обобщенные дефектные элементы" (6.22) с $-m \leq n \leq m-1$ и соответствующий набор пространств из шкалы (6.23). Скалярное произведение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_0$ можно частично продолжить с $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_{-n}$, "спаривая" его элементы с элементами из $\mathcal{H}_m$. В результате получаем в качестве вспомогательного (пред-Понтрягин) пространства $\Re_m \subset \mathcal{H}_{-m}$ множество элементов вида ($m = 1$ см. в п. 2.2):

$$(\Re_m \ni \phi) \Longleftrightarrow \left(\phi = \phi_m + \sum_{n=-m}^{m-1} c_n\chi^{(n)}, \ \ \phi_m \in \mathcal{H}_m\right), \ \ \left(\Re_m \supset \mathcal{D}\left(\widehat{T}_0\right)\right), \tag{6.26}$$

$$\text{со скалярным произведением: } \ \langle\phi\,|\,\phi'\rangle_\Re = \langle\phi_m\,|\,\phi'_m\rangle_0 + \tag{6.27}$$

$$+\sum_{n=-m}^{m-1}\left[\overline{c}_n\,\langle\chi^{(n)}\,|\,\phi'_m\rangle_0 + \langle\phi_m\,|\,\chi^{(n)}\rangle_0\, c'_n\right] + \sum_{n,l=-m}^{m-1} \mathrm{g}_{n,l}\overline{c}_n c'_l,$$

$$\text{где числа: } \ \langle\chi^{(n)}\,|\,\chi^{(l)}\rangle = \mathrm{g}_{n,l} \Longrightarrow \mathbf{g}, \tag{6.28}$$

являются при $n+l < 0$ элементами *произвольной* эрмитовой матрицы, доопределяющими эти *несуществующие* произведения дефектных элементов. В силу (6.4) $\mathrm{g}_{n+1,l} - \mathrm{g}_{n,l+1} = (\zeta - \overline{\zeta})\mathrm{g}_{n+1,l+1}$, что для вещественных ζ фактически означает, что $\mathrm{g}_{n,l} = a^{(-n-l)}$. Поскольку $\mathcal{H}_m$ плотно в $\mathcal{H}_0$, множество $(\psi \in \mathcal{D}^{\chi}_m) \iff \big(\psi \in \mathcal{H}_m,\ \langle\chi^{(n)}\,|\,\psi\rangle = 0,\ -m \le n \le -1\big)$ также плотно в $\mathcal{H}_0$, если все эти $\chi^{(n)}$, $(n < 0)$, линейно независимы "по модулю $\mathcal{H}_0$". Как следствие [22], множество элементов $\Big\{\psi,\ \big[\langle\chi^{(n)}\,|\,\psi\rangle\big]_{n=-1}^{-m}\Big\}$, $\psi \in \mathcal{H}_m$, всюду плотно в пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus C^m$. В тоже время, пространство $\Re_m \supset \mathcal{H}_m$ ни физически ни математически неудовлетворительно, т.к. не включает в целом пространство физических состояний $\mathcal{H}_0$ и не снабжено топологией. Поэтому, с помощью соотношений вложения $\Im$:

$$\phi_0 = \phi_m + \sum_{n=0}^{m-1} c_n\chi^{(n)}, \quad \mathbf{u} = [\mathrm{u}_n]_{n=-1}^{-m} = [c_n]_{n=-1}^{-m}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathrm{u}}_n]_{n=-1}^{-m} = \tag{6.29}$$
$$= \big[\langle\chi^{(n)}\,|\,\phi_0\rangle\big]_{n=-1}^{-m} = \left[\langle\chi^{(n)}\,|\,\phi_m\rangle_0 + \sum_{l=0}^{m-1} \mathrm{g}_{n,l}c_l\right]_{n=-1}^{-m},$$

оно вкладывается в пространство Понтрягина: $\phi \overset{\Im}{\longmapsto} \mathbf{\Phi}$, $\Re_m \overset{\Im}{\longmapsto} \Pi_m$,

$$(\Pi_m \ni \mathbf{\Phi}) \iff \big([\mathbf{\Phi}] = [|\phi_0\rangle; \tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{u}]^T,\ \ \phi_0 \in \mathcal{H}_0,\ \ \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in C^m\big), \tag{6.30}$$

$$\Pi_m = \mathcal{H}_0 \oplus C^m \oplus C^m, \quad \text{со скалярным произведением:}$$

$$\langle\mathbf{\Phi}\,|\,\mathbf{\Phi'}\rangle_\Pi = \langle\phi_0\,|\,\phi_0'\rangle_0 + (\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{u}') + (\mathbf{u}^* \cdot \tilde{\mathbf{u}}') + (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}') = \tag{6.31}$$

$$= [\mathbf{\Phi}^*]^T \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\,[\mathbf{\Phi'}] \equiv [\langle\phi_0|; \tilde{\mathbf{u}}^*; \mathbf{u}^*]\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}} \begin{bmatrix} |\phi_0'\rangle \\ \tilde{\mathbf{u}}' \\ \mathbf{u}' \end{bmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_m \\ 0 & \mathbf{1}_m & \mathbf{g} \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Сигнатура дискретной части метрики равна, очевидно, $(m, -m)$. Однако, хотя понятия ортогональности векторов и симметрии и сопряжения операторов (6.1) определены в этом пространстве по отношению к скалярному произведению (6.31), само оно получается пополнением пространства $\Re_m$ в топологии нормы, задаваемой аналогичным скалярным произведением с *положительной* сигнатурой (m, m). Действие $R_0(z)$ на вектора из $\Re_m$ достаточно определить с помощью тождеств:

$$R_0(z) \equiv (z-\zeta)^k R_0(z)\,[R_0(\zeta)]^k + \sum_{j=1}^{k}(z-\zeta)^{j-1}\,[R_0(\zeta)]^j\,,\ \ (k>0), \quad (6.33)$$

$$R_0(z)\chi^{(n)} = (z-\zeta)^{-n-1}R_0(z)\chi^{(-1)} + \sum_{l=n+1}^{-1}(z-\zeta)^{l-n-1}\chi^{(l)},\ (n<-1),\ (6.34)$$

$$R_0(z)\chi = (z-\zeta)^m R_0(z)\chi^{(-1)} + \sum_{l=-m}^{-1}(z-\zeta)^{l+m}\chi^{(l)},\ (n=-m-1),\ (6.35)$$

$\chi^{(n)} = [R_0(\zeta)]^{n-l}\ \chi^{(l)}$, на векторах из плотного в Π_m подмножества

$$\Re'_m \subset \Re_m:\ (\phi\in\Re'_m) \Longleftrightarrow \left(\phi = \phi_m + \sum_{n=-m}^{-1}c_n\chi^{(n)}\right),\ \text{т.е. } c_n=0,\ n\ge 0;$$

$$R_0(z)\left(\phi_m + \sum_{n=-m}^{-1}c_n\chi^{(n)}\right) = \left(\Phi_0 + \sum_{n=-m+1}^{-1}\mathcal{C}_n\chi^{(n)}\right)\in\Re_{m-1}, \quad (6.36)$$

$$\Phi_0 = R_0(z)\phi_m + \mathcal{C}_0R_0(z)\chi^{(-1)},\ \mathcal{C}_n = \sum_{j=-m}^{n-1}c_j(z-\zeta)^{n-j-1},\ (0\ge n\ge 1-m).$$

Здесь и далее сумма равна нулю, если ее верхний предел меньше нижнего. Проверка свойств (6.4) показывает, что $\overline{R}_0(z)$, определяемая (6.33), (6.34), является резольвентой самосопряженного оператора $\widehat{T_0} = \widehat{T_0^*}$ (6.24) в $\Re_m$, действующей по той же формуле (6.36). В тоже время, действие $R_0(z)$ на вектора из Π_m определяется правилами вложения (6.29) для обеих частей равенства (6.36):

$$R_0(z)\Big[\phi_m;\big[\langle\chi^{(n)}\,|\,\phi_m\rangle\big]_{n=-1}^{-m};[c_n]_{n=-1}^{-m}\Big]^T = \Big[\Phi_0;\big[\langle\chi^{(n)}\,|\,\Phi_0\rangle\big]_{n=-1}^{1-m};[\mathcal{C}_n]_{n=-1}^{1-m}\Big]^T. (6.37)$$

Так как $\mathcal{H}_m$ плотно в $\mathcal{H}_0$, это выражение можно замкнуть в топологии Π_m, и, с учетом (6.33)-(6.35), его замыкание при $m\ge 2$ принимает вид:

$$R_0^{\infty}(z)\left[\phi_0;[\tilde{\mathrm{u}}_n]_{n=-1}^{-m};[\mathrm{u}_n]_{n=-1}^{-m}\right]^T = \Big[\Phi_0;[\widetilde{\mathcal{U}}_n]_{n=-1}^{1-m};[\mathcal{U}_n]_{n=-1}^{1-m}\Big]^T \in \Pi_{m-1}, (6.38)$$

где: $\Phi_0 = R_0(z)\phi_0 + \mathcal{U}_0R_0(z)\chi^{(-1)},\ \ \mathcal{U}_n = \sum_{j=-m}^{n-1}\mathrm{u}_j(z-\zeta)^{n-j-1},\ (n\le 0),$

$$\widetilde{\mathcal{U}}_n = (z-\zeta)^{-n-1}\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\phi_0\rangle_0 + \sum_{j=n+1}^{-1}\tilde{\mathrm{u}}_j(z-\zeta)^{j-n-1} + h_n(z)\,\mathcal{U}_0,$$

$$h_n(z) = (z-\zeta)^{-n}\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi^{(0)}\rangle_0 + \sum_{j=n+1}^{0} \mathrm{g}_{j,-1}(z-\zeta)^{j-n-1},$$

откуда вытекает, что: $R_0^\infty(z)[0;0\ldots,\tilde{\mathrm{u}}_{-m+1},\tilde{\mathrm{u}}_{-m};\mathbf{0}]^T = 0,$ (6.39)

т.е. $R_0^\infty(z)$ не иньективна в Π_m, и, в отличие от расширений в гильбертовом пространстве (6.11), здесь строится расширение замыкаемого в $\Re_m$, но *незамыкаемого* в Π_m оператора $\widetilde{T}_0$ [22], а $\widetilde{T}$ (6.25) играет роль его замыкания в $\Re_m$. Действие его резольвенты на произвольные векторы этих пространств, задаваемое (6.36) и (6.38), (6.39) соответственно, полностью определяет резольвенту расширенного оператора согласно обобщенной формуле Крейна [180] для рассматриваемого сепарабельного возмущения ранга 1. Поэтому, построеный таким образом расширенный оператор T_λ также удобно описывать с помощью замыкания резольвенты:

$$\overline{R}_\lambda(z)|_{\Re_m} = \overline{R}_0(z) - \overline{R}_0(z)|\chi\rangle\Gamma_\lambda^{-1}(z,\zeta)\langle\chi|\overline{R}_0(z), \quad \text{где, при } Im\,\zeta = 0: \tag{6.40}$$

$$\Gamma_\lambda(z,\zeta) = \lambda^{-1} + (z-\zeta)\langle\chi\,|\,R_0(z)R_0(\zeta)|\chi\rangle_{\Re_m} = \lambda^{-1} + (z-\zeta)^{2m}\cdot \tag{6.41}$$

$$\cdot\left[\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi^{(-1)}\rangle_{\Re_m} + \sum_{j=1-m}^{-1}\mathrm{g}_{-1,j}(z-\zeta)^j + \sum_{j=-m}^{-1}\mathrm{g}_{j,-m}(z-\zeta)^{j+1-m}\right] =$$

$$= \lambda^{-1} + (z-\zeta)^{2m}\left[\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi^{(-1)}\rangle_{\Re_m} + \sum_{l=2}^{2m}(z-\zeta)^{-l+1}a^{(l)}\right] = \tag{6.42}$$

$$= \lambda^{-1} + (z-\zeta)^{2m+1}\left[\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi^{(0)}\rangle_0 + \sum_{l=1}^{2m}(z-\zeta)^{-l+1}a^{(l)}\right],$$

λ – произвольный параметр расширения, никак не связанный с λ_0, если $m \geq 0$. Вложение этих формул в пространство Понтрягина определяется вложением (6.29) для вектора (6.35) и имеет вид:

$$\boldsymbol{R}_\lambda(z)|_{\Pi_m} = (T_\lambda - z)^{-1} = R_0^\infty(z) - |F(z,\zeta)\rangle\Gamma_\lambda^{-1}(z,\zeta)\langle F^\dagger(z,\zeta)|, \tag{6.43}$$

$$\Gamma_\lambda(z,\zeta) = \lambda^{-1} + (z-\zeta)\langle F^\dagger(\zeta,\zeta)\,|\,F(z,\zeta)\rangle_{\Pi_m}, \quad \text{где:} \tag{6.44}$$

$$\left[\langle F^\dagger(\zeta,\zeta)|\right]^T = [0_0;\mathbf{0};0,\ldots,0,1]\,,\quad R_0(z)|\chi\rangle \xrightarrow{\Im} [|F(z,\zeta)\rangle] = \begin{bmatrix}\mathcal{F}_0\\ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\\ \boldsymbol{\mathcal{F}}\end{bmatrix} \tag{6.45}$$

$$= \left[\begin{array}{c} (z-\zeta)^m R_0(z)|\chi^{(-1)}\rangle \\ (z-\zeta)^{m-n} \left[\langle\chi^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi^{(0)}\rangle_0 + \sum\limits_{j=n+1}^{0} \mathrm{g}_{-1,j}(z-\zeta)^{j-1} \right]_{n=-1}^{-m} \\ \left[(z-\zeta)^{m+n}\right]_{n=-1}^{-m} \end{array} \right], \quad (6.46)$$

и были вновь использованы тождества (6.33)-(6.35).

Для возмущений высшего ранга: $|\chi\rangle$, $|\chi^{(n)}\rangle$, $|F(z,\zeta)\rangle$, – *строки* с соответствующими компонентами $\chi_s^{(n)} \in \mathcal{H}_n$, и т.д., а $\widehat{\Gamma}_\lambda(z,\zeta)$, $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\mathbf{g}}$, $\widehat{a}^{(n)}$ – соответствующие матрицы, и воизбежание "двойного счета" необходимо аккуратно позаботиться о линейной независимости функционалов из $\mathcal{H}_{-n}$, $n>0$, как векторов, добавляемых в $\Re_m$ (см. ниже). Точка нормировки (вычитания) ζ выбирается из условия отсутствия в $\Re_m$ ненулевых нейтральных элементов т.е. положительной или отрицательной определенности дефектного вектора (подпространства) (6.22):

$$\langle\chi^{(-m)}\,|\,\chi^{(-m)}\rangle_{\Re_m} = \mathrm{g}_{-m,-m} = \langle F^\dagger(\zeta,\zeta)\,|\,F(\zeta,\zeta)\rangle_{\Pi_m} = \left.\frac{\partial\Gamma_\lambda(z,\zeta)}{\partial z}\right|_{z=\zeta} \neq 0. \quad (6.47)$$

Далее, оказывается [182], что у построенного таким образом самосопряженного расширения в пространстве Π_m, помимо вещественного спектра с положительной нормой, имеется либо не более m пар комплексносопряженных собственных значений ($\mathcal{S}_\pm \ni \psi$), либо не более m вещественных собственных значений с отрицательной нормой ($\mathcal{S}_\pi \ni \psi$) [25]. Если $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-) \oplus \mathcal{S}_\pi$ – (гиперболическое) подпространство соответствующих им собственных векторов, то пространство $\mathcal{H}_+ = \Pi_m \ominus \mathcal{S}$ является гильбертовым и инвариантно относительно действия расширенного оператора T_λ, тогда как $\widetilde{T}$ выводит из $\mathcal{H}_+$.

2 Голдстоуновская мода "против" теории расширений.

Цель этого параграфа,– показать, как решение (5.40), полученное путем тонкой подстройки и предельного перехода $\Lambda \to \infty$, воспроизводится методами теории расширений. Согласно вышеописанной общей конструкции Шондина [22], развитой непосредственно для нашего случая в [25], самосопряженные расширения сингулярного оператора вида (5.25) возникают как расширения оператора Лапласа $\widetilde{T}_0 = -\nabla^2_{\mathrm{x}}$ из $\mathcal{H}_0 = L^2$ – подпространства $\mathcal{D}\left(\widetilde{T}_0\right)$, заданного функционалами:

$$\psi,\, T_0\psi \in \mathcal{H}_1,\ \langle \Xi_j|\psi\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{k}|\Xi_j\rangle = \Xi_j(\mathbf{k}) \in \mathcal{H}_{-j}, \tag{6.48}$$
$$j = 1,2, \quad \Xi_1(\mathbf{k}) = 1, \quad \Xi_2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2\Xi_1(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2,$$

в пространство Понтрягина $\Pi_1 = \mathcal{H}_0 \oplus C^1 \oplus C^1$, с последующим сужением на инвариантные подпространства с положительно определенным скалярным произведением. Резольвенты всех таких расширений содержатся в замыкании (в пространстве Понтрягина) формулы Крейна для резольвенты, ассоциированной с исходным сепарабельным возмущением ранга 2 (для s-волны) (5.25):

$$T = T_0 + |\Xi_j\rangle \left(\mathcal{K}_0\right)_{jl} \langle \Xi_l| \tag{6.49}$$
$$\mathbf{R}^t(z) = R_0(z) - R_0(z)|\Xi_j\rangle \left(\Gamma^{-1}(z)\right)_{jl} \langle \Xi_l|R_0(z),\ \ R_0(z) = \left(\widetilde{T}_0 - zI\right)^{-1}, \tag{6.50}$$
$$\Gamma(z) \equiv \mathcal{K}_0^{-1} + \mathcal{R}(z) \Longrightarrow \Gamma(z,\zeta) \equiv \mathcal{K}^{-1} + \mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(\zeta), \quad z = -\varrho^2, \tag{6.51}$$
$$\mathcal{R}_{jl}(z) \equiv \langle \Xi_j|R_0(z)|\Xi_l\rangle = \frac{(2\pi)^3}{\gamma V^*}\mathcal{J}_{j+l-2}(\varrho),\ \ \mathcal{K}_0^{-1} = \frac{(2\pi)^3}{\gamma V^*}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & Z^{\mathcal{P}} \end{pmatrix}, \tag{6.52}$$

где интегралы $\mathcal{J}_n(\varrho)$ определены в (5.47), (5.48). С помощью вытекающего из (6.48), (6.50) тождества

$$R_0(z)|\Xi_2\rangle = |\Xi_1\rangle + zR_0(z)|\Xi_1\rangle, \tag{6.53}$$

можно переписать ее далее как:

$$\mathbf{R}^t(z) = R_0(z) - R_0(z)|\Xi_1\rangle \left\{\hat{t}(z)\langle\Xi_1|R_0(z) + \Delta(z)\langle\Xi_1|\right\} - \tag{6.54}$$
$$-|\Xi_1\rangle\left\{\Delta^*(z)\langle\Xi_1|R_0(z) + \left(\Gamma^{-1}\right)_{22}\langle\Xi_1|\right\},$$
$$\hat{t}(z) = \left(\Gamma^{-1}\right)_{11} + z\left[\left(\Gamma^{-1}\right)_{12} + \left(\Gamma^{-1}\right)_{21}\right] + z^2\left(\Gamma^{-1}\right)_{22}, \tag{6.55}$$
$$\Delta(z) = \left(\Gamma^{-1}\right)_{12} + z\left(\Gamma^{-1}\right)_{22}.$$

Первая строка (6.54), как оператор на пространстве $\mathcal{H}_{-1}$, принимает значения в $\mathcal{H}_0$, тогда как вторая строка принадлежит $\mathcal{H}_{-1}\backslash\mathcal{H}_0$. Полезность такой формы видна в конкретном, координатном [25] или импульсном [22] представлении:

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R}^t(z)|\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,R_0(z)|\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{x}\,|\,R_0(z)|\mathbf{0}\rangle(2\pi)^3\hat{t}(z)\langle\mathbf{0}\,|\,R_0(z)|\mathbf{y}\rangle - \tag{6.56}$$
$$-\Delta(z)(2\pi)^3\left[\langle\mathbf{x}\,|\,R_0(z)|\mathbf{0}\rangle\delta_3(\mathbf{y}) + \delta_3(\mathbf{x})\langle\mathbf{0}\,|\,R_0(z)|\mathbf{y}\rangle\right] - \tag{6.57}$$
$$-\delta_3(\mathbf{x})(2\pi)^3\left(\Gamma^{-1}(z)\right)_{22}\delta_3(\mathbf{y}), \tag{6.58}$$
$$\text{где:}\quad \langle\mathbf{x}\,|\,R_0(z)|\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\frac{1}{-\nabla^2 - z}|\mathbf{y}\rangle = \frac{e^{-\varrho|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}; \tag{6.59}$$
$$\langle\mathbf{q}\,|\,\mathbf{R}^t(z)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\delta_3(\mathbf{q}-\mathbf{p})}{(q^2+\varrho^2)} - \frac{1}{(q^2+\varrho^2)}\,\hat{t}(-\varrho^2)\,\frac{1}{(p^2+\varrho^2)} - \tag{6.60}$$
$$-\Delta(-\varrho^2)\left[\frac{\Xi_1(\mathbf{p})}{(q^2+\varrho^2)} + \frac{\Xi_1(\mathbf{q})}{(p^2+\varrho^2)}\right] - \Xi_1(\mathbf{q})\left(\Gamma^{-1}(-\varrho^2)\right)_{22}\Xi_1(\mathbf{p}).$$

Поскольку процесс рассеяния определяется поведением функции Грина (6.56) при больших $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{y}|$, вдали от рассеивателя, где отсутствуют δ - сингулярные вклады, то ясно, что именно $\hat{t}(z)$ будет играть роль off-shell-T-матрицы, связанной с амплитудой рассеяния. Из (6.60) находим обобщенные собственные состояния рассеяния (сравни с (5.62)), как ядра меллеровских волновых операторов, действующих на произвольную гладкую функцию $\varphi \in \mathcal{H}_0$ с компактным носителем:

$$\left(\mathbf{U}^{\pm}\varphi\right)(\mathbf{s}) \equiv \lim_{\epsilon\to 0}(\pm i\epsilon)\int d^3k\,\langle\mathbf{s}\,|\,\mathbf{R}^t(k^2 \mp i\epsilon)|\mathbf{k}\rangle\,\varphi(\mathbf{k}) = \int d^3k\,\psi_k^{\mp}(\mathbf{s})\,\varphi(\mathbf{k}), \tag{6.61}$$
$$\psi_k^{\pm}(\mathbf{s}) = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{s}) - \frac{\hat{t}(k^2 \pm i0)}{(s^2 - k^2 \mp i0)} - \Delta(k^2 \pm i0)\,\Xi_1(\mathbf{s}). \tag{6.62}$$

Здесь последнее слагаемое явно не вписывается в стандартную схему теории рассеяния [170], инспирируя изменение всей интерпретации (6.62).

2.1 Регуляризация и перенормировка для резольвенты.

Проследим сперва перенормировку резольвенты в рамках развитого выше метода тонкой подстройки. С учетом (5.41) и рекурентных соотношений (5.47), (5.48), первое равенство (6.51) вместе с (6.55) приводит к выражениям:

$$\langle \mathbf{s}|\Xi_j\rangle \left(\Gamma^{-1}(-\varrho^2)\right)_{jl} \langle \Xi_l|\mathbf{r}\rangle = -\frac{\gamma V^*}{(2\pi)^3}\left[\frac{\mathcal{O}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho)}\right], \tag{6.63}$$

$$\mathcal{O}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r}) \equiv \gamma \ll [k^2] \gg + Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}} - (2-\gamma)\varrho^2 + \tag{6.64}$$

$$+(1-\gamma)(s^2+\varrho^2+r^2+\varrho^2) + \mathcal{J}_0(\varrho)(s^2+\varrho^2)(r^2+\varrho^2),$$

что дает: $$\hat{t}(z) = -\frac{\gamma V^*}{(2\pi)^3}\left[\frac{\gamma \ll [k^2] \gg + Z^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}} - (2-\gamma)\varrho^2}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho)}\right], \tag{6.65}$$

$$\Delta(z) = -\frac{\gamma V^*}{(2\pi)^3}\left[\frac{1-\gamma}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho)}\right], \quad \left(\Gamma^{-1}(z)\right)_{22} = -\frac{\gamma V^*}{(2\pi)^3}\left[\frac{\mathcal{J}_0(\varrho)}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho)}\right]. \tag{6.66}$$

После вычитания $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho) \to \mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho) - \mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(b)$, с учетом условия (5.42) и соотношений тонкой подстройки (5.43), предел $\Lambda \to \infty$ и для всей матрицы (6.63) и для $\hat{t}(z)$ (6.65) приводит к решению вида (5.40), однако, уже как для матричного элемента off-shell T-матрицы при $z = -\varrho^2$:

$$-\langle \mathbf{s}|\,\mathcal{T}(z)|\mathbf{k}\rangle = \lim_{\Lambda\to\infty} \hat{t}(z) \Longrightarrow -\frac{T(\varrho)}{2\pi^2} = \frac{-\Upsilon}{2\pi^2\,(\varrho-b)(\varrho+\Upsilon+b)}, \tag{6.67}$$

тогда как $\Delta(z)$, $\left(\Gamma^{-1}(z)\right)_{22}$ в этом пределе исчезают. С другой стороны, в случае $\{-\}$ условие (5.14) означает, что $\Delta(z) \equiv 0$ уже при конечных Λ, оставляя резольвенту (6.54), (6.55) в диагональной форме с последним членом (6.58):

$$-\langle \mathbf{x}|\Xi_1\rangle \left(\Gamma^{-1}(z)\right)_{22} \langle \Xi_1|\mathbf{y}\rangle = -V^*\,\frac{\delta_3(\mathbf{x})\delta_3(\mathbf{y})}{(b_G^2+z)}, \tag{6.68}$$

$$b^2_G(\mathcal{P}) \equiv \ll[k^2]\gg + Z^{\mathcal{P}}_{\{-\}} = \sigma\Lambda - \tilde{\nu}_2 - \mathcal{P}^2. \qquad (6.69)$$

Таким образом, кроме $R_0(z)$, в резольвенте при $\sigma = 0$ остается только этот член с конечным $b^2_G(\mathcal{P})$ и, согласно (5.14), (5.43), (5.21), обобщенное решение (5.8), (5.11)

$$\sqrt{\frac{V^*}{(2\pi)^3}}\, \langle \mathbf{x}|\Xi_1\rangle = \sqrt{V^*}\, \delta_3(\mathbf{x}), \qquad (6.70)$$

при $\mathcal{P} = 0$ попрежнему является для конечных m, Λ точной "волновой функцией" голдстоуновских состояний (5.5). Тем не менее их вклад (6.68) в резольвенту исчезает с $\Lambda \to \infty$ для любых σ: соответствующий им полюс в off-shell T-матрице (6.65) уже при конечном Λ либо параметрически сокращается еще до вычитания, либо просто разрушается вычитанием в $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}_{\{\pm\}}(\varrho)$ и, в любом случае, отсутствует при $\Lambda = \infty$. Следовательно, при $\sigma \neq 0$, описанная предельная процедура для резольвенты выделяет в действительности только T-матрицу $\hat{t}(z)$ (6.67), аналогично процедуре из работы [19].

Стоит отметить, что этой *off-shell-T-матрице* (6.67) отвечает *для всех* r волновая функция рассеяния вида (6.20) с (s-волновой) фазой $\delta(k)$:

$$\frac{\tilde{u}'_k(0)}{\tilde{u}_k(0)} = k\cot(\delta(k)) = g(k^2) = -\left(b + \frac{b^2}{\Upsilon}\right) - \frac{k^2}{\Upsilon} \equiv -\frac{1}{\xi} + \frac{R_0^2}{2}k^2, \qquad (6.71)$$

что может служить отправной точкой при построении операторной реализации в пространстве вида (5.62) путем решения обратной задачи рассеяния [24]. Хотя такая же фаза s-рассеяния, связанная с известным приближением эффективного радиуса [170], получится, например, для оператора Шредингера с регулярным потенциалом Эккарта:

$$U(r) = -8\upsilon^2\omega\frac{e^{-2\upsilon r}}{(1+\omega e^{-2\upsilon r})^2},\ \ \omega = \frac{\upsilon - \tau}{\upsilon + \tau},\ \ \tau - \upsilon = \Upsilon,\ \ \tau\upsilon = b(b+\Upsilon),$$

соответствующая ему *off-shell-T-матрица* будет существенно отличаться нетривиальной зависимостью от импульсов $\mathbf{s}, \mathbf{k}$, совпадая с (6.67) лишь при $\mathbf{s}^2 = \mathbf{k}^2 = z$, а волновая функция будет лишь асимптотчески, при $r \to \infty$, стремиться к виду (6.20).

2.2 Резольвента в теории расширений.

Как и в гильбертовом случае [14], формула Крейна для резольвенты расширенного оператора аналогична (6.40)-(6.46), и задается, по существу, (6.50) и *вторым* равенством (6.51), вложенными в соответствующее пространство $\Re_1$ или Π_1, где, *по определению*, произвольная конечная постоянная эрмитова матрица $\mathcal{K}^{-1}$ *не имеет ничего общего и никак не связана* с "затравочной" матрицей $\mathcal{K}_0^{-1}$ (6.52).

Несмотря на то, что вычитание в знаменателе (6.63) легко воспроизводится для матрицы $\Gamma(z,\zeta)$ соотношениями: $\mathcal{K}^{-1} \to 0$, $\zeta \to -b^2 < 0$, проследить появление решения (6.67) даже из общей параметризации расширений с одной точкой вычитания, при:

$$\zeta = -\mu^2 < 0, \qquad \mathcal{K}^{-1} = 2\pi^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \tag{6.72}$$

оказывается весьма нетривиальной задачей. Для придания ей смысла, согласно указанной выше общей процедуре, на первом шаге строится вспомогательное пространство $\Re_1 \ni \psi$ путем добавления к подпространству (6.48) "обобщенных дефектных элементов":

$$|\chi_j^{(-n)}\rangle = (R_0(\zeta))^{j-n}\,|\Xi_j\rangle \in \mathcal{H}_{-n}, \quad j-1 \geq n \geq 0, \;\; j = 1,2, \tag{6.73}$$

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + c_0|\chi_1^{(0)}\rangle + c_{-1}|\chi_2^{(-1)}\rangle, \;\; c_0, c_{-1} \in C^1, \;\; \phi_1 \in \mathcal{H}_1. \tag{6.74}$$

$$\text{связанных со шкалой} \;\; \ldots \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{-1} \subseteq \ldots, \tag{6.75}$$

пространств Соболева [14]. Следующим шагом вводятся предписания для скалярных произведений этих обобщенных дефектных элементов, которые в расходящихся случаях $m+n>0$ приравниваются элементам *произвольной* эрмитовой матрицы. Естественный общий рецепт определения этой матрицы, включающий также предписание Березина [15] с пока произвольными вещественными $\lambda_{lj}^{(m+n)}$, выбирается здесь в виде:

$$\langle \chi_l^{(-m)} | \chi_j^{(-n)} \rangle \Longrightarrow a_{lj}^{(m+n)} = f.p. \left[\langle \chi_l^{(-m)} | \chi_j^{(-n)} \rangle \right] + P_{lj}^{(m+n)} \left(\lambda_{lj}^{(m+n)} \right), \quad (6.76)$$

где конечная часть ($f.p.$) и "полином расходимостей" $P_{lj}^{(m+n)}(\Lambda)$ определены условиями: $P_{lj}^{(m+n)}(0) = 0$,

$$f.p. \left[\langle \chi_l^{(-m)} | \chi_j^{(-n)} \rangle \right] = \lim_{\Lambda \to \infty} \left[\int^{\Lambda} d^3k \, \chi_l^{*(-m)}(\mathbf{k}) \chi_j^{(-n)}(\mathbf{k}) - P_{lj}^{(m+n)}(\Lambda) \right]. \quad (6.77)$$

Имеем: $$\langle \chi_2^{(-1)} | \chi_2^{(-1)} \rangle \Longrightarrow a_{22}^{(2)} = 2\pi^2 \left[\frac{2}{3\pi} \left(\lambda_{22}^{(2)} \right)^3 - \frac{4}{\pi} \lambda_{22}^{(2)} \mu^2 + \frac{5}{2} \mu^3 \right], \quad (6.78)$$

$$\langle \chi_2^{(0)} | \chi_2^{(-1)} \rangle = \langle \chi_2^{(-1)} | \chi_2^{(0)} \rangle \Longrightarrow a_{22}^{(1)} = 2\pi^2 \left[\frac{2}{\pi} \lambda_{22}^{(1)} - \frac{15}{8} \mu \right], \quad (6.79)$$

$$\langle \chi_1^{(0)} | \chi_2^{(-1)} \rangle = \langle \Xi_1 | \chi_2^{(0)} \rangle \Longrightarrow a_{12}^{(1)} = 2\pi^2 \left[\frac{2}{\pi} \lambda_{12}^{(1)} - \frac{3}{2} \mu \right]. \quad (6.80)$$

Однако, с учетом линейной связи (6.53) при $z = \zeta$ между добавляемыми векторами $|\chi_j^{(-n_j)}\rangle$ *с разными* j, включая $|\Xi_1\rangle$, приходится признать, что

$$|\chi_2^{(-1)}\rangle - |\Xi_1\rangle = \zeta |\chi_1^{(0)}\rangle, \ \text{ т.е.: } a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} = \zeta \langle \chi_2^{(0)} | \chi_1^{(0)} \rangle_0 = -2\pi^2 \, \frac{3}{8} \mu, \quad (6.81)$$

$$\text{откуда: } \lambda_{22}^{(1)} = \lambda_{12}^{(1)} \equiv \lambda^{(1)}, \quad \lambda_{22}^{(2)} \equiv \lambda^{(2)}.$$

Полагая, что $(-z)^{1/2}$- регулярная ветвь в плоскости с разрезом при $z > 0$, вещественная при $z < 0$, и, при $n = 0, 1, 2$,

$$\mathcal{I}_n(z, \zeta) = \quad (6.82)$$

$$(z - \zeta)^n \int \frac{d^3k \, \left(k^2 \right)^n}{(k^2 - z)(k^2 - \zeta)^{n+1}} = 2\pi (z - \zeta)^n \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(\lambda - z)} \left(\frac{\lambda}{\lambda - \zeta} \right)^{n+1} =$$

$$\frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{(z - \zeta)} \left[(-z)^{n+\frac{1}{2}} - (-\zeta)^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{s=1}^{n} (\zeta - z)^s \frac{(-\zeta)^{n+\frac{1}{2}-s}(2n+1)!!}{(2s)!!(2n-2s+1)!!} \right],$$

имеем резольвенту (6.43) в пространстве Понтрягина $\Pi_1 = \mathcal{H}_0 \oplus C^1 \oplus C^1$:

$$\mathbf{R}^t(z)|_{\Pi_1} = R_0^{\infty}(z) - |F_j(z, \zeta)\rangle \left(\Gamma^{-1}(z, \zeta) \right)_{jl} \langle F_l^{\dagger}(z, \zeta)|, \quad \text{где:} \quad (6.83)$$

$$R_0^\infty(z)\begin{bmatrix}|\phi_0\rangle\\ \tilde u\\ u\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}R_0(z) & 0 & R_0(z)|\chi_2^{(-1)}\rangle\\ \langle\chi_2^{(-1)}|R_0(z) & 0 & \mathcal{I}_2(z,\zeta)(z-\zeta)^{-1}+a_{22}^{(1)}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}|\phi_0\rangle\\ \tilde u\\ u\end{bmatrix},\ (6.84)$$

$$\Gamma(z,\zeta)=\mathcal{K}^{-1}+(z-\zeta)\begin{pmatrix}\mathcal{I}_0(z,\zeta) & \mathcal{I}_1(z,\zeta)+a_{12}^{(1)}\\ \mathcal{I}_1(z,\zeta)+a_{12}^{(1)} & \mathcal{I}_2(z,\zeta)+(z-\zeta)a_{22}^{(1)}+a_{22}^{(2)}\end{pmatrix},(6.85)$$

$$(\Gamma(z,\zeta))_{jl}=\left(\mathcal{K}^{-1}\right)_{jl}+(z-\zeta)\langle F_j^\dagger(\zeta,\zeta)\,|\,F_l(z,\zeta)\rangle_{\Pi_1},\quad |F_2(z,\zeta)\rangle=\quad(6.86)$$

$$\begin{pmatrix}(z-\zeta)R_0(z)|\chi_2^{(-1)}\rangle\\ (z-\zeta)^2\langle\chi_2^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi_2^{(0)}\rangle_0+(z-\zeta)a_{22}^{(1)}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(z-\zeta)R_0(z)|\chi_2^{(-1)}\rangle\\ \mathcal{I}_2(z,\zeta)+(z-\zeta)a_{22}^{(1)}\\ 1\end{pmatrix},(6.87)$$

$$|F_1(z,\zeta)\rangle=\begin{pmatrix}R_0(z)|\Xi_1\rangle\\ (z-\zeta)\langle\chi_2^{(-1)}\,|\,R_0(z)|\chi_1^{(0)}\rangle_0+a_{12}^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_0(z)|\Xi_1\rangle\\ \mathcal{I}_1(z,\zeta)+a_{12}^{(1)}\\ 0\end{pmatrix},\ (6.88)$$

$$\det\left[\frac{\partial\Gamma(z,\zeta)}{\partial z}\right]_{z=\zeta}=\frac{\pi^2}{\sqrt{-\zeta}}\,a_{22}^{(2)}-\left(a_{12}^{(1)}\right)^2.\ \ \text{При } z=-\varrho^2,\ \zeta=-\mu^2<0:(6.89)$$

$$\frac{\Gamma_{11}(z,\zeta)}{2\pi^2}=\alpha+\mu-\varrho,\quad \frac{\Gamma_{12,21}(z,\zeta)}{2\pi^2}=\beta+\varrho^3-\mu^3-\frac{2}{\pi}\lambda^{(1)}\left(\varrho^2-\mu^2\right),$$

$$\frac{\Gamma_{22}(z,\zeta)}{2\pi^2}=\gamma+\mu^5-\varrho^5+\frac{2}{\pi}\lambda^{(1)}\left(\varrho^2-\mu^2\right)^2-\left[\frac{2}{3\pi}\left(\lambda^{(2)}\right)^3-\frac{4}{\pi}\mu^2\lambda^{(2)}\right]\left(\varrho^2-\mu^2\right).$$

Обращая эту матрицу в (6.50), с двумя константами $\lambda^{(1),(2)}$, скомбинированными в другие две независимые *ненулевые* константы C, C_0 или C, Υ

$$C=\mu-\frac{2}{\pi}\lambda^{(1)},\quad C_0=\frac{2}{3\pi}\left(\lambda^{(2)}\right)^3-\frac{4}{\pi}\mu^2\lambda^{(2)}+\frac{2}{\pi}\mu^2\lambda^{(1)}+\mu^3=-\Upsilon C^2,\ (6.90)$$

$$a_{12}^{(1)}=-2\pi^2\left(C+\frac{\mu}{2}\right),\ \ a_{22}^{(1)}=-2\pi^2\left(C+\frac{7}{8}\mu\right),\qquad(6.91)$$

$$a_{22}^{(2)}=2\pi^2C_0-\mu^2a_{12}^{(1)}=-2\pi^2\left(\Upsilon C^2-\mu^2C-\frac{\mu^3}{2}\right),$$

имеем последовательно для $\Gamma(z,\zeta)$ и $\Gamma^{-1}(z,\zeta)$:

$$\frac{\Gamma_{11}(z,\zeta)}{2\pi^2}=\alpha+\mu-\varrho,\quad \frac{\Gamma_{12,21}(z,\zeta)}{2\pi^2}=\beta+(\varrho-\mu)\left[\varrho^2+(\varrho+\mu)C\right],\ (6.92)$$

$$\frac{\Gamma_{22}(z,\zeta)}{2\pi^2} = \gamma - (\varrho-\mu)\left[\varrho^4 + (\varrho+\mu)\left(\varrho^2 C - \Upsilon C^2\right)\right],$$

$$\Gamma^{-1}(z,\zeta) = \frac{1}{\det\Gamma}\begin{pmatrix} \Gamma_{22} & -\Gamma_{12} \\ -\Gamma_{12} & \Gamma_{11}\end{pmatrix}, \tag{6.93}$$

$$\left(2\pi^2\right)^{-2}\det\Gamma = C^2(\varrho^2-\mu^2)\left[\alpha\Upsilon - (\varrho-\mu)(\varrho+\mu+\Upsilon)\right] - \tag{6.94}$$
$$-C(\varrho^2-\mu^2)\left[2\beta + \varrho^2(\varrho+\mu+\alpha)\right] - (\varrho-\mu)(\alpha\varrho^4 + 2\beta\varrho^2+\gamma) + \alpha\gamma - \beta^2.$$

Анализ асимптотического поведения величины $\widehat{t}(z)$ (6.55) при $\varrho \to \infty$ показывает тогда, что решение (6.67) *не может иметь место ни при каких конечных значениях* μ, C, Υ, поскольку:

$$\widehat{t}(z) \simeq -\frac{1}{2\pi^2\varrho}. \tag{6.95}$$

Изменение этого асимптотического режима возможно *только если* сперва, при фиксированных ϱ, μ, Υ, *положить* $C \to \infty$. Именно такое "расширенное" толкование произвола [22] в выборе *различных* значений $a_{lj}^{(m+n)}$, т.е. $\lambda^{(m+n)}$, с одной стороны, непосредственно иммитирует сдвиг σ параметра обрезания $\Lambda \to \infty$ в (5.60), а с другой стороны, открывает путь к получению решений и расширений, отличных от [25] ценой отказа от требования конечности всех величин $\lambda^{(m+n)}$ (6.78)-(6.80) с сохранением, однако, определенной их иерархии (6.90) при $\lambda^{(1)} \to \infty$: $\left(\lambda^{(2)}\right)^3 \propto \Upsilon\left(\lambda^{(1)}\right)^2$, определяемой *размерным* параметром Υ. При этом $\Delta(z,\zeta)$ и $\left(\Gamma^{-1}(z,\zeta)\right)_{22}$ в (6.55) вновь исчезают в этом пределе, и, в соответствии с (6.67) и (6.71):

$$\lim_{C\to\infty}\widehat{t}(z) = \lim_{C\to\infty}\left(\Gamma^{-1}(z,\zeta)\right)_{11} = \frac{-\Upsilon}{2\pi^2\left[(\varrho-\mu)(\varrho+\mu+\Upsilon)-\alpha\Upsilon\right]} = \tag{6.96}$$
$$= t(-\varrho^2) = \frac{-\Upsilon}{2\pi^2(\varrho-\mathrm{b}_+)(\varrho-\mathrm{b}_-)} \equiv \frac{-\Upsilon}{2\pi^2(\varrho-b)(\varrho+b+\Upsilon)},$$

$$\text{при } b=\mathrm{b}_\pm, \quad \mathrm{b}_+ = -\mathrm{b}_- - \Upsilon, \quad \mathrm{b}_\pm = -\frac{\Upsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Upsilon}{2}\right)^2 + \frac{\Upsilon}{\xi}}, \tag{6.97}$$

$$\frac{1}{\xi} = \alpha + \mu + \frac{\mu^2}{\Upsilon} = \frac{b}{\Upsilon}(b+\Upsilon) = -\frac{\mathrm{b}_+\mathrm{b}_-}{\Upsilon}. \tag{6.98}$$

Рассмотрим подробнее этот предельный переход и построим соответствующую ему редукцию пространства Понтрягина. Из (6.90), (6.91), при $C \to \infty$ находим:

$$\Gamma_C^{-1}(z,\zeta) \simeq t(z)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{C\Upsilon} \\ -\dfrac{1}{C\Upsilon} & \dfrac{1}{C^2\Upsilon^2}\left[1+\dfrac{\Upsilon}{2\pi^2 t(z)(\zeta-z)}\right]\end{pmatrix}, \tag{6.99}$$

$$|F_1^C(z,\zeta)\rangle \simeq \begin{pmatrix} R_0(z)|\Xi_1\rangle \\ -2\pi^2 C + O(1) \\ 0 \end{pmatrix},\ |F_2^C(z,\zeta)\rangle \simeq \begin{pmatrix} (z-\zeta)R_0(z)|\chi_2^{(-1)}\rangle \\ -2\pi^2 C(z-\zeta)+O(1) \\ 1\end{pmatrix}, \tag{6.100}$$

и детерминант (6.89) будет знакоопределен, если $\Upsilon \neq -2\mu$. Метрика пространства Понтрягина явно зависит от $C \to \infty$ и представима в виде:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\pi^2\Upsilon C^2 \end{pmatrix} = \mathbf{d}_{1/C}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1\mathbf{d}_{1/C}, \tag{6.101}$$

$$\mathbf{d}_{1/C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\pi^2\Upsilon \end{pmatrix}. \tag{6.102}$$

Поэтому, в качестве кандидата на роль инвариантного подпространства возьмем подмножество Π_1^C зависящих от C векторов из Π_1 вида

$$\left(\Pi_1^C \ni \boldsymbol{\psi^C}\right) \Longleftrightarrow \left(\left[\boldsymbol{\psi^C}\right] = \left[\mathbf{d}_C\boldsymbol{\psi^1}\right] = \left[\phi_0; C\tilde{h}; (1/C)h\right]^T,\ \left[\boldsymbol{\psi^1}\right] = \left[\phi_0; \tilde{h}; h\right]^T\right), \tag{6.103}$$

скалярное произведение (6.32), (6.102) которых *не зависит от* C:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\psi^C} \,|\, \boldsymbol{\psi'^C}\rangle_{\Pi_1^C} &= \left[\boldsymbol{\psi^{*C}}\right]^T \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_C \left[\boldsymbol{\psi'^C}\right] = \left[\boldsymbol{\psi^{*1}}\right]^T \mathbf{d}_C\mathbf{d}_{1/C}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1\mathbf{d}_{1/C}\mathbf{d}_C \left[\boldsymbol{\psi'^1}\right] = \\ &= \left[\boldsymbol{\psi^{*1}}\right]^T \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1 \left[\boldsymbol{\psi'^1}\right] = \langle \boldsymbol{\psi^1} \,|\, \boldsymbol{\psi'^1}\rangle_{\Pi_1^1}.\end{aligned} \tag{6.104}$$

При любом конечном C дилатации $\mathbf{d}_C$ взаимно однозначно отбражают множество $\Pi_1^1 \ni \boldsymbol{\psi^1}$ на $\Pi_1^C \subset \Pi_1$, т.е. Π_1^C изоморфно Π_1^1, которое является пространством Понтрягина с независящей от C метрикой $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1$ (6.102). Назовем его перенормированным пространством Понтрягина.

Теорема: *Пусть множество Π_1^C и пространство Π_1^1 определены (6.101)-(6.104), тогда:*

1) при $C \to \infty$ Π_1^C асимптотически инвариантно относительно действия резольвенты самосопряженного оператора: $\mathbf{R}_C^t(z)\Pi_1^C \subset \Pi_1^C$, задаваемой формулами (6.83),(6.84), (6.99), (6.100);

2) эта резольвента по формулам (6.103) индуцирует действие перенормированной резольвенты $\mathbf{R}_1^t(z)$ независящего от C самосопряженного оператора T_1 в пространстве Понтрягина Π_1^1;

3) пространство Понтрягина Π_1^1 относительно действия этого оператора разлагается в прямую сумму ортогональных инвариантных подпространств $\Pi_1^1 = \mathcal{H}_\Upsilon^1 \oplus \mathcal{H}_\perp^1$, задаваемых разложением векторов (6.103):

$$\Pi_1^1 \ni \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{\mathbf{1}} \oplus \boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}, \;\; \left[\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{\mathbf{1}}\right] = \left[\phi_0;\, 2\pi^2\Upsilon h;\, h\right]^T, \;\; \left[\boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}\right] = \left[0_0;\, 0;\, h_\perp\right]^T, \tag{6.105}$$

где собственный вектор $\boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}$, отвечающий собственному значению ζ, положительно (отрицательно) определен при $\Upsilon < 0$ ($\Upsilon > 0$);

4) подпространство $\mathcal{H}_\Upsilon^1$, в свою очередь, эквивалентно пространству $\mathcal{H}_0 \oplus C^1 = \mathcal{H}_\Upsilon$, $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{\mathbf{1}} \mapsto \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = [\phi_0,\, h]^T$, с метрикой $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_\Upsilon = \operatorname{diag}\{\mathbf{I}_0,\, 2\pi^2\Upsilon\}$, на котором оператор-функция $\mathbf{R}_1^t(z)|_{\mathcal{H}_\Upsilon^1}$ индуцирует резольвенту $\mathbf{R}_\Upsilon^t(z)$ самосопряженного оператора T_Υ, задающего расширения $\widetilde{T}_0$ (6.48) с выходом из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_\Upsilon$.

Доказательство: этих утверждений вытекает непосредственно из явного вида действия резольвент $\mathbf{R}_C^t(z)$ в Π_1^C и $\mathbf{R}_1^t(z)$ в Π_1^1 соответственно:

$$\left[\mathbf{R}_C^t(z)|\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{C}}\rangle\right] = \left(R_0^\infty(z) - \left[F_j^C(z,\zeta)\right]\left(\Gamma_C^{-1}(z,\zeta)\right)_{jl}\left[F_l^{\dagger C}(z,\zeta)\right]^T \widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{\mathrm{C}}\right)\left[\mathbf{d}_C\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} R_0(z)|\phi_0\rangle \\ O(1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_0(z)|\Xi_1\rangle \\ 2\pi^2 C \\ 1/(C\Upsilon) \end{bmatrix} t(z) \left(\langle \Xi_1 \,|\, R_0(z)|\phi_0\rangle - \frac{\tilde{h}}{\Upsilon} \right) + \begin{bmatrix} O(1/C) \\ O(1) \\ (1/C)\mathcal{U}_\perp(z) \end{bmatrix},$$

который позволяет установить необходимые свойства (6.4)-(6.5) как для

$$\big[\mathbf{R}^t_1(z)|\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}\rangle\big]_{\Pi^1_1} = \lim_{C\to\infty} \boldsymbol{d}_{\mathbf{1}/\boldsymbol{C}}\big[\mathbf{R}^t_C(z)|\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{C}}\rangle\big]_{\Pi^C_1} = \lim_{C\to\infty} \boldsymbol{d}_{\mathbf{1}/\boldsymbol{C}}\big[\mathbf{R}^t_C(z)|\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}\rangle\big] \quad (6.106)$$

$$= \begin{bmatrix} R_0(z)|\phi_0\rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_0(z)|\Xi_1\rangle \\ 2\pi^2 \\ 1/\Upsilon \end{bmatrix} t(z) \left(\langle \Xi_1 \,|\, R_0(z)|\phi_0\rangle - \frac{\tilde{h}}{\Upsilon} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{U}_\perp(z) \end{bmatrix},$$

$$\text{и для } \ \mathcal{U}_\perp(z) = \left(2\pi^2\Upsilon h - \tilde{h}\right)\left[2\pi^2\Upsilon(\zeta - z)\right]^{-1}, \quad (6.107)$$

так и для резольвенты, индуцированной на векторах $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}$ из пункта 4):

$$\langle \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}} \,|\, \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\rangle_{\mathcal{H}_\Upsilon} = \langle \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\Upsilon}} \,|\, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\rangle_{\Pi^1_1} = \langle \phi_0 \,|\, \phi_0\rangle_0 + 2\pi^2\Upsilon|h|^2, \quad \mathbf{R}^t_\Upsilon(z)|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\rangle = \quad (6.108)$$

$$= \begin{bmatrix} R_0(z)|\phi_0\rangle \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_0(z)|\Xi_1\rangle \\ 1/\Upsilon \end{bmatrix} t(z)\left(\langle \Xi_1 \,|\, R_0(z)|\phi_0\rangle - 2\pi^2 h\right), \quad (6.109)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_\perp \,|\, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_\perp\rangle_{\Pi^1_1} = -2\pi^2\Upsilon|h_\perp|^2, \quad \mathbf{R}^t_\perp(z)|\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_\perp\rangle = (\zeta - z)^{-1}|\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_\perp\rangle; \quad (6.110)$$

$$\text{то есть:} \quad T_1 \longmapsto T_\Upsilon \oplus T_\perp, \quad \mathbf{R}^t_1(z) \longmapsto \mathbf{R}^t_\Upsilon(z) \oplus \mathbf{R}^t_\perp(z). \quad (6.111)$$

Последнее выражение для резольвенты в $\mathcal{H}_\Upsilon$ по существу совпадает с операторной реализацией, построенной в работах [19], [20]. Как легко проверить, произвольная $\varphi \in \mathcal{H}_0$, с компактным носителем, вложенная по (6.29) в Π_1, также переводится оператором $\mathbf{R}^t_C(z)$ в множество Π^C_1. Тогда из аналога формулы (6.61) для $\mathbf{R}^t_\Upsilon(z)$ вытекает, весьма похожая на ожидаемую (5.62), реализация собственных волновых функций рассеяния (и связанных состояний) в пространстве $\mathcal{H}_\Upsilon$:

$$\Phi^{\pm(0)}_{k0}(\mathbf{s}) = \delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{s}) - \frac{t(k^2 \pm i0)}{(s^2 - k^2 \mp i0)}, \ \boldsymbol{\psi}^\pm_{k\Upsilon}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \Phi^{\pm(0)}_{k0}(\mathbf{s}) \\ (1/\Upsilon)\, t(k^2 \pm i0) \end{pmatrix}, \quad (6.112)$$

$$\phi_{\mathrm{b}_\pm 0}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}^2 + \mathrm{b}^2_\pm)}, \ \ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{b}_\pm\Upsilon}(\mathbf{s}) = N_{\mathrm{b}_\pm}\begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{b}_\pm 0}(\mathbf{s}) \\ -(1/\Upsilon) \end{pmatrix}, \ N^2_{\mathrm{b}_\pm} = \frac{8\pi\Upsilon|\mathrm{b}_\pm|}{\Upsilon + 2|\mathrm{b}_\pm|}. \quad (6.113)$$

В выражении для $N_{\rm b}^2$ здесь $\rm b_\pm$ предполагается вещественным. В противном случае модуль заменяется на указанную выше, перед (6.82), аналитическую функцию $({\rm b}_\pm^2)^{1/2}$. С учетом (6.71), действие расширенного оператора $T_\Upsilon \oplus T_\perp$, например, в координатном представлении, задается правилом:

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \frac{u(r)}{4\pi r}, \quad T_\Upsilon \left(\begin{array}{c} \varphi_0(\mathbf{x}) \\ -(1/\Upsilon)u(0) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -(1/r)\partial_r^2(r\varphi_0(\mathbf{x})) \\ u'(0)+(1/\xi)u(0) \end{array} \right), \text{ где:} \quad (6.114)$$

$$\frac{1}{r}\partial_r^2(r\varphi_0(\mathbf{x})) = \frac{u''(r)}{4\pi r} = \nabla^2\varphi_0(\mathbf{x}) + u(0)\delta_3(\mathbf{x}); \;\; T_\perp|\boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}\rangle = -\mu^2|\boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}\rangle. \; (6.115)$$

Прямым вычислением проверяется, что (6.109), (6.110), (6.111) является его резольвентой. При $\Upsilon \to \infty$ формулы (6.71) и (6.109)-(6.114) вновь приводят к расширению для $\delta_3(\mathbf{x})$-потенциала в $\mathcal{H}_0$, описанному в пункте 1.3.

Как известно [170], при наличии связанного состояния длина рассеяния ξ (6.98) в (6.71) должна быть положительной. В соответствии с общей картиной пункта 1.4, могут представиться следующие случаи:

(i) $\Upsilon > 0$, тогда, в силу (6.108), (6.110), $\mathcal{H}_\Upsilon$ является Гильбертовым пространством. Если $\xi < 0$, то, во всяком случае, $Re\,{\rm b}_\pm < 0$, и при $0 > \xi > -(4/\Upsilon)$: ${\rm b}_+^* = {\rm b}_-$. Если $\xi > 0$, то ${\rm b}_+{\rm b}_- < 0$, т.е. имеется одно связанное состояние с $b = {\rm b}_+ > 0$, $N_{{\rm b}_+}^2 > 0$;

(ii) $\Upsilon < 0$, $\xi < 0$, тогда ${\rm b}_+ > 0 > {\rm b}_-$, но это собственное состояние имеет отрицательную норму $N_{{\rm b}_+}^2 < 0$. Пространство физических состояний в (6.114) должно быть ортогонально этому вектору $\boldsymbol{\psi}_{{\rm b}_+\Upsilon}$:

$$\left(\mathcal{H}_\Upsilon|_{phys} \ni \boldsymbol{\psi}\right) \Longleftrightarrow \left(\mathcal{H}_\Upsilon \ni \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ h \end{bmatrix}, \; h = -\frac{u(0)}{\Upsilon} = \frac{\langle \phi_{{\rm b}_+0}\,|\,\varphi_0\rangle_0}{2\pi^2}\right); \; (6.116)$$

(iii) $\Upsilon < 0$, $\xi > -(4/\Upsilon)$, тогда ${\rm b}_+{\rm b}_- > 0$, при этом имеется одно обычное связанное состояние $b = {\rm b}_- > 0$, $|\Upsilon| > 2b$, с $N_{{\rm b}_-}^2 > 0$, и одно собственное состояние с $N^2_{\mathrm{b}_+} < 0$. Пространство физических состояний здесь такое же как в предыдущем случае;

(iv) $\Upsilon < 0$, $0 < \xi < -(4/\Upsilon)$, тогда имеется два комплексных собственных значения $Re\,\mathrm{b}_\pm > 0$, $\mathrm{b}^*_+ = \mathrm{b}_-$. Пространство физических состояний теперь ортогонально обоим собственным векторам $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{b}_\pm\Upsilon}$:

$$\left(\mathcal{H}_\Upsilon|_{phys} \ni \boldsymbol{\psi}\right) \Longleftrightarrow \left(\mathcal{H}_\Upsilon \ni \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ h \end{bmatrix},\ h = -\frac{u(0)}{\Upsilon} = \frac{\langle \phi_{\mathrm{b}_\pm 0} \,|\, \varphi_0\rangle_0}{2\pi^2}\right), \quad (6.117)$$
$$\text{т.е.} \quad \langle \phi_{\mathrm{b}_+0} - \phi_{\mathrm{b}_-0} \,|\, \varphi_0\rangle_0 = 0.$$

Равенства (6.116), (6.117) означают, что в отличии от первого случая (i), в (ii-iv) отчасти теряется свойство локальности расширенного оператора:

$$\text{для} \ \ u(0) = u'(0) = 0, \ \Rightarrow \ T_\Upsilon|_{\mathcal{H}_{phys}} \begin{bmatrix} \varphi_0(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/r)\partial^2_r(r\varphi_0(\mathbf{x})) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.118)$$

так как в этих случаях оно совместимо с положительной определенностью $\mathcal{H}_{phys}$ только на функциях $\varphi_0 \perp \phi_{\mathrm{b}_+0}$ и $\varphi_0 \perp \phi_{\mathrm{b}_\pm 0}$, соответственно. Это вполне согласуется с результатами работы [24]. Однако, теперь полное число физических степеней свободы не меняется, т.к. имеется дополнительная положительно определенная при $\Upsilon < 0$ физическая степень свободы (6.105), (6.110), связанная с собственным вектором $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{1}}_\perp$ (6.115). Если ассоциировать ее с Голдстоуновской модой (6.70), то, в соответствии с (6.68), следует сопоставить точке нормировки ζ "параметр связи" этой моды (6.69), (5.24) при $\sigma = 0$ и нерелятивистских импульсах $\mathcal{P}$:

$$-\zeta = \mu^2 \Longrightarrow b^2_G(\mathcal{P}) = -\tilde{\nu}_2 - \mathcal{P}^2 = 2\widetilde{\mathcal{M}}_0\widetilde{M}c^2 - \mathcal{P}^2 > 0. \quad (6.119)$$

Отсюда, принимая конституентную массу $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \simeq 385$ Mev (см. главу 7), токовую массу $\widetilde{M} \leq 5$ Mev [156], находим пределы применимости развитой в главах 4 – 6 нерелятивистской картины "адронных" связанных состояний с полным импульсом $\mathcal{P} = \mathcal{P}_h$:

$$\mathcal{P}_h \ll c\sqrt{2\widetilde{\mathcal{M}}_0\widetilde{M}} \leq 60 \text{ Mev } \cdot c, \quad \text{соответственно,} \quad |\mathbf{v}_h| \ll 0.08\, c. \qquad (6.120)$$

Тогда как для голдстоуновской моды (см. главу 7) получаем $|\mathbf{v}_G| \ll 0.4\, c$.

Выше было показано, что в пространстве $\Re_1$ (6.74), натянутом в том числе и на вектора $|\chi_1^{(0)}\rangle$ и $|\chi_2^{(-1)}\rangle$, эти обобщенные дефектные элементы для собственных состояний рассеяния (6.62) комбинируются в единый обобщенный дефектный вектор $|\Xi_1\rangle = |\chi_2^{(-1)}\rangle - \zeta|\chi_1^{(0)}\rangle$, как бы регенерирующий "голдстоуновскую степень свободы". Так что обобщенная функция $(2\pi)^{-3/2}\langle\mathbf{x}|\Xi_1\rangle = \delta_3(\mathbf{x})$ играет там двоякую роль: как волновая функция обобщенного собственного Голдстоуновского состояния сингулярного – неперенормированного гамильтониана в методе Λ-обрезания, и/или как дополнительная "дефектная" компонента собственных состояний во вспомогательном пространстве $\Re_1$. В инвариантном пространстве Π_1^1 расширенного – перенормированного самосопряженного гамильтониана аналогичную регенерацию голдстоуновской степени свободы осуществляет теперь вектор $\boldsymbol{\psi}_\perp^{\mathbf{1}}$ (6.105), который, однако, включается в физическое гильбертово пространство наблюдемых состояний только при $\Upsilon < 0$. Заметим, что аналогичная судьба преследует голдстоуновскую моду и в других известных пространствах состояний с индефинитной метрикой, возникающих, например, при квантовании калибровочных теорий [80].

Таким образом, отождествив собственный вектор расширенного гамильтониана (6.115) с (собственной) голдстоуновской модой, удается, с одной стороны, примирить ее с ненулевой амплитудой рассеяния (6.96), а, с другой стороны, выяснить смысл точки нормировки для этого расширения (6.119). При этом другого параметра расширения α вполне достаточно, чтобы сохранить галилеевскую инвариантность амплитуды рассеяния в (6.96)–(6.98).

Дело в том, что сама по себе Голдстоуновская мода, проявляющаяся как связанное состояние с *нулевой* энергией связи при *нулевом* орбитальном моменте, *не может* появиться как обычное квадратично интегрируемое решение квантовомеханического уравнения Шредингера *ни с каким* короткодействующим потенциалом [170]. Другими словами, связанное состояние с такими квантовыми числами не может существовать как вектор обычного Гильбертова пространства. Вот почему, эта – чисто квантовополевая степень свободы "маскируется" как дополнительное дискретное измерение расширенного пространства с индефинитной метрикой Π_1^1.

3 Выводы.

Таким образом, показано, что переномировочная процедура на основе Λ-обрезании с последующим предельным переходом $\Lambda \to \infty$ и тонкой подстройкой зависимости от Λ "голых" одночастичной массы и константы связи, с одной стороны, и теория расширений с выходом в пространства с индефинитной метрикой, с другой стороны, приводят к одному и тому же двухчастичному s-волновому решению (5.40), (6.67), (6.96), подтверждая и взаимно дополняя друг друга с различных точек зрения. При этом, на языке квантовой теории поля:

(i) задание скалярного произведения в $\Re_m$ сводится к определению перенормированных интегралов (6.28);

(ii) тождества (6.33)-(6.35), (6.47) фиксируют соответствующую точку вычитаний ζ и их необходимое число в (6.42), $\leq 2m$ или $\leq 2m+1$, в зависимости от того, существует или нет $\langle \chi^{(-1)} \mid R_0(z) | \chi^{(-1)} \rangle_{\Re_m}$, как матричный элемент в $\mathcal{H}_0$;

(iii) неизменность полного числа физических степеней свободы для такого сильно сингулярного возмущения вводит дополнительные дискретные компоненты векторов состояния. При $\Upsilon < 0$ возможно появление дискретного инвариантного подпространства физических двухчастичных собственных состояний расширенного – перенормированного (двухчастичного) гамильтониана, которое связано с обобщенным решением для исходного сингулярного – неперенормированного Шредингеровского гамильтониана (5.7), (5.25), и отражает (подобно улыбке чеширского кота) возможность наличия собственной голдстоуновской моды у соответствующего квантовополевого гамильтониана (5.4): это состояние присутствует как полюс регуляризованной неперенормированной резольвенты и/или полной off-shell (но не half-off-shell!) T-матрицы (6.63) только при конечных Λ, исчезая при $\Lambda \to \infty$;

(iv) отсутствует какая бы то ни было связь между характером точечного двухчастичного взаимодействия и знаком "голой" константы связи контактного (четырехфермионного) квантовополевого взаимодействия. Поэтому необходимы дополнительные физические условия чтобы сделать выбор между имеющимися различными возможностями. Эти условия можно почерпнуть, например, из анализа 3-х частичного сектора;

(v) задание самого перенормированного гамильтониана (в терминах физических параметров расширения) осуществляется либо прямым спектральным разложеним по найденным собственным состояниям (6.112), (6.113), (6.105), либо в виде (6.114), (6.115), что согласуется с результатами работ [19], [20] и [24]. С математической точки зрения оно является операторной реализацией краевой задачи на полуоси, со спектральным параметром в граничном условии (6.71) для функции

$$u(r) = 4\pi r\varphi(\mathbf{x}), \quad u''(r) + zu(r) = 0, \quad u'(0) - g(z)u(0) = 0.$$

Необходимо отметить, что, в отличие от гильбертова случая (6.11), произвол рассмотренного здесь расширения в пространство Понтрягина определяется, вообще говоря, *двумя* эрмитовыми матрицами: $\mathbf{g} \Longrightarrow a_{lj}^{(m+n)}$ (6.76) и $\mathcal{K}^{-1}$ (6.51) [22]. Обе они являются источниками *независимых* произвольных параметров расширения. Однако, в то время как элементы эрмитовой матрицы $\mathcal{K}^{-1}$, *заменяющей* в гильбертовом случае унитарную матрицу $\mathcal{W}_n$ из (6.11) [14] (с тем же числом n^2 произвольных вещественных параметров), приобретают определенную физическую интерпретацию лишь "aposteriori", – в результате построения резольвенты расширенного оператора перенормированного гамильтониана, элементы матрицы $\mathbf{g}$ имеют непосредственный смысл, как фиксирующие свойства самого пространства расширения (6.28), уже в этом качестве проникая в параметры перенормированного гамильтониана. И тот и другой произвол были здесь учтены изначально в полной мере. В работе [25] был рассмотрен лишь наиболее простой случай с $\lambda_{lj}^{(m+n)} = 0$.

Как показано выше, в рамках рассмотренной здесь минимальной схемы с одной точкой вычитания, и без введения "внутренних" степеней свободы типа [176], любые другие расширения с конечными параметрами $\lambda_{lj}^{(m+n)}$ для исходного сингулярного возмущения (5.25) приводят к асимптотическому поведению T-матрицы вида (6.95). Только построенное здесь расширение (6.108)-(6.114) за счет нетривиальной редукции пространства Понтрягина приводит к более быстро падающей T-матрице (6.67), (6.96)[1]. Это асимптотическое поведение двухчастичной T-матрицы играет принципиальную роль при рассмотрении трехчастичной задачи в следующей главе, поскольку именно оно, в конечном счете, контролирует фредгольмовость уравнений Фаддеева [177], [178].

Последнее замечание касается вклада в (5.25) от взаимодействия с $l = 1$. Аналогично (6.48), оно связано с векторным функционалом Ξ,

[1]Ю.Г.Шондин (частное сообщение) для построения такого расширения предложил схему с введением двух точек нормировки при конечных значениях всех параметров.

$\langle \mathbf{k} \,|\, \Xi \rangle = \Xi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$. Соответствующие самосопряженные расширения оператора Лапласа с выходом в пространство Понтрягина рассмотрены в работе [25]. Однако, развитая в предыдущей главе переномировочная процедура с тонкой подстройкой зависимости от обрезания приводит к нулевой T-матрице с $l = 1$, выделяя, таким образом, единственное самосопряженное расширение в этом канале, – расширение по Фридрихсу [14]. Оно также будет воспроизведено при рассмотрении трехчастичной задачи в следующей главе.

Глава 7

Трехчастичные связанные состояния в 4-х фермионной модели.

В Главе 7 изучаются трехчастичные связанные состояния. Получены и проанализированы системы уравнений на волновые функции для различных значений "изотопспина" и "цвета". Обсуждается самосопряженное расширение гамильтониана в трехчастичном секторе. Получено асимптотическое решение уравнений Фаддеева в "Ефимовском" случае и проведено его сопоставление с соответствующим численным решением.

1 Трехчастичный сектор для QQQ-канала.

Начнем с наиболее симметричного случая связанных состояний трех одинаковых частиц $Q = \widetilde{A}, B, C, A$ с полным импульсом $\mathcal{P}$. Они определяются соответствующим уравнением Шредингера с гамильтонианом (4.17), (4.22), (4.23) $\widehat{H}|3,\mathcal{P}\rangle = M_3(\mathcal{P})|3,\mathcal{P}\rangle$, где:

$$|3,\mathcal{P}\rangle = \int d^3q_1 d^3q_2 d^3q_3 D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\mathbf{Q}^\dagger_\alpha(\mathbf{q}_1)\mathbf{Q}^\dagger_\beta(\mathbf{q}_2)\mathbf{Q}^\dagger_\gamma(\mathbf{q}_3)\;|0\rangle_Q, \quad (7.1)$$

$$D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \equiv \delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathcal{P})\,\mathcal{D}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big|_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=\mathcal{P}}$$
$$= -D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\gamma\beta}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2) = -D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\beta\alpha\gamma}(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3) = -D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\gamma\beta\alpha}(\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1). \quad (7.2)$$

$$D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\left[\sum_{i=1}^{3}E_Q(\mathbf{q}_i)-M_3(\mathcal{P})\right]= \tag{7.3}$$

$$=\int d^3k_1d^3k_2d^3k_3\,D^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3)\,\mathcal{H}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3),$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=\frac{\lambda}{2(2mc)^2(2\pi)^3}\,\delta(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{k}_i-\sum_{i=1}^{3}\mathbf{q}_i)\cdot \tag{7.4}$$

$$\cdot\left\{\sum_{1=n\neq j<l}^{3}\delta(\mathbf{k}_n-\mathbf{q}_n)\left[(2mc)^2-(\mathcal{P}-\mathbf{q}_n)^2+\left(\frac{\mathbf{k}_j-\mathbf{k}_l}{2}+\frac{\mathbf{q}_j-\mathbf{q}_l}{2}\right)^2\right]\right\}.$$

Здесь ядро (7.4), очевидно, автоматически воспроизводит все перестановочные симметрии и условие сохранения импульса. Поэтому, чтобы облегчить отделение спиновой структуры от координатной зависимости волновых функций при $\mathcal{P}\neq 0$, представляется весьма удобным использование формальных функций от трех "зависимых" переменных, типа $\mathcal{D}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)$ (7.2), с введением подходящих "формфакторов" (далее в этом параграфе $E(\mathbf{k})=E_Q(\mathbf{k})\equiv E_{\{+\}}(k)$):

$$\mathcal{K}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big|_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=\mathcal{P}}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{3}E(\mathbf{q}_i)-M_3(\mathcal{P})\right]\,\mathcal{D}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big|_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=\mathcal{P}}. \tag{7.5}$$

Поскольку условие сохранения импульса полностью симметрично по $\mathbf{q}_j$, спиновая структура $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ такая же как у D. В дальнейшем $\{\ldots\}$ означает симметризацию, а $[\ldots]$ означает антисимметризацию внутренних переменных или индексов. В соответствии с высокой степенью симметрии функции (7.5) имеется три типа волновых функций и соответствующих независимых "формфакторов" с определенной симметрией:

$$\mathcal{K}^{(\mathcal{P},1/2,\mathrm{m})}_{(X)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha\{\beta\gamma\}}X(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3])+$$

$$+\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma\{\alpha\beta\}}X(\mathbf{q}_3[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2])+\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\beta\{\gamma\alpha\}}X(\mathbf{q}_2[\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1])= \tag{7.6}$$

$$=\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha\{\beta\gamma\}}K^{(\mathcal{P})}_X(\{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\}\mathbf{q}_3)-\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma\{\alpha\beta\}}K^{(\mathcal{P})}_X(\{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\}\mathbf{q}_1);$$

$$K^{(\mathcal{P})}_X(\{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\}\mathbf{q}_3)\equiv X(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3])+X(\mathbf{q}_2[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3]);$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}^{(\mathcal{P},1/2,\mathrm{m})}_{(Y)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha[\beta\gamma]}Y(\mathbf{q}_1\{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\}) + \\
&+\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma[\alpha\beta]}Y(\mathbf{q}_3\{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\}) + \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\beta[\gamma\alpha]}Y(\mathbf{q}_2\{\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1\}) = \qquad (7.7)\\
&= \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha[\beta\gamma]}K^{(\mathcal{P})}_{Y}([\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2]\mathbf{q}_3) - \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma[\alpha\beta]}K^{(\mathcal{P})}_{Y}([\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3]\mathbf{q}_1),\\
&K^{(\mathcal{P})}_{Y}([\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2]\mathbf{q}_3) \equiv Y(\mathbf{q}_1\{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\}) - Y(\mathbf{q}_2\{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3\}),\\
&K^{(\mathcal{P})}_{X,Y}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) + (\text{cyclic permutations }(123)) = 0,\\
&\mathcal{K}^{(\mathcal{P},3/2,\mathrm{m})}_{(Z)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \Gamma^{3/2,\mathrm{m}}_{\{\alpha\beta\gamma\}}K^{(\mathcal{P})}_{Z}([\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3]). \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

Здесь использованы следующие свойства три-спин-волновых функций:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{1/2,1/2}_{\alpha\beta\gamma} = a\delta_{\alpha2}\delta_{\beta1}\delta_{\gamma1} + b\delta_{\alpha1}\delta_{\beta2}\delta_{\gamma1} + c\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\delta_{\gamma2}, \qquad a+b+c=0,\\
&\text{что дает:}\quad \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\beta\gamma\alpha} = 0, \qquad (7.9)\\
&\Gamma^{3/2,3/2}_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\delta_{\gamma1},\quad \Gamma^{3/2,1/2}_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \delta_{\alpha2}\delta_{\beta1}\delta_{\gamma1} + \delta_{\alpha1}\delta_{\beta2}\delta_{\gamma1} + \delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\delta_{\gamma2}.
\end{aligned}
$$

Чтобы заменить проекцию m на $-$m достаточно поменять местами индексы $1 \leftrightarrow 2$. В случае J=1/2 три-спин-волновые функции с определенной частичной симметрией являются также собственными функциями оператора спиновой перестановки: $\Sigma_{23} = +1$, (X), $b = c$, $a = -2c$, для симметричной функции $\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha\{\beta\gamma\}}$; $\Sigma_{23} = -1$, (Y), $b = -c$, $a = 0$, для антисимметричной функции $\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\alpha[\beta\gamma]}$. Все "формфакторы" подчиняются одному и тому же уравнению и отличаются только типом симметрии $S = X, Y, Z$:

$$
K^{(\mathcal{P})}_{S}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3\, \frac{K^{(\mathcal{P})}_{S}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3)}{\sum_{i=1}^{3} E(\mathbf{k}_i) - M_3(\mathcal{P})}\, \mathcal{H}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3). \tag{7.10}
$$

Полагая для каждого члена в ядре (7.4): $\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_l = 2\mathbf{s}$, $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l = \mathbf{r}_n$, находим при $\mathbf{r}_n = \mathcal{P} - \mathbf{q}_n$ общую структуру "формфакторов" в (7.10):

$$
\begin{aligned}
K^{(\mathcal{P})}_{S}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) &= \sum_{1=n\neq j<l}^{3}\left[Q_{Sn}(\mathbf{q}_n; \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l) + \mathbf{C}_{Sn}(\mathbf{q}_n)\cdot(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l)\right] = \qquad (7.11)\\
&= \sum_{1=n\neq j<l}^{3}\left[A_{Sn}(\mathbf{q}_n) + B_{Sn}(\mathbf{q}_n)(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l)^2 + \mathbf{C}_{Sn}(\mathbf{q}_n)\cdot(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l)\right],
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{Sn}(\mathbf{q}) \\ B_{Sn}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{C}_{Sn}(\mathbf{q}) \end{array}\right\} = \frac{\lambda}{2(2mc)^2}\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{K_S^{(\mathcal{P})}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3)}{E(\mathbf{k}_n)+E(\mathbf{k}_j)+E(\mathbf{k}_l)-M_3(\mathcal{P})}\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{array}{c} (2mc)^2+\mathbf{s}^2-(\mathcal{P}-\mathbf{q})^2 \\ 1/4 \\ \mathbf{s} \end{array}\right. ,\ \text{где, для } 1,2,3 = n\neq j\neq l,\quad j<l,$$

$$\text{имеем }\ \mathbf{k}_n=\mathbf{q},\quad \mathbf{k}_j=\frac{\mathcal{P}-\mathbf{q}}{2}+\mathbf{s}\equiv\boldsymbol{\kappa}_+,\quad \mathbf{k}_l=\frac{\mathcal{P}-\mathbf{q}}{2}-\mathbf{s}\equiv\boldsymbol{\kappa}_-. \qquad (7.12)$$

Система интегральных уравнений (7.11), (7.12) упрощается с учетом свойств симметрии функций $K_S^{(\mathcal{P})}$ (7.6), (7.7), (7.8) в терминах S- и P-волновых фадеевских амплитуд $Q_{Sn}(\mathbf{q};\mathbf{p})\equiv A_{Sn}(\mathbf{q})+\mathbf{p}^2B_{Sn}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{C}_{Sn}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{C}_{Z1}(\mathbf{q})=-\mathbf{C}_{Z2}(\mathbf{q})=\mathbf{C}_{Z3}(\mathbf{q})\equiv\mathbf{C}_Z(\mathbf{q});\quad Q_{Zn}(\mathbf{q};\mathbf{p})=0; \qquad (7.13)$$

$$K_Z^{(\mathcal{P})}([\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3])=\mathbf{C}_Z(\mathbf{q}_1)\cdot(\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)+(\text{cyclic permutations }(123));$$

$$Q_{X1}(\mathbf{q};\mathbf{p})=Q_{X2}(\mathbf{q};\mathbf{p})\equiv Q_X(\mathbf{q},\mathbf{p});\ \ Q_{X3}(\mathbf{q};\mathbf{p})=-2Q_X(\mathbf{q};\mathbf{p});$$

$$\mathbf{C}_{X1}(\mathbf{q})=\mathbf{C}_{X2}(\mathbf{q})\equiv\mathbf{C}_X(\mathbf{q});\ \ \mathbf{C}_{X3}(\mathbf{q})=0;\quad X(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3])=$$

$$=Q_X(\mathbf{q}_2;\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3)-Q_X(\mathbf{q}_3;\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)+\mathbf{C}_X(\mathbf{q}_1)\cdot(\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3); \qquad (7.14)$$

$$Q_{Y1}(\mathbf{q};\mathbf{p})=-Q_{Y2}(\mathbf{q};\mathbf{p})\equiv Q_Y(\mathbf{q};\mathbf{p});\quad Q_{Y3}(\mathbf{q};\mathbf{p})=0;$$

$$\mathbf{C}_{Y1}(\mathbf{q})=-\mathbf{C}_{Y2}(\mathbf{q})\equiv\mathbf{C}_Y(\mathbf{q});\ \ \mathbf{C}_{Y3}(\mathbf{q})=-2\mathbf{C}_Y(\mathbf{q});\quad Y(\mathbf{q}_1\{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\})=$$

$$=Q_Y(\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)+\mathbf{C}_Y(\mathbf{q}_2)\cdot(\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1)+\mathbf{C}_Y(\mathbf{q}_3)\cdot(\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1). \qquad (7.15)$$

Решая каждую из этих систем (7.12) совместно с (7.13), или с (7.14), или с (7.15), как неоднородную алгебраическую систему, где интегралы от неизвестных рассматриваются как свободные члены, приходим к следующим трем несвязанным системам однородных уравнений Фаддеева:

$$\mathbf{C}_Z(\mathbf{q})=\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{-2\mu_0\ \mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\mathbf{C}_Z(\boldsymbol{\kappa}_+)\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-); \qquad (7.16)$$

$$Q_X(\mathbf{q};2\mathbf{r})=\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{-\mu_0\,\mathcal{O}_{\{+\}}^{\mathcal{P}-q}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}_{\{+\}}^{\mathcal{P}-q}(\varrho)}\right]\cdot \qquad (7.17)$$

$$\cdot\{Q_X(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)-\mathbf{C}_X(\boldsymbol{\kappa}_+)\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$
$$\mathbf{C}_X(\mathbf{q})=\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{\mu_0\ \mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\cdot$$
$$\cdot\{\mathbf{C}_X(\boldsymbol{\kappa}_+)\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)+3Q_X(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$
$$Q_Y(\mathbf{q};2\mathbf{r})=\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{-\mu_0\,\mathcal{O}^{\mathcal{P}-q}_{\{+\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}-q}_{\{+\}}(\varrho)}\right]\cdot \tag{7.18}$$
$$\cdot\{Q_Y(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)+3\mathbf{C}_Y(\boldsymbol{\kappa}_+)\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\}.$$
$$\mathbf{C}_Y(\mathbf{q})=\int\frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{\mu_0\ \mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\cdot$$
$$\cdot\{\mathbf{C}_Y(\boldsymbol{\kappa}_+)\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)-Q_Y(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

Здесь: $\mathcal{O}^{\mathcal{P}-q}_{\{\pm\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})\equiv\gamma\ll[k^2]\gg+Z^{\mathcal{P}-q}_{\{\pm\}}-(2-\gamma)\varrho^2+$

$$+(1-\gamma)(s^2+\varrho^2+r^2+\varrho^2)+\mathcal{J}_0(\varrho)(s^2+\varrho^2)(r^2+\varrho^2); \tag{7.19}$$
$$\varrho^2=\varrho^2(q)\equiv\frac{3}{4}q^2+\frac{\mathcal{P}^2}{4}-\frac{(\mathbf{q}\mathcal{P})}{2}+\omega^2(\mathcal{P});\ \ \omega^2(\mathcal{P})=\mathcal{M}_0(3E_0-M_3(\mathcal{P}));$$
$$E(\mathbf{q})+E(\boldsymbol{\kappa}_+)+E(\boldsymbol{\kappa}_-)-M_3(\mathcal{P})\equiv\left(s^2+\varrho^2(q)\right)/\mathcal{M}_0, \tag{7.20}$$

При конечном Λ в выражениях в квадратных скобках в ядрах этих уравнений нетрудно узнать off-shell-варианты (6.63) соответствующих двухчастичных S- и P-волновых half-off-shell T-матриц (5.40), (5.44). Причем, перенормированные версии этих off-shell T-матриц даются правыми частями равенств (5.44) и (5.40), (6.67), (6.96). Поэтому, при $\Lambda\to\infty$ приходим и к восстановлению Галилеевской инвариантности, как в двухчастичном случае, и к дальнейшим упрощениям в этих системах: $\mathbf{C}_{X,Y,Z}=B_{X,Y}=0$. В итоге все они сводятся к одному уравнению на единственную функцию одной переменной. Она в принципе определяет координатную волновую функцию связанного состояния с "изоспином" 1/2 для трех одинаковых частиц независимо от типа его спиновой симметрии:

$$X(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3])=A(\mathbf{q}_2)-A(\mathbf{q}_3),\quad Y(\mathbf{q}_1\{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\})=A(\mathbf{q}_1),\quad \varsigma=-1,$$
$$Q_X(\mathbf{q};2\mathbf{r})\Longrightarrow Q_Y(\mathbf{q};2\mathbf{r})\Longrightarrow A(\mathbf{q})=T(\varrho(q))\,\frac{\varsigma}{2\pi^2}\int d^3s\,\frac{A(\boldsymbol{\kappa}_+)}{(s^2+\varrho^2(q))}, \tag{7.21}$$

$$T(\varrho)=\lim_{\Lambda\to\infty}\left(-2\pi^2\right)\hat{t}(-\varrho^2)=\frac{\Upsilon}{(\varrho-b)(\varrho+b+\Upsilon)}\overset{(\varrho\to\infty)}{\longmapsto}\frac{\Upsilon}{\varrho^2}. \tag{7.22}$$

Тем не менее, в соответствии с обсуждением в главе 5, такое трехчастичное связанное состояние для A-системы непреемлемо по физическим соображениям, так как соответствующие ему условия тонкой подстройки в двухчастичном секторе допускают конечный одночастичный спектр только для одного типа фермионов.

2 Трехчастичный сектор для $\widetilde{A}AA$-канала.

Наиболее перспективным представляется случай $\widetilde{A}AA$ ($A\widetilde{A}\widetilde{A}$). Несмотря на более бедную спиновую симметрию, он, однако, на самом деле полностью аналогичен предыдущему случаю. Поэтому остановимся лишь на основных моментах. Определяя волновую функцию связанного состояния и соответствующий "формфактор" аналогично (7.1), (7.5):

$$\begin{aligned}
&|\tilde{3},\mathcal{P}\rangle=\int d^3q_1d^3q_2d^3q_3\widetilde{D}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\epsilon_{\alpha\lambda}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{q}_1)\mathbf{A}^{\dagger}_{\beta}(\mathbf{q}_2)\mathbf{A}^{\dagger}_{\gamma}(\mathbf{q}_3)\;|0\rangle,\\
&\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big|_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=\mathcal{P}}= \qquad\qquad (7.23)\\
&=\left[\widetilde{E}_{\widetilde{A}}(\mathbf{q}_1)+\widetilde{E}_A(\mathbf{q}_2)+\widetilde{E}_A(\mathbf{q}_3)-\widetilde{M}_3(\mathcal{P})\right]\;\widetilde{\mathcal{D}}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big|_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=\mathcal{P}},
\end{aligned}$$

при $\widetilde{E}(k)\equiv E_{\{-\}}(k)$, взятых из (5.21), (5.22), и используя все имеющиеся здесь симметрии:

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=-\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{m})}_{\alpha\gamma\beta}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2), \tag{7.24}$$

в обозначениях (7.9), вместо (7.6), (7.7), (7.8), снова приходим к трем независимым "формфакторам", но с более низкой симметрией:

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},1/2,\mathrm{m})}_{(X)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\beta\{\gamma\alpha\}}\overline{K}^{(\mathcal{P})}_X(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)-\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma\{\alpha\beta\}}\overline{K}^{(\mathcal{P})}_X(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2), \tag{7.25}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},1/2,\mathrm{m})}_{(Y)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\beta[\gamma\alpha]}\overline{K}^{(\mathcal{P})}_Y(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)-\Gamma^{1/2,\mathrm{m}}_{\gamma[\beta\alpha]}\overline{K}^{(\mathcal{P})}_Y(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2), \tag{7.26}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(\mathcal{P},3/2,\mathrm{m})}_{(Z)\alpha\beta\gamma}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)=\Gamma^{3/2,\mathrm{m}}_{\{\alpha\beta\gamma\}}\overline{K}^{(\mathcal{P})}_Z(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3]). \tag{7.27}$$

Вновь все $\overline{K}_S$, $S = X, Y, Z$ подчиняются одному и тому же уравнению (7.10) с очевидными заменами в ядре (7.4) и в знаменателе (см. (7.23)) и обнаруживают такую же общую структуру (7.11):

$$\overline{K}_X^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \propto \overline{K}_Y^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \overline{K}^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3). \tag{7.28}$$

$$\overline{K}_S^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \sum_{1=n\neq j<l}^{3} \left[\overline{Q}_{Sn}(\mathbf{q}_n; \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l) + \overline{\mathbf{C}}_{Sn}(\mathbf{q}_n)\cdot(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_l)\right],$$

$$\overline{Q}_{Z2}(\mathbf{q};\mathbf{p}) = -\overline{Q}_{Z3}(\mathbf{q};\mathbf{p}), \quad \overline{\mathbf{C}}_{Z2}(\mathbf{q}) = -\overline{\mathbf{C}}_{Z3}(\mathbf{q}), \quad \overline{Q}_{Z1}(\mathbf{q};\mathbf{p}) = 0. \tag{7.29}$$

Повторяя для них преобразования предыдущего параграфа, приходим, в отличие от него, к связанной системе однородных интегральных уравнений Фаддеева для амплитуд $\overline{\mathbf{C}}_n(\mathbf{q})$ и $\overline{Q}_n(\mathbf{q};\mathbf{p})$ функций $\overline{K}_S^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)$ (7.28) с любым S:

$$\overline{Q}_1(\mathbf{q};2\mathbf{r}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{\gamma V^*\mathcal{O}^{\mathcal{P}-q}_{\{+\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}-q}_{\{+\}}(\varrho)}\right]\cdot \tag{7.30}$$
$$\cdot\{\overline{Q}_2(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_3(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \left[\overline{\mathbf{C}}_2(\boldsymbol{\kappa}_+) + \overline{\mathbf{C}}_3(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

$$\overline{\mathbf{C}}_1(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{\gamma V^*\mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\cdot$$
$$\cdot\{\left[\overline{\mathbf{C}}_2(\boldsymbol{\kappa}_+) - \overline{\mathbf{C}}_3(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_2(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) - \overline{Q}_3(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

$$\overline{Q}_2(\mathbf{q};2\mathbf{r}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{V^*\mathcal{O}^{\mathcal{P}-q}_{\{-\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}-q}_{\{-\}}(\varrho)}\right]\cdot \tag{7.31}$$
$$\cdot\{\overline{Q}_1(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_3(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \left[\overline{\mathbf{C}}_1(\boldsymbol{\kappa}_+) - \overline{\mathbf{C}}_3(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

$$\overline{\mathbf{C}}_2(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{V^*\mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\cdot$$
$$\cdot\{\left[\overline{\mathbf{C}}_1(\boldsymbol{\kappa}_+) + \overline{\mathbf{C}}_3(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_1(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) - \overline{Q}_3(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

$$\overline{Q}_3(\mathbf{q};2\mathbf{r}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{V^*\mathcal{O}^{\mathcal{P}-q}_{\{-\}}(\varrho;\mathbf{s},\mathbf{r})}{\mathcal{D}^{\mathcal{P}-q}_{\{-\}}(\varrho)}\right]\cdot \tag{7.32}$$
$$\cdot\{\overline{Q}_1(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_2(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) - \left[\overline{\mathbf{C}}_1(\boldsymbol{\kappa}_+) + \overline{\mathbf{C}}_2(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\};$$

$$\overline{\mathbf{C}}_3(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3s}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{(s^2+\varrho^2)}\left[\frac{V^*\mathbf{s}}{1-\frac{2}{3}\mathcal{J}_1(\varrho)}\right]\cdot$$
$$\cdot\{\left[\overline{\mathbf{C}}_2(\boldsymbol{\kappa}_+) - \overline{\mathbf{C}}_1(\boldsymbol{\kappa}_+)\right]\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) + \overline{Q}_1(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-) - \overline{Q}_2(\boldsymbol{\kappa}_+;\mathbf{q}-\boldsymbol{\kappa}_-)\}.$$

Здесь в знаменателях, с учетом замены в определениях (5.41), (7.19) "обратного пропагатора" (7.20) на его аналог из (7.23), опущены слагаемые вида $(\mathcal{P}-\mathbf{q},\mathbf{s})/m$, исчезающие при $\Lambda \to \infty$, что, в конечном счете, выливаетя в замену в функции $\varrho^2(q)$ (7.19) величины:

$$\omega^2(\mathcal{P}) \to \tilde{\omega}^2(\mathcal{P}) = \widetilde{\mathcal{M}}_0(\widetilde{E}_{\widetilde{A}0} + 2\widetilde{E}_{A0} - \widetilde{M}_3(\mathcal{P})). \tag{7.33}$$

Принимая во внимание условия (5.21), (5.43), при $\Lambda \to \infty$ получаем ненулевой предел вида (7.22) для перенормированных S-волновых ядер в первых уравнениях (7.31), (7.32). В тоже время, для ядра первого из уравнений (7.30), также как и для всех P-волновых ядер здесь и в предыдущем параграфе, предел при этих условиях (конечности обоих однофермионных спектров) равен нулю в соответствии с замечаниями после формулы (5.52). Тогда: $\overline{\mathbf{C}}_{1,2,3}(\mathbf{q}) = \overline{Q}_1(\mathbf{q};\mathbf{p}) = 0$, и уравнения (7.31), (7.32), аналогично (7.21), вырождаются в систему двух уравнений для двух функций одной переменной:

$$\overline{Q}_{2,3}(\mathbf{q};2\mathbf{r})) \Longrightarrow \overline{A}_{2,3}(\mathbf{q}),\;\; \overline{K}^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) = \left(\overline{A}_2(\mathbf{q}_2) + \overline{A}_3(\mathbf{q}_3)\right), \tag{7.34}$$
$$\text{которая означает, что:}\;\; \varsigma\overline{A}_3(\mathbf{q}) = \overline{A}_2(\mathbf{q}) = \overline{A}(\mathbf{q}),$$

что по существу возвращает нас к предыдущему уравнению (7.21) для $A(\mathbf{q}) \to \overline{A}(\mathbf{q})$, но с $\varsigma = \pm 1$.

Полученное уравнение с точностью до множителя $\varsigma/2$ совпадает с уравнением, полученным Шондиным [19] в трехбозоннном случае. Как показано в работах [19], [177], [178], асимптотическое поведение (7.22) гарантирует, что мы имеем дело с самосопряженным полуограниченным снизу трехчастичным гамильтонианом при обоих значенях ς. В тоже время, гамильтониан, отвечающий любым другим расширениям в двухчастичном секторе с асимптотикой (6.95), приводит к "коллапсу" в рассматриваемой трехчастичной системе.

При $\mathcal{P} = 0$ отсутствие иных векторных параметров предполагает, что для волновых функций с нулевым полным трехчастичным угловым моментом $\overline{A}(\mathbf{q}) \longrightarrow \mathcal{A}(q)$ [183]. Тогда уравнение (7.21) сводится к следующему:

$$q\,\mathcal{A}(q) = T(\varrho(q))\frac{\varsigma}{\pi}\int_0^\infty dk\,k\,\mathcal{A}(k)\ln\left(\frac{k^2+q^2+kq+\omega^2}{k^2+q^2-kq+\omega^2}\right). \tag{7.35}$$

Проведенный в следующем параграфе анализ показывает, что при достаточно общих условиях интегральный оператор в (7.35) эквивалентен симметричному вполне непрерывному и положительно определеному оператору. Следовательно, он может обладать нетривиальными собственными решениями только при $\varsigma\Upsilon > 0$. Мы приходим, таким образом, к следующим двум возможным вариантам трехчастичных связанных состояний типа $\widetilde{A}AA$ $(A\widetilde{A}\widetilde{A})$:

(I) При $\Upsilon > 0$, $\varsigma = 1$, имеем только состояния с J=1/2, с симметричными волновыми функциями (7.23), (7.25), (7.26), (7.27), где

$$\overline{K}_X^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \propto \overline{K}_Y^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \propto \left(\overline{A}(\mathbf{q}_2)+\overline{A}(\mathbf{q}_3)\right), \quad \overline{K}_Z^{(\mathcal{P})} = 0. \tag{7.36}$$

(II) При $\Upsilon < 0$, $\varsigma = -1$, возможны оба значения изоспина с J=$1/2, 3/2$, с антисимметричными волновыми функциями (7.23), (7.25), (7.26), (7.27), в которых теперь

$$\overline{K}_X^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \propto \overline{K}_Y^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3) \propto \overline{K}_Z^{(\mathcal{P})}(\mathbf{q}_1[\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3]) \propto \left(\overline{A}(\mathbf{q}_2)-\overline{A}(\mathbf{q}_3)\right). \tag{7.37}$$

При $b = 0$ возможен только вариант (I).

3 Решение уравнений Фаддеева для связанных состояний с нулевым полным угловым моментом.

Используя гиперболическую подстановку с естественным нечетным продолжением на всю ось q для функции $(\mathcal{P}=0)$

$$\frac{q\mathcal{A}(q)}{T(\varrho(q))} = \varphi(\vartheta) = -\varphi(-\vartheta); \quad q = \frac{2\omega}{\sqrt{3}} \sinh\vartheta; \tag{7.38}$$
$$\varrho(q) = \sqrt{\frac{3}{4}q^2+\omega^2} = \omega\,\cosh\vartheta; \quad k = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\sinh\tau; \quad \varrho(k) = \omega\,\cosh\tau,$$

уравнение (7.35) можно привести к следующему удобному виду:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{2\varsigma\wp}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, W(\cosh\tau)\,\varphi(\tau)\,\ln\left(\frac{2\cosh(\tau-\vartheta)+1}{2\cosh(\tau-\vartheta)-1}\right);$$
$$W(\cosh\tau) = \frac{\omega}{\wp}\cosh\tau\, T\left(\omega\,\cosh\tau\right). \tag{7.39}$$

Здесь $W(\cosh\tau)$ четная функция τ, а константа $\wp$ введена для дальнейшего удобства. Заметим, что последнее ядро имеет дополнительный набор собственных функций противоположной (положительной) четности.

Согласно общим ограничениям из двух- и трех- частичной задачи рассеяния [184]-[186] существование трехчастичного связанного состояния ω, при наличии двухчастичного связанного состояния с $\varrho = b$, подразумевает, что $\omega > b \geq 0$. Тогда, из (7.22), при $\Upsilon + 2b > 0$, следует, что $T(\varrho(q))$ конечна при всех q и достаточно быстро стремится к нулю с $\varrho \to \infty$, чтобы имела смысл следующая подстановка:

$$\vartheta = \vartheta(\eta), \quad \tau = \tau(\sigma), \quad \varphi(\vartheta) = f(\eta) = -f(-\eta); \quad \infty > \chi > 0; \tag{7.40}$$
$$\sigma(\tau) = -\sigma(-\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} dv\, W(\cosh v) - \chi; \qquad 2\chi \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\, W(\cosh v).$$

Ясно, что она имеет смысл и для любой функции $T(\varrho(q))$ с указанными свойствами и превращает (7.39) в уравнение с симметричным вполне непрерывным ядром:

$$f(\eta) = \frac{2\varsigma\wp}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\chi}^{\chi} d\sigma\, f(\sigma)\, \ln\left[\frac{2\cosh\left(\tau(\sigma) - \vartheta(\eta)\right) + 1}{2\cosh\left(\tau(\sigma) - \vartheta(\eta)\right) - 1}\right] \equiv \frac{2\varsigma\wp}{\pi\sqrt{3}} \left(\widehat{O} f\right)(\eta). \tag{7.41}$$

При обычном определении скалярного произведения в $L^2(-\chi, \chi)$, для любой функции $f(\eta) \in L^2(-\chi, \chi)$, используя преобразование Фурье, можно получить:

$$\left(\widehat{O} f, f\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, |\mathcal{F}(\varepsilon)|^2\, \frac{\sinh(\pi\varepsilon/6)}{\varepsilon\cosh(\pi\varepsilon/2)} > 0; \tag{7.42}$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\varepsilon\tau}\, W(\cosh\tau)\, \varphi(\tau) \equiv \int_{-\chi}^{\chi} d\sigma\, f(\sigma)\, e^{i\varepsilon\tau(\sigma)}.$$

Следовательно, все отличные от нуля собственные значения o_N оператора $\widehat{O}$ положительны, а их сумма равна его следу [172]:

$$\sum_N o_N = 2\chi \ln 3, \quad o_N > 0. \tag{7.43}$$

Константу $\wp$ можно всегда подобрать так чтобы выполнялись условия в (7.40). Явные выражения для замены (7.40) в нашем случае имеют вид:

$$\sigma(\tau) = \chi \left\{ \frac{\coth\lambda \ln\left(\dfrac{\cosh[(\tau+\lambda)/2]}{\cosh[(\tau-\lambda)/2]}\right) - \coth\gamma \ln\left(\dfrac{\cosh[(\tau+\gamma)/2]}{\cosh[(\tau-\gamma)/2]}\right)}{\lambda\coth\lambda - \gamma\coth\gamma} \right\}, \tag{7.44}$$

$$\chi = \left(\frac{\cosh\lambda + \cosh\gamma}{\cosh\lambda - \cosh\gamma}\right)\left[\frac{\lambda\coth\lambda - \gamma\coth\gamma}{\wp}\right], \text{ где } \lambda, \gamma, \text{ таковы, что:} \tag{7.45}$$

$$\cosh\lambda + \cosh\gamma = \frac{\Upsilon}{\omega},\ \cosh\lambda - \cosh\gamma = \pm\frac{\Upsilon + 2b}{\omega},\ \text{т.е. } \cosh\begin{Bmatrix}\lambda \\ \gamma\end{Bmatrix} = -\frac{\mathrm{b}_\pm}{\omega},$$

и могут выбираться так, что либо:

$$Re\{\lambda, \gamma\} \ge 0,\ |Im\{\lambda, \gamma\}| \le \pi,\ \text{и } Im\,\gamma = -Im\,\lambda,\ \text{если } Re\{\lambda, \gamma\} \ne 0, \tag{7.46}$$

$$\text{либо: } 0 \le Im\{\lambda, \gamma\} \le \pi, \quad \text{и} \quad Re\,\gamma = -Re\,\lambda, \quad \text{если} \quad Im\{\lambda, \gamma\} \ne 0, \pi.$$

При $b = 0$, $\Upsilon > 0$ получаем простые явные выражения для обеих функций $\sigma(\tau)$ и $\tau(\sigma)$, если $\omega \cosh\chi = \Upsilon$, $\wp = \coth\chi$, т.е. $\lambda = \chi$ и $\gamma = \pm\, i\pi/2$:

$$e^{\sigma(\tau)} = \frac{\cosh\left[(\chi+\tau)/2\right]}{\cosh\left[(\chi-\tau)/2\right]}, \qquad e^{\tau(\sigma)} = \frac{\sinh\left[(\chi+\sigma)/2\right]}{\sinh\left[(\chi-\sigma)/2\right]}, \tag{7.47}$$

и аналогично для $\eta(\vartheta)$ и $\vartheta(\eta)$. Они позволяют непосредственно применить метод работ [184], [186] к уравнению (7.41), когда $\omega \to 0$, $\chi \to \infty$. В этом случае $\cosh(\tau - \vartheta) \simeq \cosh(\sigma - \eta)$, и поиск коэффициентов Фурье разложения a_m точного решения

$$f(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, e^{i\pi m\eta/\chi}, \quad a_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}^{\chi}_{mn}\, a_n, \tag{7.48}$$

$$\mathcal{C}^{\chi}_{mn} = \frac{2\varsigma\wp}{\pi\sqrt{3}}\,\frac{1}{2\chi}\left(\widehat{O}e^{i\pi n\sigma/\chi}, e^{i\pi m\eta/\chi}\right),$$ приводит к соотношению:

$$1 \simeq \frac{4\varsigma}{\sqrt{3}}\,\frac{\sinh(\pi\varepsilon/6)}{\varepsilon\cosh(\pi\varepsilon/2)}, \;\; \text{где,} \;\; \varepsilon \equiv \frac{2\pi m}{2\chi}. \tag{7.49}$$

Оно выполняется при $\varepsilon = \varepsilon_0 \simeq 0.4137$ только для $\varsigma = 1$ и дает асимптотическое распределение уровней Ефимова и асимптотический вид соответствующих им нечетных решений:

$$\omega_{2k} = \frac{\Upsilon}{\cosh\chi_k} \simeq 2\Upsilon\exp\left\{-\frac{\pi k}{\varepsilon_0}\right\}, \;\; f_{2k}(\eta) \simeq N_{2k}\sin(\varepsilon_0\eta), \;\; -\chi_k \le \eta \le \chi_k. \tag{7.50}$$

Численное решение уравнения (7.41) обнаруживает, что для интересующих нас нечетных решений $f_{2k}(\eta)$, отвечающих целым $k > 0$, этот асимптотический режим фактически стартует с основного состояния $k = 1$. Точнее: для $k = 1, 2, 3, 4, 5$, (7.50) имеет место при $\chi_k \simeq (k+\delta)\pi/\varepsilon_0$, где $\delta \simeq 0.06006$ (Рис.7.1). Решение производилось путем $M = 16, 24, 64$-точечной гауссовской аппроксимации интеграла в (7.41) на каждом из $N = 6 \div 10$ равных интервалов разбиения, с последующим решением получившейся $M \times N$ однородной системы линейных алгебраических уравнений, при наличии графического и численного контроля (Рис.7.2) как

ω_{2k}
0.00063816
0.00000032
$1.61776303 \cdot 10^{-10}$
$8.14556415 \cdot 10^{-14}$
$4.10130018 \cdot 10^{-17}$

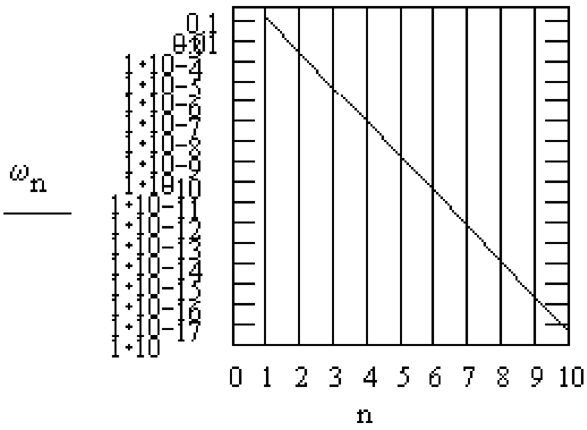

Рис. 7.1. Численные значения уровней энергии ω_{2k} и график ω_n в единицах Υ

за видом собственных решений (7.50) так и за их Фурье-разложениями $f_{2k}(\chi_k y) \simeq \sum_{n=0}^{4k} (A_n \cos(\pi n y) + B_n \sin(\pi n y))$, в которых величина остальных коэффициентов $|B_{n\neq k}|$ не превысила δ, а $|A_n| \leq 10^{-14}$.

4 Выводы.

Таким образом, для образования трехчастичных связанных состояний в $\widetilde{A}AA$-канале достаточно наличия ненулевой Т-матрицы только в двухчастичном $\widetilde{A}A$-канале, что отвечает условию тонкой подстройки $\nu_0 = 3/5$. Если сопоставить фермионы A_α и $\widetilde{A}_\alpha$ соответственно u, d и $\overline{u}, \overline{d}$ "кваркам" с конституентной массой [156] $M_N/3 \sim m_{\rho,\omega}/2 \simeq \widetilde{\mathcal{M}}_0 = 385$ MeV, то из (5.8) для массы соответствующего Голдстоуновского бозона получаем значение $m_G = (2/5)\widetilde{\mathcal{M}}_0 = 154$ MeV, близкое к массе пи-мезона $m_\pi = 140$ Mev. В тоже время, "бесспиновые ρ и $\omega-$ мезоны" являются ближайшими двухчастичными связанными состояниями с подходящими квантовыми числами, в частности, нулевым орбитальным моментом $l = 0$ и J=1,0 [187], [188], и их масса $m_{\rho,\omega} \simeq 2\widetilde{\mathcal{M}}_0$ фиксирует параметр b: $\Upsilon \gg b \simeq 0$. Параметр Υ можно теперь зафиксировать, сопоставляя массе основного состояния $k = 1$ (7.50) массу "нуклона" M_N. Решения с $k > 1$ качественно отвечают тогда "нуклонным P_{11}-резонансам" с нулевым полным угловым моментом [189]. Заметим, что в этой упрощенной модели они построены не из трех кварков, а из двух "кварков" и "антикварка".

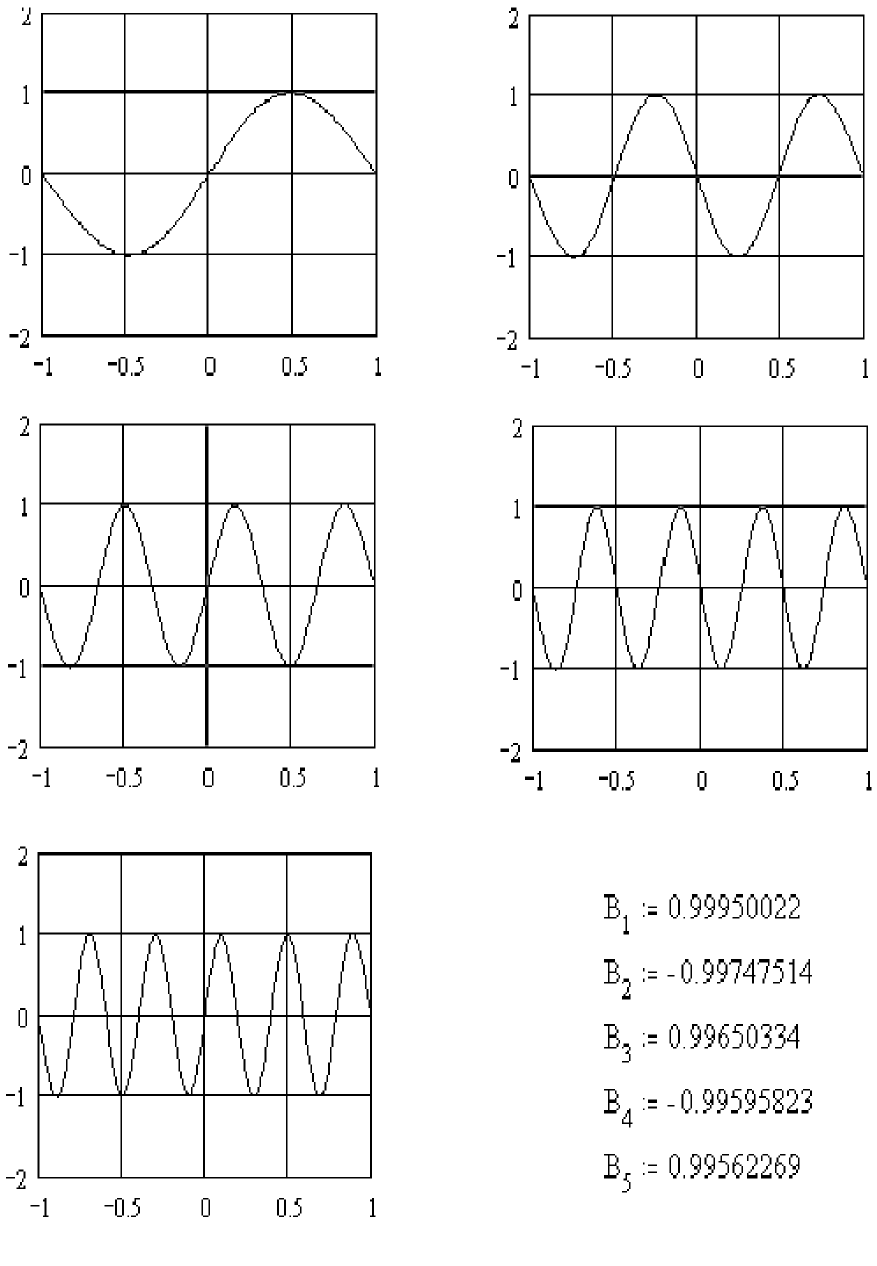

Рис. 7.2. Решения с $k = 1, 2, 3, 4, 5$ и их Фурье-коэффициенты B_k.

Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- Найдены явные выражения для первых коэффициентных функций динамического отображения гейзенберговских полей на шредингеровские поля как в нерелятивистской N-Тэта модели, так и в неперенормируемой модели четырехфермионного контактного взаимодействия. Установлена связь этих коэффициентных функций с волновыми функциями рассеяния и связанных состояний.

- Проведено сравнение динамических отображений, отвечающих различным начальным условиям, и показана унитарная эквивалентность представлений канонических коммутационных соотношений на шредингеровских и "in"-полях в отсутствии в Гамильтониане флуктуационных членов.

- Обнаружено, что для некоторых моделей типа Ли и релятивистских моделей 4-х фермионного взаимодействия в (3+1)D динамическое отображение на шредингеровские поля позволяет полностью линеаризовать уравнения Гейзенберга и получить замкнутое выражение для гейзенберговского поля как функционала от физических полей, аналогичное решениям 2D моделей Тирринга и Швингера. Такая линеаризация является проявлением согласованности способа квантования с динамикой системы, что проявляется, в том числе, в возможной диагонализуемости гамильтониана на выбранных физических полях.

- Для таких линеаризуемых, в том числе, релятивистских моделей получены выражения для динамического отображения и его коэффициентных функций в виде функциональных интегралов по фазовому пространству и развиты методы их вычисления. Наконец, для одной нерелятивистской модели и двух типов релятивистских моделей в таком виде получены выражения непосредственно для нормальных символов гейзенберговских операторов, т.е. решена задача приведения их к нормальной форме.

- Для нерелятивистского "неперенормируемого" четырехфермионного взаимодействия сформулировалирована процедура перенормировки путем "тонкой подстройки" зависимости от обрезания затравочных масс и констант связи, которая является самосогласованной в каждом N-частичном секторе и тесно связана с восстановлением галилеевской инвариантности.

- Показано, что соответствующий этой процедуре перенормировки механизм размерной трансмутации естественно формулируется на языке теории расширений соответствующего сингулярного квантовомеханического гамильтониана в двухчвстичном секторе.

- Получены точные решения для Голдстоуновских состояний, а также для волновых функций и T-матриц всех двухчастичных состояний и найдена конкретная реализация соответствующего самосопряженного расширения с выходом в пространство Понтрягина.

- Обнаружено, что в теории расширений Голдстоуновское решение трансформируется в "дефектную компоненту" обычного решения.

- Найдены три унитарно-неэквивалентных операторных реализации нерелятивистского четырехфермионного Гамильтониана ток $\otimes$ ток, в которых задача на собственные состояния может быть изучена и решена точно.

- Показано, что спонтанное нарушение симметрии и существование соответствующих голдстоуновских мод являются неотьемлемыми свойствами четырехфермионного взаимодествия ток $\otimes$ ток при наличии векторного тока с достаточно широкой симметрией. Наконец, что сами голдстоуновские моды являются проявлением нетривиальной структуры гильбертова пространства состояний полного гамильтониана, вскрываемой лишь при выходе в более широкие пространства (Понтрягина) с индефинитной метрикой.

- На этой точно решаемой модели удалось проследить непосредственный предельный переход различных совокупностей унитарно неэквивалентных гильбертовых пространств когерентных состояний "кварковых пар" в пространства когерентных состояний различных "адронов", и соответствующий ему переход от унитарно неэквивалентных представлений КАС к представлениям ККС.

- Показано, что в рассматриваемой модели трехчастичные связанные состояния возможны только в операторной реализации (в фазе) со спонтанным нарушением симметрии, для частиц различных типов и только с определенными типами спиновой симметрии волновой функции.

- Проведеный численный анализ полученных трехчастичных уравнений показал что в "Ефимовском случае" асимптотический режим начинается фактически с основного (трехчастичного) состояния.

Для развиваемого подхода характерны следующими моменты:

- Использование шредингеровских полей в качестве физических соответствует постановке операторных начальных условий уравнениям

Гейзенберга в отличие от неоператорных условий при использовании в качестве физических асимптотических $in - out$ полей. Соответствующее динамическое отображение непосредственно связано с задачей на собственные значения и отвечает операторной диагонализации гамильтониана в отличие от его диагонализации в слабом смысле на in-полях.

- В отличии от большинства подходов к проблеме связанных состояний, основанных на исследовании решений уравнений Бете-Солпитера и Швингера-Дайсона, здесь решается задача (частичной) диагонализации полного Гамильтониана путем непосредсвенного постороения его собственных состояний методом динамических отображений. Генераторы преобразований выбираются из физических соображений так, чтобы получающийся вакуум соответсвовал конденсации фермионных пар с нужными квантовыми числами, а двухчастичная задача допускала точное решение, по крайней мере, в нерелятивистском пределе. Эти соображения заимствованы из моделей БКШ и НЙЛ.

- Математической формулировкой механизма размерной трансмутации [103], отвечающего перенормировочной процедуре для "неперенормируемых", но операторно диагонализуемых полевых гамильтонианов является метод построения самосопряженных расширений соответствующих квантовомеанических гамильтонианов в каждом N-частичном секторе. Причем, фиксация расширения в низших (одно-, двух-частичных) секторах полностью определяет переномировку в высших (трех- и более частичных) секторах.

- Простая регуляризация обрезанием совместно с естественной вычитательной процедурой, при наличии "тонкой подстройки" зависимости от обрезания затравочных масс и констант связи в пределе снятия обрезания выделяет из всего многообразия самосопряженных расширений единственное расширение сразу во всех N-частичных секторах. Для перенормируемой модели Ли это было впервые показано Ф.А.Березиным [15].

Благодарности.

Автор глубоко признателен проф. А.А. Андрианову за обсуждение различных проблем теории четырехфермионных взаимодействий и тонкостей квантовой теории поля, проф. В.Л. Черняку за многочисленные коструктивные критические замечания, касающиеся физки сильных взаимодействий, др. ф-м. наук Ю.Г. Шондину за ценные консультации по теории расширений, проф. В.Б. Беляеву и проф. В. Сандхасу за важные замечания по трехчастичной задаче. Приятно поблагодарить коллег А.Е. Калошина и В.А. Наумова за многочисленные дискуссии и соавторов: В.М. Левианта, Д.В. Наумова, А.В. Синицкую и А.Б. Танаева за длительное и тесное сотудничество. Однако, эта работа никогда не была бы начата и, тем более, завершена без плодотворного сотрудничества, заинтересованного внимания и постоянной поддержки основного соавтора всех публикаций и ее консультанта, профессора А.Н. Валла, которому автор выражает искреннюю благодарность.

Приложения

А Коэффициентные функции динамического отображения.

Запишем уравнение (2.25) в виде:

$$F^{(1)}\Big(t;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{q}\Big|\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{q}\Big)=\int\limits_0^t\frac{d\eta\,e^{i\eta[E_2(\mathcal{P},q)-E_2(\mathcal{P},\kappa)]}}{(-2i)(2\pi)^3}\Big\{\big[Z+\mu(\mathbf{q}+\boldsymbol{\kappa})^2\big]+$$

$$+\int d^3r e^{i\eta[E_2(\mathcal{P},\kappa)-E_2(\mathcal{P},r)]}\left[Z+\mu(\mathbf{q}+\mathbf{r})^2\right]F^{(1)}\Big(\eta;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{r}\Big|\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}\Big)\Big\}.$$

Замечая, что его правая часть имеет вид: $(Z\equiv\lambda-\mu\mathcal{P}^2)$,

$$=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int\limits_0^t d\eta\,e^{i\eta E_2(\mathcal{P},q)}\left\{\mathcal{F}_1^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)+q^2\,\mathcal{F}_2^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)+\big(\mathbf{q}\cdot\mathcal{F}_3^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)\big)\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{c}\mathcal{F}_1^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)\\ \mathcal{F}_2^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)\\ \mathcal{F}_3^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)\end{array}\right\}-e^{-i\eta E_2(\mathcal{P},\kappa)}\left\{\begin{array}{c}Z+\mu\kappa^2\\ \mu\\ 2\mu\boldsymbol{\kappa}\end{array}\right\}=\int d^3r\,e^{-i\eta E_2(\mathcal{P},r)}\left\{\begin{array}{c}Z+\mu r^2\\ \mu\\ 2\mu\mathbf{r}\end{array}\right\}\cdot$$

$$\cdot F^{(1)}\Big(\eta;\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{r}\Big|\frac{\mathcal{P}}{2}-\boldsymbol{\kappa},\frac{\mathcal{P}}{2}-\mathbf{r}\Big),$$

запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\mathcal{F}_1^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)=e^{-i\eta E_2(\mathcal{P},\kappa)}(Z+\mu\kappa^2)+\int\limits_0^\eta d\tau\Big\{\left[Z\mathcal{K}_0^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)+\mu\mathcal{K}_1^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\right]\mathcal{F}_1^{\mathcal{P}}(\tau;\kappa)$$

$$+\left[Z\mathcal{K}_1^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)+\mu\mathcal{K}_2^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\right]\mathcal{F}_2^{\mathcal{P}}(\tau;\kappa)\Big\};$$

$$\mathcal{F}_2^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)=e^{-i\eta E_2(\mathcal{P},\kappa)}\mu+\int\limits_0^\eta d\tau\Big\{\mu\mathcal{K}_0^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\mathcal{F}_1^{\mathcal{P}}(\tau;\kappa)+\mu\mathcal{K}_1^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\mathcal{F}_2^{\mathcal{P}}(\tau;\kappa)\Big\};$$

$$\mathcal{F}_{3j}^{\mathcal{P}}(\eta;\kappa)=e^{-i\eta E_2(\mathcal{P},\kappa)}2\mu\kappa^j+\int\limits_0^\eta d\tau 2\mu\mathcal{K}_{jl}^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\mathcal{F}_{3l}^{\mathcal{P}}(\tau;\kappa);$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{K}_n^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\\ 0\\ \mathcal{K}_{jl}^{\mathcal{P}}(\eta-\tau)\end{array}\right\}=\frac{i}{2}\int\frac{d^3r}{(2\pi)^3}e^{-i(\eta-\tau)E_2(\mathcal{P},r)}\left\{\begin{array}{l}\big(r^2\big)^n\\ \big(r^2\big)^m\mathbf{r}\\ \;r^jr^l\end{array}\right.,\ \text{т.к.}\ E_2(\mathcal{P},-\mathbf{r})=E_2(\mathcal{P},\mathbf{r}).$$

Как и в N, Θ-модели, она решается преобразованием Лапласа:

$$f_n^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)=\int\limits_0^\infty dt\; e^{-\sigma t}\;\mathcal{F}_n^{\mathcal{P}}(t;\kappa);\quad \mathcal{F}_n^{\mathcal{P}}(t;\kappa)=\frac{\varepsilon(t)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\Delta\varepsilon(t)}^{i\infty+\Delta\varepsilon(t)} d\sigma\; e^{\sigma t}\; f_n^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa), \tag{A.1}$$

где обращение для обоих знаков времени содержит $\varepsilon(t)=\mathrm{sign(t)}$. Определяя величины (2.59) как:

$$\int\limits_0^\infty dt\; e^{-\sigma t}\;\mathcal{K}_{\{\ldots\}}^{\mathcal{P}}(t)=\left\{\begin{array}{c}\mathrm{J}_n^{\mathcal{P}}(\sigma)\\ \mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma)\\ \mathrm{J}_{jl}^{\mathcal{P}}(\sigma)\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3r}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{[E_2(\mathcal{P},r)-i\sigma]}\left\{\begin{array}{c}\left(r^2\right)^n\\ \dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathcal{P})^2}{\mathcal{P}^2}\\ r^jr^l\end{array}\right.;$$

$$\mathrm{J}_{jl}^{\mathcal{P}}(\sigma)=\delta_{jl}\mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)+\frac{\mathcal{P}^j\mathcal{P}^l}{\mathcal{P}^2}\mathrm{J}_d^{\mathcal{P}}(\sigma),\quad \mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_1^{\mathcal{P}}(\sigma)-\mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma)\right],\ \text{ т.к.}$$
$$3\mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)+\mathrm{J}_d^{\mathcal{P}}(\sigma)=\mathrm{J}_1^{\mathcal{P}}(\sigma);\qquad \mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)+\mathrm{J}_d^{\mathcal{P}}(\sigma)=\mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma);$$

имеем эквивалентную алгебраическую систему:

$$f_1^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)\left[Z\,\mathrm{J}_0^{\mathcal{P}}(\sigma)+\mu\,\mathrm{J}_1^{\mathcal{P}}(\sigma)-1\right]+f_2^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)\left[Z\,\mathrm{J}_1^{\mathcal{P}}(\sigma)+\mu\,\mathrm{J}_2^{\mathcal{P}}(\sigma)\right]=$$
$$=-\frac{Z+\mu\kappa^2}{\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)},$$
$$f_1^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)\,\mu\mathrm{J}_0^{\mathcal{P}}(\sigma)+f_2^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)\,\left[\mu\,\mathrm{J}_1^{\mathcal{P}}(\sigma)-1\right]=-\frac{\mu}{\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)},$$
$$\left[\delta_{jl}-2\mu\,\mathrm{J}_{jl}^{\mathcal{P}}(\sigma)\right]f_{3l}^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)=\frac{2\mu\kappa^j}{\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)},$$
$$\left[\delta_{jl}-2\mu\,\mathrm{J}_{jl}^{\mathcal{P}}(\sigma)\right]=\Pi_\perp^{jl}(\mathcal{P})\left(1-2\mu\mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)\right)+\Pi_\parallel^{jl}(\mathcal{P})\left(1-2\mu\mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma)\right).$$

Ее решение в терминах "детерминантов" (2.60) имеет вид:

$$f_{1,2}^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)=\frac{D_{\kappa\,1,2}^{\mathcal{P}}(\sigma)}{[\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)]\,D_0^{\mathcal{P}}(\sigma)};\quad D_{\kappa\,1,2}^{\mathcal{P}}(\sigma)\ \text{зависят от}\ \kappa,\ \ D_0^{\mathcal{P}}(\sigma)\ \text{-нет!}$$
$$f_{3j}^{\mathcal{P}}(\sigma;\kappa)=\frac{2\mu}{[\sigma+iE_2(\mathcal{P},\kappa)]}\left\{\frac{\Pi_\perp^{jl}(\mathcal{P})}{1-2\mu\mathrm{J}_\delta^{\mathcal{P}}(\sigma)}+\frac{\Pi_\parallel^{jl}(\mathcal{P})}{1-2\mu\mathrm{J}_D^{\mathcal{P}}(\sigma)}\right\}\kappa^l,$$

что, с учетом (A.1), приводит к конечному виду $F^{(1)}$ (2.56).

B Операторная форма Фурье-преобразования.

Для вычисления $\mathcal{Q}$ как фурье-образа $\widehat{V}$ в главе 2, и при построении континуального интеграла в главе 3 удобно использовать формальные импульсные и координатные обкладки, на которые действуют только операторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X}$, тогда $\mathbf{P}_{\mathrm{x}} = -i\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}$ на функциях вида $f(\mathbf{x}) =< \mathbf{x}|f >$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}|\mathbf{k} >= \mathbf{k}|\mathbf{k} >, \qquad < \mathbf{k} \mid \mathbf{l} >= \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{l}), \qquad \int d^3k\, |\mathbf{k} >< \mathbf{k}| = \mathbf{I};\\
&\mathbf{X}|\mathbf{x} >= \mathbf{x}|\mathbf{x} >, \qquad < \mathbf{x} \mid \mathbf{y} >= \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \int d^3\mathrm{x}\, |\mathbf{x} >< \mathbf{x}| = \mathbf{I};\\
&e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}\,\mathbf{P}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})} = \mathbf{P}+\mathbf{k}; \quad e^{i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}\,\mathbf{X}\,e^{-i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})} = \mathbf{X}+\mathbf{y}; \qquad (B.1)\\
&[\mathbf{X}_m\,,\mathbf{P}_n] = i\delta_{mn}; \quad e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}|\mathbf{l} >= |\mathbf{k}+\mathbf{l} >; \quad e^{-i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}|\mathbf{x} >= |\mathbf{x}+\mathbf{y} >;\\
&< \mathbf{x}|\mathbf{k} >= \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{(2\pi)^{3/2}}; \quad < \mathbf{k}|e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{X})}|\mathbf{l} >=< \mathbf{k}|\mathbf{p}+\mathbf{l} >= \delta_3(\mathbf{p}+\mathbf{l}-\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}_{(a)}(\mathbf{k},\mathbf{l};t) = -i < \mathbf{k}|\,e^{itE(\mathbf{P})}\widehat{V}_{(\Psi)}(t;\mathbf{X},\mathbf{P})\,e^{-itE(\mathbf{P})}\,|\mathbf{l} >=\\
&= -i\,e^{it[E(k)-E(l)]} \;< \mathbf{k}|\widehat{V}_{(\Psi)}(t;\mathbf{X},\mathbf{P})|\mathbf{l} >=\\
&= \frac{1}{i}\int d^3q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, a^\dagger_\alpha(\mathbf{q},t)\, a_\alpha(\mathbf{p},t)\, e^{it[E(k)-E(l)+E(q)-E(p)]}\;\cdot\\
&\cdot < \mathbf{k}|e^{i((\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{X})}|\mathbf{l} > \left\{\mu\left[\frac{p^2-q^2}{2}+((\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{l})\right]-\frac{\lambda}{2}\right\} =\\
&= \frac{i}{2}\int \frac{d^3\rho}{(2\pi)^3}\, a^\dagger_\alpha(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{k},t)\, a_\alpha(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{l},t)\, e^{it[E(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{k})+E(\mathbf{k})-E(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{l})-E(\mathbf{l})]}\;\cdot\\
&\cdot \left\{\lambda-\mu\left[(\boldsymbol{\rho})^2-(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{l}-\mathbf{k})^2\right]\right\}. \qquad (B.2)
\end{aligned}$$

С помощью (B.1) нетрудно также получить, что в (2.83):

$$\begin{aligned}
&e^{i\eta E(\mathbf{P})}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}\,e^{-i\eta E(\mathbf{P})} = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}\,e^{i\eta[E(\mathbf{P}+\mathbf{k})-E(\mathbf{P})]} =\\
&= e^{i\left(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{X}+\eta\mathbf{v}(\mathbf{P}))\right)} = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{Q}(\eta))}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}E(\mathbf{p}). \qquad (B.3)
\end{aligned}$$

C Нормировка "подменяющих" операторов.

Прежде всего, установим формулу приведения к "нормальной форме" для экспонент от операторов произвольной алгебры $SU(2)$ вида (4.85), (4.86), для любых u, v:

$$\mathrm{g}(u,v) \equiv \exp\left(u\mathcal{G}^-\right)\exp\left(v\mathcal{G}^+\right) = \tag{C.1}$$

$$= \exp\left(\frac{v}{1+uv}\mathcal{G}^+\right)\exp\left(-2\ln(1+uv)\mathcal{G}^3\right)\exp\left(\frac{u}{1+uv}\mathcal{G}^-\right). \tag{C.2}$$

Представив ее левую часть (C.1) в виде

$$\mathrm{g}(u,v) = \exp\left(f(u,v)\mathcal{G}^+\right)\exp\left(h(u,v)\mathcal{G}^3\right)\exp\left(\Phi(u,v)\mathcal{G}^-\right), \tag{C.3}$$

и сравнивая коэффициенты при $\mathcal{G}^{+,-,3}$, например, для дифференциального элемента $d_u\mathrm{g}(u,v)\cdot\mathrm{g}^{-1}(u,v)$, вычисленного по (C.1) и (C.3) соответствено, с помощью вытекающих из (4.86) соотношений:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\tau\mathcal{G}^+\right)\mathcal{G}^-\exp\left(-\tau\mathcal{G}^+\right) &= \mathcal{G}^- + 2\tau\mathcal{G}^3 - \tau^2\mathcal{G}^+,\\
\exp\left(\tau\mathcal{G}^-\right)\mathcal{G}^+\exp\left(-\tau\mathcal{G}^-\right) &= \mathcal{G}^+ - 2\tau\mathcal{G}^3 - \tau^2\mathcal{G}^-,\\
\exp\left(\tau\mathcal{G}^\pm\right)\mathcal{G}^3\exp\left(-\tau\mathcal{G}^\pm\right) &= \mathcal{G}^3 \mp \tau\mathcal{G}^\pm,\\
\exp\left(\tau\mathcal{G}^3\right)\mathcal{G}^\pm\exp\left(-\tau\mathcal{G}^3\right) &= \mathcal{G}^\pm e^{\pm\tau},
\end{aligned}$$

имеем уравнения:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}^- = \mathcal{G}^-\left[(1+uv)^2\Phi'_u(u,v)\right] + \mathcal{G}^3\left[h'_u(u,v) + 2v(1+uv)\Phi'_u(u,v)\right] +\\
&+\mathcal{G}^+\left[f'_u(u,v) - f(u,v)h'_u(u,v) - v^2\Phi'_u(u,v)\right], \quad \text{или:}\\
&\Phi'_u(u,v) = \frac{1}{(1+uv)^2}, \qquad h'_u(u,v) = -\frac{2v}{(1+uv)},\\
&f'_u(u,v) = -\frac{2v}{(1+uv)}f(u,v) + \frac{v^2}{(1+uv)^2},
\end{aligned}$$

которые вместе с очевидными из (C.1) и (C.3) граничными условиями: $\Phi(0,v) = 0$, $\Phi(u,0) = u$, $h(0,v) = h(u,0) = 0$, $f(0,v) = v$, $f(u,0) = 0$, приводят к решению (C.2):

$$\Phi(u,v)=\frac{u}{(1+uv)},\quad h(u,v)=-2\ln(1+uv),\quad f(u,v)=\frac{v}{(1+uv)}. \qquad \text{(C.4)}$$

Используя индукцию, коммутационные соотношения (4.66), (4.67) и представление $(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2=\left(\mathcal{G}^3\right)^2\mp\mathcal{G}^3+\mathcal{G}^{\pm}\mathcal{G}^{\mp}$, последовательно находим:

$$\mathcal{G}^3\prod_{j=1}^{N}\left\{\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha_j\beta_j}\right\}=\prod_{j=1}^{N}\left\{\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha_j\beta_j}\right\}\left(\mathcal{G}^3\pm N\right), \qquad \text{(C.5)}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}\right)^N&=\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}\right)^N\left[(\boldsymbol{\mathcal{G}})^2\pm2N\mathcal{G}^3+N(N-1)\right]-\\ &-N(N-1)\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}\right)^{N-2}(\boldsymbol{w})^2\left(\mathcal{G}^{\pm}\right)^2\mp \qquad \text{(C.6)}\\ &\mp2N\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{\pm}_{\alpha\beta}\right)^{N-1}\mathcal{G}^{\pm}\left((\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\,\mathcal{G}^{3}_{\alpha\beta}\right),\end{aligned}$$

откуда вытекает (4.72).

Привлекая нехитрое экспоненцирование для целой степени произвольного оператора $\mathcal{O}$ путем N-кратного дифференцирования:

$$\mathcal{O}^N=(D_x)^N\exp\left(x\mathcal{O}\right)\Big|_{x=0},$$

и представления (4.78), (4.80), (4.84), можно свести вычисление нормировки состояния (4.75) к вычислению матричного элемента от экспонент:

$$\begin{aligned}1=&\left[\frac{a_0^N\Gamma\left(\mathcal{L}-N+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\mathcal{L}-N)!}\right]^2\int\limits_{-1}^{1}d\xi(1-\xi^2)^{\mathcal{L}-N}\int\limits_{-1}^{1}d\eta(1-\eta^2)^{\mathcal{L}-N}\cdot \qquad \text{(C.7)}\\ &\cdot(D_x)^N(D_y)^N\langle\mathcal{L},-\mathcal{L}|e^{x\left[(1+\xi)\mathcal{G}^-_L-(1-\xi)\mathcal{G}^-_R\right]}e^{y\left[(1+\eta)\mathcal{G}^+_L-(1-\eta)\mathcal{G}^+_R\right]}|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle\Big|_{x=y=0}.\end{aligned}$$

Взаимная коммутативность "левых" и "правых" операторов (4.86) позволяет переписать здесь вторую строчку в виде:

$$(D_x)^N(D_y)^N\langle\mathcal{L},-\mathcal{L}|e^{x(1+\xi)\mathcal{G}^-_L}e^{y(1+\eta)\mathcal{G}^+_L}e^{-x(1-\xi)\mathcal{G}^-_R}e^{-y(1-\eta)\mathcal{G}^+_R}|\mathcal{L},-\mathcal{L}\rangle\Big|_{x=y=0}.$$

После чего повторное применение формулы (C.2) и все той же коммутативности, с учетом свойств вакуума (4.69), дает для этой величины выражение:

$$(D_x)^N (D_y)^N [1+xy(1+\xi)(1+\eta)]^{\mathcal{L}} [1+xy(1-\xi)(1-\eta)]^{\mathcal{L}}\Big|_{x=y=0} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{N!\,(\mathcal{L}!)^2}{(\mathcal{L}-k)!(\mathcal{L}-N+k)!}(1+\xi)^k(1-\xi)^{N-k}(1+\eta)^k(1-\eta)^{N-k}.$$

Его подстановка в (C.7) после несложных, но длинных вычислений приводит к (4.81), (4.82).

D Интегралы, детерминанаты, комбинаторика.

Для любой функции $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, используя индукцию по n, несложно убедиться, что, для $\xi_0 = T$ в первом случае, и $\xi_0 = 0$, во втором:

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^T d\xi_j \right\} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j \right\} \sum_{\mathrm{P}} f(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}); \qquad \text{(D.1)}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^T d\xi_j \right\} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\xi_{j-1}}^{T} d\xi_j \right\} \sum_{\mathrm{P}} f(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}), \qquad \text{(D.2)}$$

где сумма берется по всем $n!$ перестановкам $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}\begin{pmatrix} 12\ldots n \\ i_1 i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$.

Для этого достаточно, разбив интеграл по $d\xi_{n+1}$ на $n+1$ частей:

$$\int_0^T d\xi_{n+1} = \int_0^{\xi_n} d\xi_{n+1} + \int_{\xi_n}^{\xi_{n-1}} d\xi_{n+1} + \ldots + \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_{n+1} + \int_{\xi_1}^{T} d\xi_{n+1}, \qquad \text{(D.3)}$$

переставить каждую из них на соответствующее место.

Для $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \det_{(n)} \left[\widehat{Z}(\xi_i|\xi_l)\right]$, не меняющемуся при любых перестановках P, сумма по P в (D.1), (D.2) дает множитель $n!$. Если по двум переменным симметрия отсутствует, то следует иметь в виду, что

$$\sum_{\mathrm{P}\begin{pmatrix} 12\ldots n \\ i_1 i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}} \equiv \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \sum_{\mathrm{P}\begin{pmatrix} 12\ldots\widehat{i}_1\ldots\widehat{i}_2\ldots n \\ i_3 i_4 \ldots\ldots i_n \end{pmatrix}}, \qquad \text{(D.4)}$$

где $\ldots\widehat{i}_1\ldots$ означает, отсутствие в этом наборе целого числа i_1.

Литература

[1] Поляков А.М., Калибровочные поля и струны, ИТФ им. Ландау Черноголовка, 1995 сс.1-300

[2] Волков М.К., Низкоэнергетическая физика мезонов в кварковой модели сверхпроводящего типа. -*ЭЧАЯ*, 1986, **17**, вып.3, стр.433-471.

[3] Волков М.К., Эффективные киральные лагранжианы и модель Намбу-Йона-Лазинио.-*ЭЧАЯ*, 1993, **24**, вып., стр.81-139.

[4] Ali Khan A., at al., Spectroscopy and Renormalisation Group Flow of a Lattice Nambu-Jona-Lasinio Model,- *Phys.Rev.*, 1995, **D51**, pp. 3751-3780.

[5] Klevansky S.P., The Nambu - Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. -*Rev.Mod.Phys.*, 1992, **64**, No.3, pp. 649 - 708.

[6] Nambu Y., Jona-Lasinio G., Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity.I. - *Phys.Rev.*, 1961, **122**, pp. 345-358.

[7] Nambu Y., Jona-Lasinio G., Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity.II. - *Phys.Rev.*, 1961, **124**, pp. 246-254.

[8] Вакс Г., Ларкин А.И., О применении методов теории сверхпроводимости к вопросу о массах элементарных частиц. -*ЖЭТФ*, 1961, **40**, вып.3, стр. 282 - 285.

[9] Domitrovich P.P., Müther H., On the analytic structure of the quark selfenergy in Nambu - Jona-Lasinio models,- *J.Phys.G:Nucl.Part.Phys.*, 1994, **20**, pp. 1885 - 1900.

[10] Bardeen J., Cooper L.N. and Schrieffer J.R., Microscopic theory of Superconductivity. - *Phys.Rev.*, 1957, **106**, pp.162-164.

[11] Гейзенберг В., Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, Москва, Мир 1968, 239 стр.

[12] Ландау Л.Д. и др., О возможности формулировки теории сильно взаимодействующих фермионов, Собрание трудов Л.Д. Ландау, Москва, Наука, 1969, сс. 374-392. (*Phys. Rev.*, 1958, **111**, p. 321)

[13] Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д., Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. - *ДАН*, 1961, **137**, стр. 1011 - 1014.

[14] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг - Хорн Р., Хольден Х., решаемые модели в квантовой механике, Москва, Мир, 1991, 568 стр.

[15] Березин Ф.А., О модели Ли, Математический сборник, 1963, **60**, N4, сс. 425-446

[16] Широков Ю.М., Сильно сингулярные потенциалы в трехмерной квантовой механике. - *ТМФ*, 1980, **42**, стр. 45 - 49.

[17] Широков Ю.М., Представление свободных решений для уравнений Шредингера с сильно сингулярными сосредоточенными потенциалами. - *ТМФ*, 1981, **46**, 3, стр. 291 - 299.

[18] Цирова И.С., Широков Ю.М., Квантовый дельта - образный потенциал, действующий в p-состоянии. - *ТМФ*, 1981, **46**, 3, стр. 310 - 315.

[19] Шондин Ю.Г., К задаче рассеяния трех частиц с δ потенциалами. - *ТМФ*, 1982, **51**, 2, стр. 181 - 191.

[20] Шондин Ю.Г., Обобщенные точечные взаимодействия в R_3 и связанные с ними модели с рациональной S - матрицей.I.$l = 0$. - *ТМФ*, 1985, **64**, 3, стр. 432 - 441.

[21] Шондин Ю.Г., Обобщенные точечные взаимодействия в R_3 и связанные с ними модели с рациональной S - матрицей.II.$l = 1$. - *ТМФ*, 1985, **65**, 1, стр. 24 - 34.

[22] Шондин Ю.Г., Квантовомеханические модели в R_n, связанные с расширениями оператора энергии в пространстве Понтрягина. - *ТМФ*, 1988, **74**, 3, стр. 331 - 344.

[23] Dijksma A., Langer H., Shondin Yu., and Zeinstra C., Self-adjoint oprators with inner singularities and Pontryagin spaces. - *Operator Theory: Adv. Appl.* 2000, **118**, pp. 105–175. Birkhauser Verlag, Basel.

[24] Fewster C.J., Generalized point interactions for the radial Schrödinger equation via unitary dilations, *J.Phys.A: Math. Gen.* 1995, **28**, pp.1107-1127.

[25] van Diejen J.F., Tip A., Scattering from generalized point interactions using self-adjoint extensions in Pontrygin spaces, *J.Math.Phys.* 1991, **32**,(3), pp. 630-641.

[26] Акишин П.Г., Калиновский Ю.Л., Тяжелые кварконии в билокальной эффективной теории, *ОИЯИ-Р-2-97-404*, Дубна, 1997, 26 с.

[27] Anikin I.V., at al. To the lagrangian formulation of NJL-model with separable interaction, Preprint JINR E2-93-257, Dubna, 1993, 20pp.

[28] Grabowski M., Low Energy Effective Ections with Composite Fields, Preprint DESY 94-146, Hamburg, 1994, 81 p.

[29] Аникин И.В. и др., Модель Намбу-Йона-Лазинио с сепарабельным взаимодействием легких кварков: низкоэнергетическая физика пиона и сильный пион-нуклонный формфактор. Препринт ОИЯИ 94-187, Дубна, 1994 (К 60-летию Г.В.Ефимова) сс.14-29.

[30] Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L., Pion distribution amplitude within the instanton model., Preprint JINR E2-99-339, Dubna, 1999.

[31] Kikkawa K., Quantum corrections in superconductor models. - *Progr.Theor.Phys.*, 1976, **Vol.56**, No.3, pp. 947-955.

[32] Eguchi T., Sugawara H., Extended model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. - *Phys.Rev.*, 1974, **D10**, pp. 4257 - 4262.

[33] Eguchi T., New approach to collective phenomena in superconductive models. - *Phys.Rev.*, 1976, **D14**, No.10, pp. 2755 - 2762.

[34] Волков М.К., Осипов А.А., Длины $\pi - \pi$ рассеяния. - *ЯФ*, 1984, **39**, стр. 694 - 698.

[35] Волков М.К., Осипов А.А., Поляризуемости пионов и каонов в кварковой модели сверхпроводящего типа. - *ЯФ*, 1985, **41**, стр. 1027 - 1034.

[36] Волков М.К., Эберт Д., Четырехкварковые взаимодействия как общий динамический источник σ - модели и модели векторной доминантности. - *ЯФ*, 1982, **36**, стр. 1265 - 1277.

[37] Ebert D., Volkov M.K., Composite - meson model with vector dominance based on $U(2)$ invariant four - quark interactions. - *Z.Phys.*, 1983, **C16**, pp. 205 - 210.

[38] Ebert D., Reinhardt H., Effective chiral hadron lagrangian with anomalies and skyrme terms from quark flavour dynamics. - *Nucl.Phys.*, 1986, **B271**, pp. 188 - 226.

[39] Ebert D., at al., Effective meson lagrangian with chiral and heavy quark symmetries from quark flavor dynamics. - *Nucl.Phys.*, 1995, **B434**, pp. 619 - 646.

[40] Ebert D., at al., The $(0+, 1+)$ heavy meson multiplet in an extended NJL model. - Preprint DESY 94-166, HUP-IEP-94/14 1994, 12 pp.

[41] Ebert D., at al., Scalar mesons in a chiral quark model with glueboll., Preprint JINR E2-2000-164, Dubna, 2000, 21 pp.

[42] Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., On the reduction of vector and axial vector fields in a meson effective action at $O(p^4)$. - *JINR-E2-94-371*, 16 pp.

[43] Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., An effective chiral meson Lagrangian at $O(p^6)$. - Preprint JINR-E2-94-368, Dubna 1994, 14 pp.

[44] Осипов А.А., Бозонизация в импульсном пространстве, *ЯФ* **59**, 10, стр. 1849-1858.

[45] Богданова Н., Попов В., Двумерная теория поля с несколькими конденсированными фазами. - *ТМФ*, 1981, **46**, 3, стр. 325 - 334.

[46] Salpeter E., Bethe H.A., A relativistic equation for bound state problems. - *Phys.Rev.*, 1951, **84**, No.6, pp. 1232 - 1242.

[47] Первушин В.Н., Атомы и адроны в калибровочных теориях, Лекции для молодых ученых, Препринт ОИЯИ, Р2-90-211, Дубна, 1990, 73 стр.

[48] Kalinovsky Yu.L., at al., Weak interactions in a bilokal chiral theory. I. Bound states wave functions for given angular momentum. *JINR-E4-91-501*, Dubna, 1991, 16 pp.

[49] Kalinovsky Yu.L., at al., Relativistic bound states. - *Few Body Systems*, 1991, **10**, pp. 87-104.

[50] Pervushin V.N., Kallies W., Sarikov N.A., Pion as goldstone particle in QCD, - *JINR-E2-87-430*, Dubna, 1987, 18 pp.

[51] Первушин В.Н., и др., Квантовая хромостатика как низкоэнергетическая теория адронов, Препринт ОИЯИ, P2-87-674, Дубна, 1987, 30 стр.

[52] Калиновский Ю.Л. и др., Билокальные мезонные лагранжианы и потенциальная модель, Препринт ОИЯИ, P2-88-560, Дубна, 1988, 15 стр.

[53] Pervushin V.N., at al., Unification of a potential model with chiral lagrangians, - *JINR-E2-88-643*, Dubna, 1988, 20 pp.

[54] Pervushin V.N., at al., A new perturbative approach to QCD, - *JINR-E2-88-68*, Dubna, 1988, 10 pp.

[55] Pervushin V.N., at al., Phenomenology of chromostatics, - *JINR-E2-88-78*, Dubna, 1988, 14 pp.

[56] Amirkhanov I.V., at al., Pion as relativistic bound state in oscillator potential, - *JINR-E2-89-583*, Dubna, 1989, 12 pp.

[57] Kalinovsky Yu.L., at al., Relativistic bound states in QCD, – *JINR-E2-90-354*, Dubna, 1990, 19 pp.

[58] Amirkhanov I.V., at al., Instantaneous approximation for QCD and properties of mesons, - *JINR-E2-90-414*, Dubna, 1990, 10 pp.

[59] Sarikov N.A., at al., Parameters of low-energy physics, radial excitations of π, K D mesons and QCD potential, *JINR-E2-91-262*, Dubna, 1991, 10 pp.

[60] Blaschke D., at al., Instantaneous chiral quark model for relativistic mesons in a hot and dense medium. - *Nucl.Phys.*, 1995, **A586**, pp. 711-733.

[61] Gross F., Milana J., Covariant, chiral symmetric, confining model of mesons. - *Phys.Rev.*, 1991, **Vol. D43**, No.7, pp. 2401 - 2417.

[62] Gross F., Van Order J.W., Holinde K., Relativistic one - boson - exchange model for the nucleon - nucleon interaction. - *Phys.Rev.*, 1992, **Vol. C45**, No.5, pp. 2094 - 2132.

[63] Силагадзе З.К., Модель Вика-Куткосского Введение, Препринт 92-33 ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1992, 74 с.

[64] Саврин В.И., Труль А.Ю., Точное решение уравнения Бете - Солпитера с запаздывающими пропагаторами в модели Вика - Куткосского. - *ТМФ*, 1996, **106**, 3, стр. 407-415.

[65] Fulton T., Martin P.C., Two-body system in Quantum Electrodynamics. Energy levels of positronium. *Phis. Rev.*, 1954, **95**, N3, pp. 811-822.

[66] Скачков Н.Б., Соловцов И.Л., Релятивистское трехмерное бзаимодействие двух фермионов., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, вып.1, стр. 5-47.

[67] Архипов А.А., К вопросу об одновременно́й редукции в квантовой теории поля., Труды VII семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля., Протвино, 1984, том 2, с. 234-251.

[68] Arkhipov A.A., Causality in the problem of singl-time reduction in quantum field theory. Preprint IHEP-85-146, Serpuchov, 1985, 25 p.

[69] Архипов А.А., Одновременна́я редукция формализма Бете-Солпитера для двухфермионной системы., Препринт, ИФВЭ-88-147, Серпухов, 1988, 43 с.

[70] Браун М.А., Гурчумелия А.Д., Сафронова У.И., Релятивистская теория атома, Москва, "Наука", 1984, 267 с.

[71] Bodwin G.T., Yennie D.R., Gregorio M.F., Recoil effects in the hyperfine structure of QED bound states, Preprint CLNS-84/618, ANL-HEP-PR-84-57, Cornell, USA, 1984, pp.1-132.

[72] Lepage G.R., Analytic bound-state solutions in a relativistic two-body formalism with applications in muonium and positronium, *Phys. Rev.* 1977, **A16**, N3, pp.863-876

[73] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П., Квантовая Электродинамика, Москва, "Наука", 1980, 704 с.

[74] Боос Э.Э., Саврин В.И., Шаблыгин Е.М., Точное решение квазипотенциального уравнения методом контурного интегрирования. - *ТМФ*, 1987, **72**, 2, стр. 197-203.

[75] Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей, Москва, Наука, 1968, 184 стр.

[76] Hepp K., Theorie de la renormalisation, Springer-Verlag, 1969, 255 p. (Хепп К., Теория перенормировок, Москва, Наука, 1974, 256 стр.)

[77] Стритер Р., Вайтман А., PCT, Спин и статистика и все такое, Москва, Наука, 1966, 251 с.

[78] Бартон Г., Дисперсионные методы в теории поля, Москва, Атомиздат, 1968, 391 с.

[79] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теории квантованных полей, Москва, Наука, 1984, 597 с.

[80] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т., Общие принципы квантовой теории поля, Москва, Наука, 1987, 615 с.

[81] Silvan Schweber S., An Introductin to Relativistic Quantum Field Theory, Petrson & Co., 1961, 842 p. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Москва, Издат-во иностранной лит-ры, 1963, 844 стр.

[82] Ефимов Г.В., Нелокальные взаимодействия квантованных полей. Москва, Наука: 1977, 367 с.

[83] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. Москва, Мир: 1976, 423 с.

[84] Haag R., Dan Vidensk K., On quantum field theories, *Selsk. Mat-Fys. Medd.* **29** N 12, 1955, pp.1-37.

[85] Фаддеев Л.Д., О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений, Докл. Акад. Наук СССР, 1963, **152**, сс. 573-580.

[86] Shebeko A.V., Shirokov M.I., Unitary transformations in quantum field theory and bound states, *ЭЧАЯ*, **32**, N1, 2001, сс. 31-95.

[87] Широков М.И., Квантовая теория поля: "одевание" против расходимостей. Препринт ОИЯИ Р2-6454, Дубна, 1972, 47 с.

[88] Широков М.И., "Одевание" и теорема Хаага, Препринт ОИЯИ Р2-7210, Дубна, 1973, 13 с.

[89] Вишинеску М., Широков М.И., Процедура "одевания" в теории поля по методу возмущений и расходимости. Препринт ОИЯИ Р2-8148, Дубна, 1974, 15 с.

[90] Fivel D.I., Solution of the Lee model in all sectos by dynamical algebra, *Journ.Math.Phys.*, **11**, 1970, pp. 699-705.

[91] Шварц А.С., Математические основы квантовой теории поля, Москва, Атомиздат, 1975, 368 с.

[92] Umezawa H., Matsumoto H. and Tachiki M., Thermo-field Dynamics and Condensed States, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982, 504 p. (Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М., Термополевая динамика и конденсированные состояния, Москва, Мир, 1984, 504 стр.)

[93] Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М., Квантовые эфекты в интенсивных внешних полях, Москва, Атомиздат, 1980, 295 стр.

[94] Greenberg O.W., Study of a model of quantum electrodynamics, Preprint PP-00-020, University of Maryland, 2000, 11 p.

[95] Greenberg O.W., Ray R., Schlumpf F., Covariant single time bound state equation. - *Phys.Lett.*, 1995, **B353**, pp. 284 - 288.

[96] Greenberg O.W., Virtues of The Haag Expansion in Quantum Field Theory, Preprint 95-99, University of Maryland, 1995, 29 p.

[97] Мигдал А.Б., Качественные методы в квантовой теории, Москва, Наука, 1975, 335 с.

[98] де Альфаро В., Редже Т., Потенциальное рассеяние, Москва, Мир, 1966, 274 с.

[99] Березин Ф.А., Метод вторичного квантования, Москва, Наука, 1986, 319 с.

[100] Каменщик А.Ю., Свешников Н.А., Отсутствие свободных кварков в КХД в рамках теории возмушений, Препринт ИФВЭ 82-127 ОТФ, Серпухов 1982, 9 с.

[101] Каменщик А.Ю., Свешников Н.А., Инфракрасные расходимости и асимптотические состояния кварков в квантовой хромодинамике, *ТМФ*, 1998, **117**, N2, сс. 175-188.

[102] Ефимов Г.В., Неделько С.Н., Неэквивалентные представления и фазовая структура $(\phi^4)_d$ - теории поля, *ЭЧАЯ*, 1994, том 25, вып.3, сс. 779-843.

[103] Thorn C., Quark confinement in the infinite momentum frame, - *Phys.Rev.*, 1979, **D19**, No.2, pp. 639 - 651.

[104] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, Москва, Мир, 1985, 382 стр.

[105] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Analysis of One Particle Excitations in Phenomenological Models of QCD. Proceedings of I International Conference. Quantum Systems: New Trends and Methods, (Minsk 1994) ed. A.O.Barut et.al., World Scientific, 1995, pp. 89-96.

[106] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Vacuum and one particle excitations in model of four-neutrino contact interaction. Proceedings of IX International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Zvenigorod 1994), ed. B.B.Levchenko, Moscow State University, 1995. pp. 371-374.

[107] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Dynamical mapping method in nonrelativistic models of quantum field theory, Proceedings of X International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Zvenigorod 1995), ed. B.B.Levchenko and V.I.Savrin, Moscow State University, 1996. pp. 279-286.

[108] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Fine-Tuning Renormalization and Bound States for Nonrelativistic Four-fermion Model, Proceedings of X International Conference "Problems of Quantum Field Theory", (Alushta-96) in D.V. Shirkov, D.I. Kazakov, A.A.Vladimirov, editors, JINR E2-96-369, p. 214-218, Dubna, 1996.

[109] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Dynamical mapping method in nonrelativistic models of quantum field theory. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, **4**, No 3-4, pp.492-502.

[110] Валл А.Н., Коренблит С.Э., Левиант В.М., и др., Перенормировка "тонкой подстройкой" и двухчастичные состояния в нерелятивистской четырехфермионной модели, *Ядерная физика*, 1997, **60**, вып.8, сс. 1451-1458.

[111] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Fine-tuning Renormalization in Nonrelativistic Quantum field models, Proceedings of II International conference, Quantum Systems: New Trends and Methods, (Minsk 1996), ed. Y.S. Kim, L.M. Tomilchik, I.D. Feranchuk and A.Z. Gazizov, World Scientific, 1997, pp. 264-274.

[112] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Three-particle states in nonrelativistic four-fermion model, Proceedings of XI-th International WorkShop, High Energy Physics and Quantum Field Theory (S-Peterburg 1996) ed. B.B.Levchenko, V.I.Savrin, Moscow State University Publishing House, 1997, pp. 406-411.

[113] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Fine-Tuning Renormalization and Two-particle States in Nonrelativistic Four-fermion Model, *International Journal of Modern Physics A*, 1997, **12**, No 28, pp. 5039-5052.

[114] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Few-particle bound states in nonrelativistic four-fermion model, *Surveys in High Energy Physics*, 1998, **13**, pp.249-254

[115] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Exact solutions for contact four-fermion model. Goldstone mode "against" extension theory, Proceedings of I Baikal School of Fundamental Physics, "Astrophysics and of microworld physics", ed. by V.A.Naumov, S.I.Sinegovski, Yu.V.Parfenov, Irkutsk, 1998, pp.178-186.

[116] Коренблит С.Э., Танаев А.Б., Линеаризация Гейзенберговских Уравнений в Моделях Четырехфермионного Взаимодействия и Проблема Связанных Состояний, Препринт ИЯФ 2001-11, Новосибирск, 2001, 35 стр.

[117] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., at al., Two- and Three-particle States in a Nonrelativistic Four-fermion Model in the Fine-tuning Renormalization Scheme. Goldstone Mode Versus Extension Theory. *Few-Body Systems*, 2001, **30**, N 3, pp.187-209 (hep-th/9906015 v.3, 17 May 2000)

[118] Kolokolov I.V., Yelkhovsky A.S., Schwinger terms as a source of gauge anomaly in hamiltonian approach, INP Preprint 87-103, Novosibirsk, 1987.

[119] Vladimirov A.A., On the origin of the Schwinger anomaly, JINR Preprint E2-89-39, Dubna, 1989.

[120] Рочев В.Е., Уравнение Бете-Солпитера и функциональный формализм квантовой теории поля. Труды V Школы молодых ученых "Квантовая теория поля и физика высоких энергий", Москва, МГУ, 1990, сс. 126-146.

[121] Rochev V.E., Saponov P.A., Approximation scheme and anomalous solution of the Schwinger equation. Proceedings of IX International WorkShop. High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Zvenigorod 1994), ed. B.B.Levchenko, Moscow State University, 1995. pp. 313-318.

[122] Rochev V.E., Saponov P.A., The four-fermion interaction in D=2,3,4: a nonperturbativ treatment, Preprint IHEP 96-109, Protvino 1996, pp.1-16.

[123] Петрина Д.Я., Иванов С.С., Ребенко А.Л., Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния, Москва, Наука, 1979, 295 стр.

[124] Васильев А.Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, ЛГУ, Ленинград, 1976, 294 стр.

[125] Gross D.J., Neveu A., *Phys. Rev.*, 1974, **D 10**, p.3235.

[126] Kogut J.B., Stephanov M.A., Toublan D., *Phys. Lett.*, 1999, **B464**, p.183

[127] Kogut J.B., at al., QCD-like Theories at Finite Baryon Densty, Preprint SUNY-NTG-00/11 pp.1-40, (hep-ph/0001171)

[128] Трейман С., Джекив Р., Гросс Д., Лекци по алгебре токов, Москва, Атомиздат, 1977, 232 с.

[129] Адлер С., Дашен Р., Алгебры токов и их применение в физике частиц, Москва, Мир, 1970, 435 с.

[130] Гитман Д.М., Фрадкин Е.С., Шварцман Ш.М., Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом, Москва, Наука, 1991, 293 с.

[131] Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, Москва, Мир, 1968, 382 стр.

[132] Попов В.Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Москва, Атомиздат, 1975, 256 с.

[133] Райдер Л., Квантовая теория поля, Москва, Мир, 1987, 512 с.

[134] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. Москва, Мир, 1984, 445 стр.

[135] Колоколов И.В., Функциональное интегрирование и динамика модели Гейзенберга при высоких температурах, *ЖЭТФ*, 1986, **91**, вып.12, сс.2313-2318.

[136] Kolokolov I.V., Functional representation for the partition function of the quantum Heisenberg ferromagnet, *Phys. Lett.*, 1986, **114A**, N2, pp.99-104.

[137] Kolokolov I.V., Functional integration method for 1D localization, multipoint correlators and persistent current in mesoscopic ring at arbitrary magnetic fields., Preprint BUDKERINP 93-12, Novosibirsk, 1993,

[138] Lunev F.A., Pure bosonic path integral representation for fermionic determinants, non-Abelian Stokes theorem, and quasiclassical approximation in QCD, hep-th/9609166.

[139] Korchemsky G.P., Quantum geometry of the Dirac fermions. Definitions of Spinor Functional, *JINR Preprint* E2-89-498, Dubna, 1989.

[140] Korchemsky G.P., Quantum geometry of the Dirac fermions. Dimensional Extension of the Spinor Functional, *JINR Preprint* E2-89-499, Dubna, 1989.

[141] Korchemsky G.P., Quantum geometry of the Dirac fermions. Dimensional Reduction of the Spinor Functional, *JINR Preprint* E2-89-500, Dubna, 1989.

[142] Korchemsky G.P., Quantum geometry of the Dirac fermions. *JINR Preprint* E2-89-575, Dubna, 1989.

[143] Korchemsky G.P., Quantum geometry of Dirac fermions. *Int.Jour.Mod.Phys.A*, 1992, **7**, No2, pp.339-380.

[144] Менский М.Б., Группа путей, измерения, поля, частицы. Москва, Наука, 1983, 318 с.

[145] Краснов М.Л., Интегральные уравнения, Москва, Наука, 1975, 303 с.

[146] Швингер Ю., Частицы, источники, поля. Т.1, Москва, Мир, 1973, 502 с.

[147] Швингер Ю., Частицы, источники, поля. Т.2, Москва, Мир, 1976, 475 с.

[148] Винницкий С.И. и др., Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике, *УФН*, 1990, **160**, вып.6, сс. 1-49.

[149] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия, Москва, Наука, 1979, 759 с.

[150] Тавхелидзе А.Н., Токарев В.Ф., Структура основного состояния и свойства функций Грина от бесцветных операторов в модели Швингера., -*ЭЧАЯ*, 1985, **16**, вып.5, стр.973-1104.

[151] Тавхелидзе А.Н., Токарев В.Ф., Структура вакуума в калибровочных теориях и бесцветные переменные., -*ЭЧАЯ*, 1990, **21**, вып.5, стр.1126-1186.

[152] Siegel W., Fields, Preprint YITP-99-67, 710 pp., hep-th/9912205.

[153] Архипов А.А, Саврин В.И., Асимптотические условия LSZ и динамические уравнения в квантовой теории поля., -*ЭЧАЯ*, 1985, **16**, вып.5, стр.1091-1125.

[154] Андрианов А.А., Андрианов В.А., Калибровочная модель Намбу-Иона-Лазинио как низкоэнергетическое приближение КХД. - *ТМФ*, 1992, **93**, стр. 67 - 86.

[155] Silagadze Z.K., SO(8) colour as possible origin of generations, Preprint, Budker INP 93-93, Novosibirsk, 1993.

[156] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф., Калибровочные теории в физике элементарных частиц, Москва, Мир, 1987, 624 с.

[157] Соловьев В.Г., Теория атомного ядра. Ядерные модели, Москва, Энергоиздат, 1981, 295 стр.

[158] Липкин Г., Квантовая механика, Москва, Мир, 1977, 592 стр.

[159] Гриб А.А., Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля, Москва, Атомиздат 1978, 127 стр.

[160] Хакен Х., Квантовая теория твердого тела, Москва, Наука, 1980, 342 стр.

[161] Переломов А.М., Обобщенные когерентные состояния и их применения, Москва, Наука, 1987, 249 стр.

[162] Смородинский Я.А., Шелепин А.Л.,Шелепин Л.А., Групповые и вероятностные основы квантовой теории, *УФН*, 1992, **162**, N 12, сс.1-95.

[163] Малкин И.А., Манько В.И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, Москва, Наука, 1979, 319 стр.

[164] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, том I, Москва, Наука, 1973, 294 стр.

[165] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, том II, Москва, Наука, 1974, 295 стр.

[166] Зелевинский В.Г., Дополнительные главы квантовой механики (Операторные методы), Учебное пособие, НГУ, Новосибирск, 1983, 82 стр.

[167] Фейнман Р., Статистическая механика, Москва, Мир, 1975, 407 стр.

[168] Jackiw R., A Nonrelativistic Chiral Solution in One Dimension, *Journal of Nonlinear Math. Phys.*, 1997, **4**, N3-4, pp. 261-270.

[169] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, том IV, Москва, Мир, 1982, 428 стр.

[170] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, Москва, Мир, 1969, 607 стр.

[171] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, том II, Москва, Мир, 1978, 395 стр.

[172] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, Москва, Мир, 1979, 587 стр.

[173] Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах, том I, Харьков: Вища школа, 1977, 315 стр.

[174] Данфорд Н., Шварц Дж.Т., Линейные операторы, Спектральная теория, том 2, Москва, Мир, 1966, 1063 стр.

[175] Рихтмаер Р., Принципы современной математической физики, том I, Москва, Мир, 1982, 486 стр.

[176] Павлов Б.С., Модель потенциала нулевого радиуса с внутренней структурой, *ТМФ*, 1984, **59**, 345-353.

[177] Макаров К.А., Мележик В.В., Мотовилов А.К., Точечные взаимодействия в квантовой задаче трех частиц с внутренней структурой. *ТМФ*, 1995, **102**, 258.

[178] Макаров К.А., Мележик В.В., Две стороны медали: эффект Ефимова и коллапс в системе трех частиц с точечными взаимодействиями. *ТМФ*, 1996, **107**, 415-432.

[179] Giacconi P., Maltoni F., Soldati R., Nonperturbative nature of the Aharonov-Bohm scattering amplitude, hep-th/9706198.

[180] Крейн М.Г., Лангер Г.К., О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространсве Π_κ,(I), *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5**, вып.2, сс. 59-71.

[181] Крейн М.Г., Лангер Г.К., О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространсве Π_κ, (II), *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5**, вып.3, сс. 54-69.

[182] Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H., Introduction to the spectrl theory of operators in spaces with indefinite metric, Berlin: Academic Verlag, 1982.

[183] Ситенко А.Г., Лекции по теории рассеяния, Киев, "Вища школа", 1971, 260 стр.

[184] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, Москва, Наука, 1985, 308 стр.

[185] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, Москва, Наука, 1979, 272 стр.

[186] Яфаев Д.Р., К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера, Математический сборник, 1974, **94**, N8, сс. 567-593.

[187] Терентьев М.В., Введение в теорию элементарных частиц, Москва, ИТЭФ, 1998, 235 стр.

[188] Close F.E., An introduction to quarks and partons, Academic Press, 1979, 438 p.

[189] Barnett R.M. at al., Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, 1996, **D54**, N1, p.47, p.100.