ЗАДАНИЕ II: Статистическая физика, VI семестр, 2005 год

1. Для частиц максвелловского газа:

   а) записать распределение по компонентам скоростей;

   б) найти $\ll v_x^2 \gg$, $\ll v^2 \gg$;

   в) найти наиболее вероятную абсолютную величину импульса;

   г) записать распределение по кинетической энергии;

   д) вычислить среднее значение, дисперсию и наиболее вероятное значение энергии;

   е) найти среднее время, необходимое для пролета расстояния ℓ в пренебрежении столкновениями частиц между собой; привести численную оценку при $\ell \sim 10^{-6}$ м для воздуха при н.у.: $\overline{n} \approx 3 \cdot 10^{19} \mathrm{cm}^{-3}$;

   ж) определить полную плотность потока $\mathcal{J}_\Sigma(\mathbf{N}_\Sigma)$ частиц из сосуда с разреженным идеальным газом при температуре T через малое отверстие Σ в стенке сосуда; найти среднюю энергию и среднюю абсолютную скорость частиц *в этом потоке*: (1) не учитывая изменение концентрации частиц, $\overline{n} = \mathrm{const}$, внутри сосуда; (2) учитывая изменение концентрации $\overline{n} \Rightarrow \overline{n}(t)$, найти среднее время пребывания частицы в сосуде.

2. Найти среднее значение абсолютной скорости и кинетической энергии молекул тонкой пленки, пренебрегая взаимодействием молекул друг с другом. Вычислить "давление" этого идеального двумерного газа при температуре T, считая известной поверхностную концентрацию частиц $\overline{n} = N/\Sigma$.

3. Найти диэлектрическую проницаемость $\epsilon(T)$ больцмановского газа полярных молекул с собственным электрическим дипольным моментом d_0, помещенного во внешнее однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}$. Исследовать случаи слабого, $d_0E/kT \ll 1$, и сильного, $d_0E/kT \gg 1$, электрического поля. Вычислить дополнительную теплоемкость, приобретаемую этим газом в слабом электрическом поле. Как изменятся эти результаты с учетом поляризуемости молекул газа: $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \alpha \boldsymbol{E}$?

4. Найти флуктуацию диэлектрической проницаемости, как функции температуры T и плотности $\overline{n}$: $\epsilon = \epsilon(\overline{n}, T)$.

5. Солнце излучает как равновесное черное тело с лучевой интенсивностью излучения с единицы поверхности, независящей от направления излучения $\mathbf{v}$, т.е. $\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathcal{I}_\omega^0$, при $|\mathbf{r}| = a_\odot$. Найти зависимость от $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ плотности энергии излучения $\mathrm{u}(r) = \ll u(T_r) \gg$ и полной радиальной плотности потока $\mathcal{J}_r(\mathbf{n})$, и установить связь между ними при $|\mathbf{r}| \gg a_\odot$, и $|\mathbf{r}| = a_\odot$. Считая видимый с Земли угловой диаметр Солнца, $2\beta \approx 0.01$, а саму Землю, – черным телом, находящимся в тепловом равновесии с излучением на своей орбите, найти связь температур их поверхностей.

6. Спектральная плотность фононов $\overline{\mathcal{D}}(\omega, V)$ зависит от единственного размерного параметра $\omega_M(V)$. Получить уравнение состояния **всего** кристалла в форме Грюнайзена. Найти постоянную Грюнайзена, если средняя скорость звука $\overline{c}$ не зависит от объема V, а вид $\omega_M(V)$ определяется ею и объемом по размерности.

7. Найти среднеквадратичное смещение одного атома дебаевского кристалла из положения равновесия, предполагая статистическую независимость отдельных временны́х Фурье гармоник $\boldsymbol{r}(\omega)$ смещения $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)$. Рассмотреть предельные случаи $T \ll \theta_D$, $T \gg \theta_D$.

8. Найти химпотенциал, уравнение адибаты, и записать выражения для теплоемкости и давления двумерного ферми газа в зависимости от температуры и плотности.

9. Найти химические потенциалы, уравнения состояния и параметры вырождения идеальных **ультрарелятивистских** $\varepsilon = cp$, одномерных квантовых газов бесспиновых бозонов, и фермионов со спином 1/2, с плотностью $\overline{n}_{(B),(F)} = N_{(B),(F)}/L$, при температуре T. Сравнить их плотности, энергии, давления и энтропии для химпотенциала $\mu_{(F),(B)} = 0$. Отбрасывая бесконечные, независящие от температуры вклады вакуумных энергий, сравнить их термодинамические потенциалы при температуре T и нулевых химических потенциалах. И то же соответственно для трехмерных газов в ящике объемом V.

10. Найти *точный* большой потенциал, полное давление $P(T,\mu) = P_{e^-} + P_{e^+}$, полную энтропию $S(T,\mu)$, полный заряд и внутреннюю энергию ультрарелятивистского электрон-позитронного ферми газа, находящегося в *динамическом* равновесии с чернотельным излучением при температуре T. Рассмотреть предельные случаи $T \gg \mu$ и $T \ll \mu$. (Использовать систему единиц, в которой $\hbar = c = k_B = 1$.) Указание: выразить $\mathcal{F}_3(y) + \mathcal{F}_3(-y)$ через $\mathcal{F}_0(\pm y)$ и $\mathcal{F}_{0,1,2,3}(0)$, установив интегрированием по частям, что:

$$\frac{d\mathcal{F}_\nu(y)}{dy} = \nu \mathcal{F}_{\nu-1}(y)\ , \ \text{ для } \ \mathcal{F}_\nu(y) = \int\limits_0^\infty \frac{x^\nu \, dx}{\exp(x-y)+1}\,.$$

11. Найти уравнение адиабаты в таком равновесном газе, нагретом до столь высокой температуры, что его давление в 7/4 раза выше давления излучения: $P_{e^-} + P_{e^+} = (7/4)P_\gamma$; может ли оно быть меньше этой величины? Какова скорость звука $v_{\text{зв}} = \sqrt{(\partial P/\partial\rho)_S}$ в таком газе?

12. Найти T_F, уравнение состояния и теплоемкость сильно вырожденного релятивистского ферми – газа с $\varepsilon(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$, с заданной плотностью $\overline{n}$. Каково условие вырожденности такого газа?

<u>Сдать до ...... мая с.г.</u>