МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФГБОУ ВПО “ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

С. Э. КОРЕНБЛИТ

ДВЕНАДЦАТЬ ЗАДАЧ

ПО ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Задачник

ИРКУТСК
2013

УДК 531.19+536.75

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: профессор, член-корр. РАН, А.В. Яблоков,
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Чумак.

С. Э. Коренблит
Двенадцать задач по экологической физике:
задачник / С. Э. Коренблит. – Иркутск:
Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2013. – 52 с.
ISBN 978–5–9624–221–5

Пособие представляет собой оригинальную попытку совместить обучение физике с формированием экологического мировоззрения. Своевременность такого подхода к преподаванию обусловлена все возрастающими масштабами антропогенного влияния на природную среду, уже вполне сопоставимыми с масштабами всей планеты.
Пособие содержит подробные решения двенадцати различных по уровню, сложности и комплементарности задач из самых разных разделов физики. Эти задачи, как правило, объединены анализом вполне конкретной экологической проблемы. Рассматриваются задачи, связанные с деятельностью предприятий ядерного топливного цикла и с глобальными изменениями климата Земли.
Пособие предназначено для студентов, обучающихся по физическим направлениям бакалавриата и магистратуры, по курсам: “Механика”, “Молекулярная физика”, “Ядерная физика”, “Оптика”, “Термодинамика и статистическая физика”, а также для студентов экологических направлений по курсу “Физические основы экологии”
Ил. 7.

УДК 531.19+536.75
ISBN 978–5–9624–221–5

Пособие подготовлено в рамках реализации Программы стратегического развития ИГУ на 2012-2016 гг.

Предисловие

В лекции по случаю своего 70-летия известный физик Стивен Хокинг, со свойственным ему оптимизмом, оставил человечеству все же еще не более 1000 лет жизни на нашей планете. Однако в оценках такого рода, из-за множества трудноконтролируемых факторов, определяющих высшие производные по времени, вполне допустима ошибка на порядок. То есть речь может идти уже всего лишь о сотнях или о сотне лет.

Предлагаемое учебное пособие содержит двенадцать возрастающих по уровню сложности и комплементарности задач из разных разделов физики, естественно возникавших при анализе конкретных экологических вопросов. Поэтому оно адресовано не только физикам, но и экологам, желающим ознакомиться с физической стороной некоторых экологических проблем. Рассматриваются предельно упрощенные постановки задач, так что все приведенные здесь численные результаты имеют характер оценок лишь по порядку величины. Значительные усилия предприняты, чтобы сделать решения по возможности подробными и элементарными, а также снабдить их достаточными литературными ссылками, приводимыми непосредственно в тексте.

В задачу пособия входит демонстрация единства физической науки, как инструмента для исследования явлений природы, вызванных в том числе и нашими собственными, подчас необдуманными действиями. А с другой стороны, демонстрация важности понимания прежде всего физической сути той или иной экологической проблемы.

Так, в погоне за все более мощными источниками энергии мы не слишком задумываемся о том, какие глобальные процессы будут неизбежно запущены при ее по сути единовременном выделении в таких количествах. Стремительно сжигая миллионы тонн углеводородов, миллиардами лет копивших в недрах планеты солнечную энергию, а также **навсегда** меняя в реакторах судьбу бесчисленного множества ядер урана $U^{(235,238)}$, никогда бы не превратившихся в вовсе отсутствовавшие до нас на Земле радиоактивные элементы, мы неизбежно меняем и свою собственную судьбу. Наше энергетическое обжорство уже вызвало отклик малознакомой нам климатической машины планеты в виде повышения температуры мирового океана и необратимого таяния континентальных ледников и полярных ледяных шапок, в результате чего эта внесенная нами энергия обрушивается теперь на нас в виде различных катастрофических климатических явлений. Однако, не смотря на все это, остается еще очень много желающих воспользоваться почти поголовной физической неграмотностью или неосведомленностью населения планеты для достижения своих сиюминутных своекорыстных целей. Их не смущает даже точное исполнение уже заранее предсказываемых масштабных аварий и катастроф типа Фокусимы.

Чтобы найти приемлемые ответы на вызовы, которые мы по сути бросили и продолжаем бросать себе сами, стремительно уничтожая свою собственную среду обитания, необходим комплементарный подход включающий, разумеется, наряду с физикой, и химию, и биологию. Времени для разработки и реализации его остается все меньше. Тогда как требования к экологической, и в первую очередь, к физической грамотности становятся все выше.

Автор благодарен Mashe Tsukernik за пояснения и материалы по радиационному балансу Земли и всем коллегам, участвовавшим в обсуждении решений. Он несет полную ответственность за возможные ошибки, неточности и опечатки, и будет признателен всем кто на них укажет. В частности, оригинальные для автора решения Задач 5а, 6, и 7, возможно окажутся достойны критики специалистов. Последующие итерации этого задачника можно будет найти в Интернет по адресу: `http://www.physdep.isu.ru/sost/teor_phi/korenb/TDSPh/ah.pdf`

Иркутск, 2013 год.

С.Э. Коренблит

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Обозначения:
k - постоянная Больцмана;
R - газовая постоянная;
N_A - число Авогадро: $6,02 \cdot 10^{23}$ (1/моль);
Символы $\Rightarrow$, $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, – всюду означают: “сводится к ...”.
Символы $\longmapsto$, $\mapsto$, – всюду означают: “заменяется на ...”.
Символ $\forall$, – означает “для любых..., для всех..., для каждого...”.
Символ $\exists$, – означает “существует..., для некоторого...”.

Единицы:
г - грамм;
кг - килограмм;
м - метр;
см - сантиметр;
mm - миллиметр;
сек - секунда;
mm рт.ст - миллиметр ртутного столба;
атм - атмосфера;
аем - атомная единица массы;
моль - количество вещества в N_A его молекулах;
Дж - Джоуль;
эв - электрон-вольт;
Мэв - мега-электрон-вольт;
Гэв - гига-электрон-вольт;
н - Ньютон;
K - Кельвин.

Сокращения:
ГФУ - гексафторид урана;
ТФУ - тетрафторид урана;
ОЯТ - отработанное ядерное топливо;
АЭС, ГЭС, ВЭС, ЭС: – атомные, гидро-, ветро-, электростанции;
АЭХК - Ангарский электро химический комбинат;
ВМФ - военно- морской флот;
НГУ - Новосибирский госуниверситет ;
ИГУ - Иркутский госуниверситет.

Задача 1:
Молекула гексафторида урана (ГФУ) UF_6 состоит из одного атома урана $U^{(238)}$ и 6-ти атомов фтора $F^{(19)}$. Какова доля m массы фтора в массе M ГФУ? Сколько тетрафторида (ТФУ) UF_4 можно получить в результате его диссоциации?
Решение:
Поскольку, на 6 атомов фтора приходится $6 \times 19 = 114$ атомных единиц массы *(аем)*, то их доля в полном атомном весе одной молекулы ГФУ, равном $238 + 114 = 352$*(аем)*, составляет около одной трети, а точнее: $114/352 = 0,324$. В случае диссоциации: $UF_6 \Longrightarrow UF_4 + F_2$, только ровно одна треть этого фтора выделится в виде газа, а две трети останутся связаны в ТФУ.
Ответ:
В массе M ГФУ содержится масса $m = 0,324\,M$ фтора. При указанной диссоциации получим: $m_1 = m/3 = 0,108\,M$ газообразного фтора, и соответственно, $M - m_1 = 0,892\,M$ ТФУ; $\mu_\tau = 238 + 4 \times 19 = 314$ *(аем)*.

Задача 2:
Заполненный ГФУ сосуд оказался нагретым до температуры $T(K)$ (в Кельвинах). Плотности твердых ГФУ: $\varrho_G = 5,1 \cdot 10^3$ (кг/м^3); ТФУ: $\varrho_\tau = 6,8 \cdot 10^3$ (кг/м^3); урана $U^{(238)}$: $\varrho_U = 18,9 \cdot 10^3$ (кг/м^3). Оценить, во сколько раз давление P на стенки сосуда будет больше атмосферного давления $\Pi = 1$ *(атм)*, в зависимости от типа диссоциации или возгонки UF_6.
Решение:
Если в сосуде помещается масса M ГФУ, то, согласно решению Задачи 1, на чистый уран приходится доля более двух третей этой полной массы ГФУ M, точнее: $M - 0,324\,M = 0,676\,M$. Если в результате диссоциации весь этот уран в твердом виде осядет в объеме:

$$w = \frac{0,676\,M}{\varrho_U} = \frac{0,676\,M}{18,9 \cdot 10^3\,(\text{кг/м}^3)} = 0,36\,\frac{M}{(\text{кг})} \cdot 10^{-4}(\text{м}^3), \tag{1}$$

составляющем лишь малую часть от полного объема сосуда:

$$W = \frac{M}{\varrho_G} = \frac{M}{5,1 \cdot 10^3\,(\text{кг/м}^3)} = 1,96\,\frac{M}{(\text{кг})} \cdot 10^{-4}(\text{м}^3), \tag{2}$$

то, в оставшемся свободном объеме:

$$V = W - w = \frac{M}{\varrho_G} - \frac{0,676\,M}{\varrho_U} = \left(\frac{1}{\varrho_G} - \frac{0,676}{\varrho_U}\right) M = \tag{3}$$

$$= (1,96 - 0,36)\,\frac{M}{(\text{кг})} \cdot 10^{-4}(\text{м}^3) = 1,6\,\frac{M}{(\text{кг})} \cdot 10^{-4}(\text{м}^3),$$

согласно Задаче 1, получаем $m = 0,324\,M$ газа молекулярного фтора F_2, с молекулярным весом $\mu = 2 \times 19 = 38$*(аем)*, который, в приближении идеального газа, создает в этом объеме давление:

$$P_0 = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu} = \frac{0,324\,M}{\left(\frac{1}{\varrho_G} - \frac{0,676}{\varrho_U}\right) M} \cdot \frac{RT}{\mu} = \frac{0,324}{\left(\frac{1}{\varrho_G} - \frac{0,676}{\varrho_U}\right)} \cdot \frac{RT}{\mu} \Longrightarrow \tag{4}$$
$$\Longrightarrow \frac{0,324\,M}{1,6\,M \cdot 10^{-4}}\,(\text{кг/м}^3) \cdot \frac{RT}{\mu} = 2,02 \cdot 10^3\,(\text{кг/м}^3) \cdot \frac{RT}{\mu}.$$

Поскольку, один грамм-моль фтора, то есть его количество в граммах (г), численно равное его молекулярному весу $\mu = 38$(г), как и любого другого газа, при нормальных условиях, то есть при температуре $\Theta = 273\,(K)$ и давлении $\Pi = 1$ *(атм)*, занимает объем $\Omega = 22,4\,(\text{литра}) = 22,4 \cdot 10^{-3}(\text{м}^3)$, то:

$$\Pi = \frac{\mu \cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega} \cdot \frac{R\Theta}{\mu} = \frac{38 \cdot 10^{-3}}{22,4 \cdot 10^{-3}}\,(\text{кг/м}^3) \cdot \frac{R\Theta}{\mu} = \tag{5}$$
$$= \frac{38}{22,4}\,(\text{кг/м}^3) \cdot \frac{R\Theta}{\mu} = 1,7\,(\text{кг/м}^3) \cdot \frac{R\Theta}{\mu}.$$

Разделив друг на друга правые и левые части уравнений (4) и (5), получим:

$$\frac{P_0}{\Pi} = \frac{\frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu}}{\Pi} = \frac{\frac{0,324}{\left(\frac{1}{\varrho_G} - \frac{0,676}{\varrho_U}\right)} \cdot \frac{RT}{\mu}}{\frac{\mu \cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega} \cdot \frac{R\Theta}{\mu}} = \frac{2,02 \cdot 10^3}{1,7} \cdot \frac{T}{\Theta} = 1188 \cdot \frac{T}{\Theta} \Longrightarrow \tag{6}$$

$$\Longrightarrow 1188 \cdot \frac{T}{273}, \quad \text{так как заведомо: } T > \Theta, \quad \text{то: } P_0 > 1188\,\textit{(атм)}. \tag{7}$$

Давление в случае диссоциации на твердый ТФУ и фтор дается очевидными заменами в (6): $m \mapsto m_1$, $V \mapsto V_1$, $\varrho_U \mapsto \varrho_\tau$, $0,324 \mapsto 0,108$; $0,676 \mapsto 0,892$:

$$\frac{P_1}{\Pi} = \frac{\frac{m_1}{V_1} \cdot \frac{RT}{\mu}}{\Pi} = \frac{\frac{0,108}{\left(\frac{1}{\varrho_G} - \frac{0,892}{\varrho_\tau}\right)} \cdot \frac{RT}{\mu}}{\frac{\mu \cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega} \cdot \frac{R\Theta}{\mu}} = \frac{1,66 \cdot 10^3}{1,7} \cdot \frac{T}{\Theta} = 977 \cdot \frac{T}{\Theta} \Longrightarrow \tag{8}$$

$$\Longrightarrow 977 \cdot \frac{T}{273}, \quad \text{так как заведомо: } T > \Theta, \quad \text{то: } P_1 > 977\,\textit{(атм)}. \tag{9}$$

То есть нижная оценка для давления освободившегося молекулярного фтора, независимо от массы M исходного ГФУ, полностью заполнявшей сосуд произвольного объема W, превышает давление воды на глубине 9 км.
Если же в результате диссоциации при температуре T уран также оказался в газообразном состоянии, то полное давление P на стенки сосуда объема W равно сумме парциальных давлений урана P_U и фтора P_F, и, аналогично (6), (7), тем же путем, для $\mu_U = 238$, находим, при

$$\frac{M}{W} \Longrightarrow \varrho_G : \quad \frac{P}{\Pi} = \frac{P_U}{\Pi} + \frac{P_F}{\Pi} = \frac{\dfrac{0,676\,M}{W} \cdot \dfrac{RT}{\mu_U}}{\dfrac{\mu_U \cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega} \cdot \dfrac{R\Theta}{\mu_U}} + \frac{\dfrac{0,324\,M}{W} \cdot \dfrac{RT}{\mu}}{\dfrac{\mu \cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega} \cdot \dfrac{R\Theta}{\mu}} = \tag{10}$$

$$= \left[\frac{0,676}{\dfrac{238}{22,4}} + \frac{0,324}{\dfrac{38}{22,4}}\right] \cdot 5,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{T}{\Theta} = 1298 \cdot \frac{T}{\Theta} \Longrightarrow 1298 \cdot \frac{T}{273} > 1298, \tag{11}$$

то есть, полное давление будет не менее, чем $P > 1298$ *(атм)*.
Плотность газообразной фазы должна быть существенно меньше плотности твердой фазы. Поэтому, ниже температуры диссоциации, ГФУ, почти полностью заполнявший сосуд, будет находиться в критической фазе, которую нельзя отнести ни к жидкой, ни к газообразной форме, и его состояние не будет аппроксимироваться уравнением идеального газа. Ниже температуры перехода в критическую фазу, то есть ниже критической температуры, ГФУ в закрытом сосуде будет находиться вблизи своей кривой фазового равновесия между твердой (жидкой) и газообразной фазами. При этом (см. Справочники Химика, под ред. Никольского и под ред. Рабиновича и Хавина), давление его насыщенного пара на этой кривой будет функционально $p = p^{t^0}$ связано с температурой его кипения/возгонки $t^0\,C$: $0,1^{-50,1}(mm\,\text{рт.ст})$; $1^{-30,2}(mm\,\text{рт.ст})$; $10^{-6,2}(mm\,\text{рт.ст})$; $100^{23,6}(mm\,\text{рт.ст})$; $1^{56,6}(\textit{атм})$; при температуре тройной точки: $2 > p^{64,5} > 1\,(\textit{атм})$; а при плавлении: $14,2^{64,5}(\textit{атм})$; и далее, $2^{74,4}(\textit{атм})$; $5^{107,9}(\textit{атм})$; $10^{139,6}(\textit{атм})$; $20^{177,5}(\textit{атм})$; $40^{222,6}(\textit{атм})$; а в критической точке: $p_{cr} = 45,5\,(\textit{атм})$, при $t^0_{cr} = +230,2(C)$. При $120(C)$ основная масса ГФУ будет находиться в жидкой фазе.
Если же при данной температуре T имеет место только полная возгонка или испарение ГФУ, занимавшего лишь некоторую $1/n$ – ную ($n \gg 1$), часть полного объема сосуда, то, во вновь применимом тогда приближении идеального газа, давление P_G газообразного ГФУ определяется, по прежнему, лишь его плотностью $\widetilde{\varrho}_G$ в $(\text{г}\cdot\text{см}^{-3})$, температурой $T(K)$, и молекулярным весом μ_G в $(\text{г}\cdot\text{моль}^{-1})$,

как: (напомним, что $1\,\text{Дж} = 1\,\text{н}\cdot\text{м} = 1\,\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{сек}^{-2}\cdot\text{м}$)

$$P_G = \widetilde{\varrho}_G \cdot \frac{RT}{\mu_G}, \quad \text{где газовая постоянная:}\;\; R = 8,31441\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\,K} = \tag{12}$$

$$= 8,314\cdot 10^7\,\frac{\text{эрг}}{\text{моль}\,K} = 1,9872\,\frac{\text{кал}}{\text{моль}\,K} = 82,057\,\frac{\text{см}^3\cdot\text{атм}}{\text{моль}\,K}. \tag{13}$$

При этом плотность газообразной фазы будет в n раз меньше плотности твердого ГФУ $\varrho_G = n\widetilde{\varrho}_G$, а объем сосуда вновь выпадает из ответа.
Поскольку, один грамм-моль любого идеального газа, то есть его количество в граммах (г), численно равное его молекулярному весу μ(г), при нормальных условиях, то есть при температуре $\Theta = 273\,(K)$ и давлении $\Pi = 1$ *(атм)*, занимает объем $\Omega = 22,4\,(\text{литра}) = 22,4\cdot 10^{-3}(\text{м}^3)$, то:

$$\Pi = \frac{\mu\cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega}\cdot\frac{R\Theta}{\mu}, \quad \left(\text{где в } \frac{RT}{\mu} \text{ размерность } \mu \text{ всегда есть } \frac{\text{г}}{\text{моль}}\right) \tag{14}$$

и, разделив друг на друга правые и левые части уравнений (12) и (14), в полном соответствии со значением (13) газовой постоянной R, при $\mu_G = 352$, получим:

$$\frac{P_G}{\Pi} = \frac{\dfrac{\varrho_G}{n}\cdot\dfrac{RT}{\mu_G}}{\dfrac{\mu_G\cdot 10^{-3}\,(\text{кг})}{\Omega}\cdot\dfrac{R\Theta}{\mu_G}} = \frac{5,1\cdot 10^3\,(\text{кг/м}^3)}{n\cdot\dfrac{352}{22,4}\,(\text{кг/м}^3)}\cdot\frac{T}{\Theta} = \frac{324}{n}\cdot\frac{T}{\Theta} \Longrightarrow \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \frac{324}{n}\cdot\frac{T}{273}, \quad \text{то есть:}\;\; P_G > \frac{324}{n}\;\textit{(атм)}. \tag{16}$$

Ответ:
При диссоциации ГФУ на уран и фтор давление в закрытом сосуде может достигать значений $P_0 > 1188$ *(атм)*, а при диссоциации на ТФУ и фтор, давление в закрытом сосуде может быть выше, чем $P_1 > 997$ *(атм)*, независимо от величины массы M исходного ГФУ, полностью заполнявшей сосуд произвольного объема W. Хотя процессы диссоциации идут при любых температурах, ниже температуры диссоциации процент диссоциированных молекул незначителен. Однако он резко возрастает при приближении к ней, как будет видно из решения Задач 8 и 9. Соответствующие температуры оказываются порядка нескольких тысяч кельвин. Причем, поскольку атомарный фтор имеет атомный вес $\mu_1 = 19$*(аем)*, вдвое меньший, его давление при тех же условиях будет вдвое больше, и поскольку диссоциация молекулярного фтора на атомарный $F_2 \leftrightarrow 2F$ достигает 50% уже при температурах $T \sim 1000(K)$, оценки P_0 и P_1 для атомарного фтора по сути удваиваются.

При полной возгонке/испарении ГФУ, занимавшего $1/n$- ую часть объема, давление $P_G > (324/n)$ *(атм)*. Для $n = 3 \gg 1$, при $t^0C = 80$, имеем

$$P_G = \frac{324}{3} \cdot \frac{T}{\Theta} = 108 \, \frac{273 + 80}{273} \approx 140 \; \textit{(атм)}. \tag{17}$$

Задача 3:
Оценить начальную температуру T_0, при которой фтор, вырвавшийся при давлении $P_{0,1}$ в атмосферу в результате взрыва сосуда из Задачи 2, "поплывет" по воздуху на некоторой высоте z. Молекулярный вес сухого воздуха $\mu_w = 29$*(аем)*
Решение:
Хотя процесс расширения фтора при взрыве не является равновесным, в конечном квазиравновесном состоянии давление P и плотность ϱ фтора должны совпадать, соответственно, с давлением $P_w(z)$ и плотностью $\varrho_w(z)$ атмосферного воздуха на той же высоте z. При этом оба газа находятся в гидростатическом, но еще не в термическом равновесии, и их вполне можно считать идеальными:

$$P = \varrho \, \frac{RT}{\mu}, \;\; P_w(z) = \varrho_w(z) \, \frac{RT_w(z)}{\mu_w}, \;\; \varrho = \frac{m}{V}, \;\; \text{откуда, для облака фтора,} \tag{18}$$

$$\text{на высоте } z, \text{ при: } \; P = P_w(z) < \Pi, \;\; \varrho = \varrho_w(z), \;\; \text{имеем: } \; \frac{T}{T_w(z)} = \frac{\mu}{\mu_w}. \tag{19}$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры T:

$$U(T) = U_0 + \frac{m}{\mu} C_V T, \tag{20}$$

и не зависит от занимаемого им объема V. Здесь C_V- молярная теплоемкость при постоянном объеме V. Изменение внутренней энергии ΔU связано законом сохранения энергии (первым началом термодинамики) с совершаемой работой ΔA и подведеным количеством тепла ΔQ: $\Delta U = \Delta Q - \Delta A$. Процесс расширения фтора при взрыве по сути является адиабатическим, то есть $\Delta Q = 0$. Работа против силы тяжести $\Delta A_{\mathrm{g}} = m\mathrm{g}h$. Сложнее оценить работу взрыва против сил атмосферного давления. Однако, при огромном перепаде давлений Задачи 2: $P_{0,1} - P_w(h) > \Delta P_F = P_{0,1} - \Pi$, фтор расширяется по сути в пустоту, то есть этой работой можно пренебречь. Тогда: $-\Delta U_h \approx \Delta A_{\mathrm{g}}$ и для оценки изменения температуры фтора в процессе взрывного расширения и подъема на высоту h имеем:

$$\frac{m}{\mu} C_V (T_0 - T_h) = m\mathrm{g}h, \;\; \text{откуда: } \; T_h = T_0 - \frac{\mu \mathrm{g} h}{C_V}. \tag{21}$$

Затем фтор, заброшенный взрывом на высоту h, будет медленно – квазистатически адиабатически подниматься (или опускаться) до равновесной высоты z, где его температура T_z и определяется уравнением (19), как:

$$T = T_z = \frac{\mu}{\mu_w} T_w(z). \tag{22}$$

Для малых приращений, в этой, уже квазиравновесной стадии процесса, из первого начала, с учетом (18) и (20), имеем:

$$0 \Longleftarrow \Delta Q = \Delta U(T) + \Delta A, \quad \text{где теперь:} \;\; \Delta A = P\Delta V = \Delta(PV) - V\Delta P, \tag{23}$$

$$\text{откуда:} \;\; \Delta Q = \Delta\left(\frac{m}{\mu} C_V T + PV\right) - V\Delta P = \Delta\left(\frac{m}{\mu} C_V T + \frac{m}{\mu} RT\right) - V\Delta P. \tag{24}$$

Рассматривая равновесный столбик любого газа высоты Δz в поле тяжести g, нетрудно найти условие его гидростатического равновесия на высоте z в виде:

$$P(z + \Delta z) - P(z) = \Delta P(z) = -\mathrm{g}\varrho(z)\Delta z. \tag{25}$$

Подставляя это в (23), (24), при постоянных C_V и $C_P = C_V + R$, получим, что

$$\frac{m}{\mu} C_P \Delta T = -m\mathrm{g}\Delta z, \;\; \Delta T = -\frac{\mu \mathrm{g}}{C_P}\Delta z, \;\; \text{так что:} \;\; T_z - T_h = -\frac{\mu \mathrm{g}}{C_P}(z - h). \tag{26}$$

Аналогичные соображения определяют и критическую по отношению к конвекции зависимость от высоты для самой температуры воздуха $T_w(z)$. Если полное изменение энергии при адиабатическом подъеме некоторой массы воздуха m_w на высоту Δz, с одновременным опусканием такой же массы воздуха на такую же высоту в другом месте (поле тяжести “отдыхает”) положительно, то конвекция отсутствует. Это изменение энергии дается тем же выражением (24): $\Delta Q_1 = \Delta Q_w$– для поднимающейся на $\Delta z_1 = \Delta z$ массы, и $\Delta Q_2 = -\Delta Q_1$,– для опускающейся, то есть поднимающейся на $\Delta z_2 = -\Delta z_1$, массы. Полное изменение энергии на единицу высоты тогда есть:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta z_1} + \frac{\Delta Q_2}{\Delta z_2} = 2\frac{\Delta Q_w}{\Delta z} = 2\left(\frac{m_w}{\mu_w} C_{Pw} \frac{\Delta T_w(z)}{\Delta z} - V_w \frac{\Delta P_w(z)}{\Delta z}\right) \geq 0.$$

Подставляя сюда условие гидростатического равновесия (25), в случае равенства, для критической по отношению к конвекции зависимости находим аналогичное (26) выражение:

$$T_w(z) = T_w(0) - \frac{\mu_w \mathrm{g} z}{C_{Pw}}, \;\; \text{где снова:} \;\; C_{Pw} = C_{Vw} + R. \tag{27}$$

Последовательно подставляя в (26) выражения (21), (22) и (27), получим
Ответ:

Чтобы фтор, заброшеный на высоту h, “плавал” затем в атмосфере на некоторой высоте z, его начальная температура T_0 должна быть равна:

$$T_0 = \frac{\mu}{\mu_w} T_w(0) + \mu g z \left(\frac{1}{C_P} - \frac{1}{C_{Pw}} \right) + \mu g h \left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \Longrightarrow \tag{28}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mu}{\mu_w} T_w(0) + \mu g h \left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) = \frac{\mu}{\mu_w} T_w(0) \left[1 + \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \frac{h}{z_{cw}} \right], \tag{29}$$

$$\text{где: } z_{cw} = \frac{R T_w(0)}{\mu_w g}, \text{ – для воздуха, а для фтора: } \gamma = \frac{C_P}{C_V} \Longrightarrow \gamma_w, \tag{30}$$

при: $C_{Pw} \Longrightarrow C_P$, так как сухой воздух, также будучи смесью лишь двухатомных газов O_2 и N_2, при тех же температурах имеет и такие же, как F_2, теплоемкости C_V (20) и C_P (27). Например, для $h = 0$ и $T_w(0) = 300(K)$, будет $T_0 = 393(K)$, то есть $120(C)$. Исчезновение зависимости от z означает что облако фтора будет в безразличном равновесии в атмосфере. Затем вырвавшийся фтор, очень медленно охлаждаясь за счет слабого теплообмена с окружающим воздухом, будет постепенно опускаться на землю, поскольку из уравнений (18) видно, что при одних и тех же давлении и температуре молекулярный фтор оказывается тяжелее воздуха:

$$\text{при: } P = P_w(z), \ \ T = T_w(z), \ \ \text{имеем: } \varrho = \frac{\mu}{\mu_w} \varrho_w(z) = 1,31\, \varrho_w(z). \tag{31}$$

Замечание 1: Во влажном воздухе часть фтора быстро выпадет дождем из плавиковой кислоты HF. Из (29) можно оценить высоту h в зависимости от T_0.
Замечание 2: Молярная теплоемкость определяется числом поступательных s_K, вращательных s_r, и колебательных f степеней свободы молекулы, “размороженных” при данной температуре T: $C_V = (s_K/2 + s_r/2 + f)R$. Для l - атомной молекулы: $s_K \equiv 3$, $s_r = 2$, или $s_r = 3$, $f = 3l - s_K - s_r$. Для двухатомных молекул ниже $10^3 K$: $s_r \equiv 2$, $f \mapsto 0$, откуда $C_V = C_{VF2} = C_{Vw} = 5R/2$.
Замечание 3: Уравнение для градиента температуры с высотой (26) можно получить более формальным путем, подставляя уравнение состояния (18) и условие гидростатического равновесия (25) в дифференциальное уравнение процесса равновесного адиабатического расширения в идеальном газе:

$$PV^\gamma = \text{const}, \ \ \text{или: } T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}, \ \ \text{то есть в: } \frac{\Delta P}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T}, \tag{32}$$

$$\text{откуда вновь: } \Delta T = -\frac{\mu g}{C_P} \Delta z, \ \ \text{где: } C_P = \gamma C_V = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \tag{33}$$

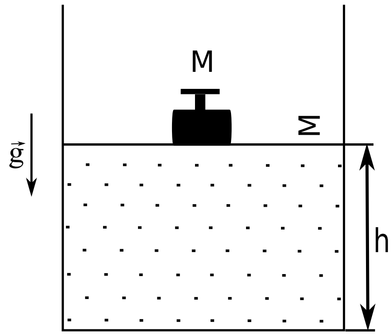

Рис. 1: К определению энтальпии и $\bar{c}_P$.

Замечание 4: Появление C_P в (26), (27) и координаты центра тяжести столба атмосферного воздуха z_{cw} (30) при фиксированной температуре T в (29) связано с тем, что именно C_P является теплоемкостью газа в однородном поле тяжести. Действительно, для N молекул столба идеального газа высоты h, находящегося в равновесии под поршнем массы M в поле тяжести g имеем потенциальную энергию поршня W, внутреннюю энергию теплового движения $U(T)$, и полную энергию системы газ+поршень – энтальпию $\mathrm{H}(T)$ в виде (см. Коткин Г.Л., Образовский Е.Г. Задачи по статистической физике. НГУ, Новосибирск, 2007):

$$W = M\mathrm{g}h = P\Sigma h = PV = NkT, \quad U(T) = N\bar{c}_V T, \tag{34}$$

$$\mathrm{H}(T) = U(T) + W = N\bar{c}_V T + NkT = N\bar{c}_P T, \tag{35}$$

$$\text{откуда, в расчете на одну частицу: } \frac{1}{N}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial T} = \bar{c}_P = \bar{c}_V + k. \tag{36}$$

Поскольку на каждый столбик высоты Δz в гидростатическом равновесии (25) как поршень давят все вышележащие слои, то, даже в условиях его локального термического равновесия при температуре $T(z)$, теплоемеостью его будет та же постоянная $\bar{c}_P$. Тогда, для N молекул массы M_1 в бесконечно высоком столбе сечением Σ, при единой температуре T и атмосферном давлении Π, имеем $\Pi\Sigma = NM_1\mathrm{g}$ и среднюю потенциальную энергию в терминах высоты его центра тяжести z_c, где число Авогадро N_A в (1/моль) связано с массой нуклона m_0:

$$\langle\!\langle W \rangle\!\rangle = NM_1\mathrm{g}z_c = \mathrm{H}(T) - U(T) = N\bar{c}_P T - N\bar{c}_V T = NkT, \tag{37}$$

$$\text{откуда: } z_c = \frac{kT}{M_1\mathrm{g}} = \frac{N_A kT}{N_A M_1 \mathrm{g}} = \frac{RT}{\mu\mathrm{g}}, \quad \text{где: } N_A = \frac{1\text{г}}{m_0}, \quad R = N_A k. \tag{38}$$

Прямой путь к z_c, – найти равновесную плотность $\varrho_w(z)$, исключив давление $P_w(z)$ из уравнений (18) и (25) (для w), при $T = \mathrm{const}$, и усреднить по ней z:

$$dP(z) \Longrightarrow \frac{RT}{\mu} d\varrho(z) \Rightarrow -\mathrm{g}\varrho(z)dz, \quad \text{или: } \frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{dz}{z_c}, \quad \varrho(z) = \varrho(0)e^{-z/z_c}, \tag{39}$$

$$\langle\!\langle z\rangle\!\rangle_{\varrho} \equiv \int\limits_0^{\infty} dz z \varrho(z) \left[\int\limits_0^{\infty} dz \varrho(z)\right]^{-1} = z_c = \frac{RT}{\mu \mathrm{g}} \mapsto \frac{8,314\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\,K}\,273\,K}{29\cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\,9,8\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}} \approx 8\,\text{км}. \quad (40)$$

Задача 4:
Оценить необходимую и достаточную скорость ветра, при которой случайно едва возникший единичный атом изотопа $F^{(18)}$, живущий 111 минут (Задача 4а), также успеет, вместе с облаком стабильного фтора Задачи 3, достичь плотины Иркутской ГЭС, находящейся примерно в 60 км от склада ГФУ на АЭХК.
Решение:
Рассмотрим процесс разгона молекул фтора молекулами воздуха в направлении ветра. Средняя скорость теплового движения молекул в выделенном направлении равна нулю, и не влияет на процесс разгона облака, как целого, также как и наличие у молекул поперечных к ветру компонент "тепловой скрости", которые будут приводить лишь к расплыванию облака фтора. Тогда радиоктивный фтор заведомо достигнет цели, если приобретет достаточную для этого скорость в нужном направлении уже в результате первого и единственного соударения с молекулой воздуха. Считая начальную скорость молекулы воздуха, с массой m_w, равной скорости ветра w, начальную скорость молекулы $F_2^{(18)}$, с массой m, в этом направлении равной нулю, а их удар, – абсолютно упругим, из законов сохранения импульса и энергии, для конечных скоростей молекул воздуха v, и, соответственно, фтора u, имеем уравнения:

$$m_w(w - v) = m(u - 0), \quad m_w(w^2 - v^2) = m(u^2 - 0^2), \ \text{ откуда:} \quad (41)$$

$$w + v = u, \quad w - v = \frac{m}{m_w}\,u = \frac{\mu}{\mu_w}\,u, \ \text{ что при сложении дает:} \quad (42)$$

$$w = \frac{\mu + \mu_w}{2\mu_w}\,u = \frac{36+29}{2\cdot 29}\,u = 1,12\,u \Longrightarrow \frac{1,12\cdot 6\cdot 10^4}{111\cdot 60}\,(\text{м/сек}) = 10,1\,(\text{м/сек}), \quad (43)$$

$$\text{то есть после первого удара: } u = \frac{2\mu_w}{\mu + \mu_w}\,w, \quad v = -w\,\frac{\mu - \mu_w}{\mu + \mu_w} < 0. \quad (44)$$

Здесь учтено, что $\mu = 36$*(аем)* для $F_2^{(18)}$, и что отношение масс молекул равно отношению их молекулярных весов. При следующем столкновении молекулы фтора u с "молекулой ветра" w имеем аналогичные уравнения законов сохранения импульса и энергии для конечных скоростей молекул воздуха v_2 и фтора u_2 при одномерном абсолютно упругом соударении:

$$m_w(w - v_2) = m(u_2 - u), \quad m_w(w^2 - v_2^2) = m(u_2^2 - u^2), \ \text{ откуда:} \quad (45)$$

$$w + v_2 = u_2 + u, \quad (w - v_2) = \frac{m}{m_w}(u_2 - u) = \frac{\mu}{\mu_w}(u_2 - u), \ \text{ и тем же путем:} \quad (46)$$

$$u_2 = \frac{2\mu_w}{\mu+\mu_w}\,w + \left(\frac{\mu-\mu_w}{\mu+\mu_w}\right)u = \left(1+\frac{\mu-\mu_w}{\mu+\mu_w}\right)u = \frac{2\mu}{\mu+\mu_w}\,u, \tag{47}$$

$$\text{так что при: } u = \frac{2\mu_w}{\mu+\mu_w}\,w, \text{ имеем: } u_2 = \frac{4\mu\mu_w}{(\mu+\mu_w)^2}\,w, \quad u < u_2 < w, \tag{48}$$

$$\text{так как: } \mu_w < \mu, \ \frac{2\mu_w}{\mu+\mu_w} < 1, \ \frac{2\mu}{\mu+\mu_w} > 1, \text{ но: } \frac{4\mu\mu_w}{(\mu+\mu_w)^2} = \left(\frac{2\sqrt{\mu\mu_w}}{\mu+\mu_w}\right)^2 < 1,$$

поскольку, среднее арифметическое всегда не меньше среднего геометрического.

Для скорости молекулы фтора u_n после n-ого соударения с “молекулой ветра” w точно также находим аналогичное (47) рекурентное выражение через ее “предыдущую” скорость u_{n-1} (v_n – конечная скорость “молекулы ветра”):

$$m_w(w-v_n) = m(u_n-u_{n-1}), \quad m_w(w^2-v_n^2) = m(u_n^2-u_{n-1}^2), \text{ откуда снова:}$$
$$w+v_n = u_n+u_{n-1}, \quad (w-v_n) = \frac{m}{m_w}(u_n-u_{n-1}) = \frac{\mu}{\mu_w}(u_n-u_{n-1}), \text{ и:}$$
$$u_n = \frac{2\mu_w}{\mu+\mu_w}\,w + \left(\frac{\mu-\mu_w}{\mu+\mu_w}\right)u_{n-1} \equiv Aw + Bu_{n-1}, \text{ или, после } k\text{- шагов назад:}$$
$$u_n = A\left(1+B+B^2+\ldots+B^{k-1}\right)w + B^k u_{n-k}, \text{ что при: } k=n, \ u_0=0,$$
$$\text{дает: } u_n = A\,\frac{1-B^k}{1-B}\,w + B^k u_{n-k} \Longrightarrow A\,\frac{1-B^n}{1-B}\,w = \left[1-\left(\frac{\mu-\mu_w}{\mu+\mu_w}\right)^n\right]w. \tag{49}$$

При $n = 1,2$ вновь приходим к выражениям (44) и (48). Минимальная возможная скорость ветра отвечает равенству $u_n = w$, которое достигается, таким образом, лишь при $n \to \infty$:

$$w = u_\infty = \frac{6\cdot 10^4}{111\cdot 60}\,(\text{м/сек}) = 9{,}01\,(\text{м/сек}). \tag{50}$$

Ответ:
Заведомо достаточная скорость равна $10{,}1$ (м/сек). Минимально необходимая скорость ветра равна $9{,}01$ (м/сек).

Задача 4а:
Из 5-ти изотопов фтора $F^{(16,17,18,20,21)}$ только изотоп $F^{(18)}$ имеет сравнительно большой период полураспада, равный 111-ти минутам, а остальные изотопы распадаются за несколько секунд или минут. Оценить возможности возникновения атомов такого радиоактивного изотопа фтора из стабильного изотопа $F^{(19)}$ под действием различных осколков деления ядер урана $U^{(238,235)}$ в ГФУ UF_6.
Решение:
Согласно монографии С. Глесстона, “Атом, атомное ядро, атомная энергия”,

М. ИЛ, 1961, и с учетом: "Физический энциклопедический словарь", М. СЭ, 1983, а также В.В. Маляров, "Основы теории атомного ядра", М. Наука, 1967, Широков Ю.М., Юдин Н.П., "Ядерная физика", М. Наука, 1980, и данных из http://www.nndc.bnl.gov/chart/, имеем: что полная энергия связи нуклонов в ядре изотопа $F^{(18)}$ на 10,43 Мэв выше полной энергии связи нуклонов в ядре $F^{(19)}$, и для осуществления реакции:

$$X + F^{(19)} \longmapsto X + n + F^{(18)}, \tag{51}$$

необходимо иметь такой X с *кинетической* энергией, по крайней мере, выше этих $\varepsilon_0 = 10,43\,\text{Мэв}$ после преодоления им кулоновского барьера ядра[1] $F^{(19)}$.

Вероятность спонтанного деления ядра $U^{(238)}$ в 35 раз выше, чем $U^{(235)}$, но в 1 грамме $U^{(238)}$ ежечасно спонтанно делится всего лишь примерно 25 ядер[2]; полная *кинетическая* энергия $E_1 + E_2$, – как правило, двух, в основном, не одинаковых осколков деления $(M_1 \mapsto A_1, Z_1, R_1, v_1, E_1)$ и $(M_2 \mapsto A_2, Z_2, R_2, v_2, E_2)$, есть энергия их кулоновского отталкивания $\mathcal{U}$ в ядре $U^{(238)}$. Она пропорциональна произведению их зарядов и, в силу закона сохранения импульса для изначально покоившегося ядра $U^{(238)}$, делится между ними на E_1 и E_2 *обратно пропорционально* их массам, суть массовым числам, $A_1 + A_2 = A_U$:

$$E_1 + E_2 = \mathcal{U} = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{(R_1 + R_2)} \approx 200\,\text{Мэв}, \quad E_i = \frac{M_i v_i^2}{2}, \quad i = 1, 2, \tag{52}$$

$$M_1 v_1 = M_2 v_2, \quad (M_1 v_1)^2 = (M_2 v_2)^2, \quad \frac{E_1}{E_2} \equiv \frac{M_1 v_1^2}{M_2 v_2^2} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{A_2}{A_1}. \tag{53}$$

$$E_i = \mathcal{U}\,\frac{A_{3-i}}{A_U} \Longrightarrow \begin{cases} E_1 = 117,65\,\text{Мэв}, & \text{при } A_1 = 98, \\ E_2 = 82,35\,\text{Мэв}, & \text{при } A_2 = 140. \end{cases} \tag{54}$$

Т.к. 92 протона урана делятся, в основном, *прямо пропорционально* A_i, то высота аналогичного кулоновского барьера для i-го осколка, $i = 1, 2$, и фтора $F^{(19)}$ $(M_{19} \mapsto A_F = 19, Z_F = 9, R_F)$, при $R_A = R_0 \cdot A^{1/3}$, $R_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см, равна:

$$W_i = \frac{e^2 Z_i Z_F}{(R_i + R_F)} = \mathcal{U}\,\frac{Z_i Z_F}{Z_1 Z_2}\,\frac{(R_1 + R_2)}{(R_i + R_F)} = \tag{55}$$

$$= \mathcal{U}\,\frac{Z_F}{Z_{3-i}}\,\frac{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})}{(A_i^{1/3} + A_F^{1/3})} \Longrightarrow \mathcal{U}\,\frac{9}{Z_{3-i}}\,\frac{(98^{1/3} + 140^{1/3})}{(A_i^{1/3} + 19^{1/3})} \Longrightarrow \tag{56}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} W_1 = 44,9\,\text{Мэв}, & E_1 - W_1 = 72,75\,\text{Мэв}, & \text{при } Z_1 = 38, \\ W_2 = 59\,\text{Мэв}, & E_2 - W_2 = 23,28\,\text{Мэв}, & \text{при } Z_2 = 54. \end{cases} \tag{57}$$

---

[1] Существующий изомер $F^{(19)}$ со спин/четностью $J\pi = 5/2-$, хотя и имеет энергию основного состояния на 4,68 Мэв выше основного стабильного изитопа $F^{(19)}$ с $J\pi = 1/2+$, но живет слишком мало, чтобы заметно повлиять на эту ситуацию.

[2] Т.к. вероятность деления $U^{(238)}$ почти в два миллиона раз меньше, чем его α- распада

Казалось бы, у обоих осколков имеется еще значительный запас кинетической энергии $E_i - W_i$ для осуществления реакции (51). Однако, не все так просто: выражения для энергий в (57) отвечают только случаю ядра $F^{(19)}$, неподвижно закрепленного в молекуле ГФУ, удаленной от делящегося ядра $U^{(238)}$. Но, энергия связи атома фтора в ней не превышает нескольких электронвольт (см. Задачу 9, 9а), а электроны очень далеки от ядра $F^{(19)}$ по ядерным масштабам (атом, в основном, пуст), и это ядро может быть легко выбито из молекулы ГФУ.

Пусть в лабораторной системе отсчета (системе покоя ГФУ) i- ый осколок имеет прежнюю начальную скоростью (52) $v_i = (2E_i/M_i)^{1/2}$, но ядро $F^{(19)}$, как из "своей" же, так и из "чужой" молекулы $U^{(238)}F_6$ уже не будет оставаться неподвижным, разгоняясь приближающимся осколком. При этом кулоновский барьер для него в "своей" молекуле оказывается чуть-чуть меньше (R_G- радиус молекулы ГФУ из Задач 7,8,9):

$$W_i \longmapsto \Delta W_i = W_i - w_i, \quad w_i = \frac{e^2 Z_i Z_F}{R_G} = W_i \frac{R_i + R_F}{R_G} \simeq 10^{-3} W_i. \tag{58}$$

Удобно тогда сразу перейти в систему их общего центра масс $\boldsymbol{\rho}$ (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Механика", М: Наука, 1973, §§16, 17), при $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$, $\dot{\mathbf{r}}_{19} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{M_i \mathbf{r}_i + M_{19}\mathbf{r}_{19}}{M_i + M_{19}}, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{M_i \dot{\mathbf{r}}_i + M_{19}\dot{\mathbf{r}}_{19}}{M_i + M_{19}} \Longrightarrow \frac{M_i}{M_i + M_{19}}\mathbf{v}_i, \quad \text{где:} \tag{59}$$

$$\mathbf{v}_i' = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\boldsymbol{\rho}} \Longrightarrow \frac{M_{19}}{M_i + M_{19}}\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{u}_i' = \dot{\mathbf{r}}_{19} - \dot{\boldsymbol{\rho}} \Longrightarrow -\frac{M_i}{M_i + M_{19}}\mathbf{v}_i. \tag{60}$$

Их начальная относительная скорость в любой системе отсчета равна:

$$\mathbf{v}_i' - \mathbf{u}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{0} = \mathbf{v}_i. \tag{61}$$

В системе центра масс, где их полный импульс *всегда* остается равным нулю, осколок и ядро $F^{(19)}$ движутся с одинаковыми по абсолютной величине и противоположными по направлению начальными относительными импульсами:

$$\mathbf{p}_{i\infty} = M_i \mathbf{v}_i' = \mu_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{p}_{19\infty} = M_{19}\mathbf{u}_i' = -\mu_i \mathbf{v}_i = -\mathbf{p}_{i\infty}, \quad \text{т.е.: } \mathbf{p}_{i\infty} + \mathbf{p}_{19\infty} \equiv 0, \tag{62}$$

где $\mu_i = M_{19}M_i/(M_i + M_{19})$, – приведенная масса этих частиц. Полная начальная кинетическая энергия их относительного движения (где $(\mathbf{v}_i)^2 \equiv v_i^2$, и т.д.):

$$\mathcal{K}_i^\infty = \frac{M_i (v_i')^2}{2} + \frac{M_{19}(u_i')^2}{2} = \frac{(M_i M_{19}^2 + M_{19} M_i^2) v_i^2}{2(M_i + M_{19})^2} = \frac{\mu_i v_i^2}{2} = \frac{p_{i\infty}^2}{2\mu_i}, \tag{63}$$

частично пойдет на преодоление их кулоновского барьера (55), (58). Для осуществления реакции (51) необходимо, чтобы *оставшаяся внутренняя кинетическая энергия относительного движения* $\mathcal{K}_i^0$, отвечающая оставшемуся импульсу относительного движения $\mathbf{p}_{i0} = M_i\mathbf{V}_i = -M_{19}\mathbf{u}_i = -\mathbf{p}_{19\,0}$, превышала на величину энергии связи ε_0 сумму кинетических энергий всех частиц в конечном состоянии. Тогда, вклад энергии связи здесь будет максимален, когда *все* эти конечные кинетические энергии равны нулю, что автоматически отвечает, по прежнему, равному нулю и полному импульсу системы в конечном состоянии, при нулевых импульсах относительного движения конечных частиц. Т.е. конечное ядро фтора $F^{(18)}$, осколок и выбитый нейтрон после столкновения имеют одинаковые, – нулевые скорости и покоятся в этой системе отсчета после столкновения, и согласно законам сохранения энергии и импульса, имеем:

$$\mathcal{K}_i^0 \equiv \frac{p_{i0}^2}{2\mu_i} = \mathcal{K}_i^\infty - W_i = \frac{\mu_i v_i^2}{2} - W_i = \frac{M_i\widetilde{V}_i^2}{2} + \frac{M_{18}\widetilde{u}_i^2}{2} + \frac{m\widetilde{u}^2}{2} + \varepsilon_0, \tag{64}$$

$$M_i\widetilde{V}_i \Longrightarrow M_{18}\widetilde{u}_i \Longrightarrow m\widetilde{u} \Longrightarrow 0, \quad (m\widetilde{u},\ \text{– импульс выбитого нейтрона}) \tag{65}$$

$$\text{откуда:}\ \ \mathcal{K}_i^0 \equiv \frac{M_{19}}{M_i + M_{19}}\, E_i - W_i \Longrightarrow \varepsilon_0. \tag{66}$$

Отсюда энергия связи ε_0 не должна превышать этой величины $\mathcal{K}_i^0$. Однако, найденная таким образом из предыдущего, эта величина (66), оказывается отрицательна, $\mathcal{K}_i^0 < 0$! То есть кулоновский барьер оказался непреодолим для подвижного ядра фтора, и реакция (51) оказывается возможна только для ядра $F^{(19)}$, остающегося по каким-то причинам закрепленным в "чужой" молекуле $U^{(238)}F_6$ (взаимодействие без отдачи, аналогичное эффекту Мессбауэра), а потому весьма маловероятна. Менее жесткими энергетические ограничения будут для реакции подхвата нейтрона, типа хорошо изученной реакции

$$N_7^{(14)} + F_9^{(19)} \longmapsto N_7^{(15)} + F_9^{(18)}, \quad \text{если здесь возможна замена:}\ \ N \to X.$$

Однако, есть и другие возможности. Осколки перегружены нейтронами и в среднем их вылетает от двух до трех штук на каждый акт деления. Распределение нейтронов деления по энергиям является приближенно максвелловским, со среднеквадратичной энергией $\sqrt{\ll\varepsilon^2\gg} = \lambda kT \simeq 1,3\,$Мэв, $\lambda = \sqrt{15}/2 \approx 1,94$, причем для нейтрона, при $X \to n$, кулоновский барьер, очевидно, вовсе отсутствует. Такая высокая термализация этих нейтронов (как спонтанного, так и вынужденного) деления связана как с их Ферми-разбросом по энергиям внутри осколков, так и с тем, что нейтроны излучаются уже движущимися осколками, и аналогична хорошо известному эффекту Доплера. Соответствующая максвелловская вероятность: обнаружить нейтрон с энергией $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ тогда равна:

$$w(\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon f_{\mathcal{M}}(\varepsilon) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}} \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/(kT)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{y_0}^{\infty} dy \sqrt{y} e^{-y}, \tag{67}$$

$$\text{где: } y = \frac{\varepsilon}{kT}, \quad y_0 = \frac{\varepsilon_0}{kT} \approx 15,537, \quad \text{откуда: } w(\varepsilon_0) \simeq \frac{2\sqrt{y_0}}{\sqrt{\pi}} e^{-y_0} \simeq 8 \cdot 10^{-7}. \quad (68)$$

С учетом решения Задачи 1, в имеющихся на АЭХК порядка 500 000 тонн ГФУ только спонтанных делений ежесекундно происходит не менее, чем:

$$0,676 \cdot \frac{25 \cdot 5 \cdot 10^{11}}{60 \cdot 60} \approx 2,35 \cdot 10^9, \quad \text{т.е. рождается не менее } N \simeq 10^{10} \quad (69)$$

$$\text{нейтронов, из которых “всего лишь”: } Nw(\varepsilon_0) \sim 10^4 \text{ нейтронов} \quad (70)$$

имеют достаточные энергии для осуществления реакции (51). (Если же имелась ввиду средняя энергия $\ll\varepsilon\gg$, то $\lambda = 3/2$, $w(\varepsilon_0) \simeq 2,4 \cdot 10^{-5}$, и $Nw(\varepsilon_0) \sim 10^5$). Ее эффективное сечение σ_F, которое “видит” нейтрон:

$$\sigma_F \simeq \begin{cases} \pi R_F^2, & \text{при: } R_F \gg \Lambda, \\ \pi \Lambda^2, & \text{при: } R_F \ll \Lambda, \\ \pi \left(\Lambda + R_F\right)^2, & \text{при: } R_F \sim \Lambda, \end{cases} \quad \text{где: } \Lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}}, \quad (71)$$

– де Бройлевская длина волны нейтрона, и в нашем случае наиболее подходящим будет как раз последнее выражение.

Ответ:

В имеющейся на АЭХК массе ГФУ вполне возможно периодическое возникневение единичных атомов изотопа $F^{(18)}$.

Задача 5:

В процессе обогащения доля x активного урана $U^{(235)}$ повышается с $0,7\%$ до 5% от всего урана, содержащегося в ГФУ $U^{(238,235)}$. При каком критическом значении x_{cr} этой доли возникает принципиальная возможность ядерного взрыва при диссоциации ГФУ в полностью заполненном контейнере с $M = 10,5$ тонн ГФУ, если критическая масса $U^{(235)}$ составляет $\Delta = 50$(кг).

Решение:

Если в сосуде помещается масса M ГФУ, то, согласно решению Задачи 2, на чистый уран остается более двух третей этой массы M, точнее: $M - 0,324\, M = 0,676\, M$. Если, в результате диссоциации весь этот уран осядет в твердом виде в объеме w, то существует отличная от нуля вероятность, что все имеющиеся атомы $U^{(235)}$ соберутся в критическом шарообразном объеме v с критическим радиусом порядка $r_c = 8,5$ см. Их критическая доля по массе x_{cr}, определяющая принципиальную возможность ядерного взрыва, тогда равна:

$$x_{cr} = \frac{\Delta}{0,676\, M} \Longrightarrow \frac{50(\text{кг})}{0,676 \cdot 1,05 \cdot 10^4(\text{кг})} \approx 7 \cdot 10^{-3} \equiv 0,7\%. \quad (72)$$

Ответ:
При массе ГФУ 10,5 тонны ядерный взрыв становится в принципе возможен уже для необогащенного уранового концентрата при $x_{cr} = 7 \cdot 10^{-3} = 0,7\%$. Пока, однако, речь идет о весьма маловероятном событии. К тому же температура диссоциации ГФУ очень высока, как будет видно в Задаче 8.

Задача 5а:
Выяснить, при каких условиях ядерный взрыв станет в принципе возможен в ГФУ UF_6.
Решение:
В ГФУ каждый атом урана "укутан шубой" из 6-ти атомов фтора, поэтому, плотность ГФУ почти в 4-ре раза меньше плотности урана. По данным Задачи 7, эта "шуба" практически прозрачна для тепловых нейтронов, – с энергиями $0,5 \div 0,005$ эв, сечение поглощения которых ядрами фтора $\sim 10^{-6}$ от сечения поглощения ядрами $U^{(235)}$, и $\sim 10^{-3}$ от сечения поглощения ядрами $U^{(238)}$, а рассеяние на фторе быстрых нейтронов, замедляя, переводит их в тепловые, чем только увеличивает поток последних и вероятность взрыва. Тогда, казалось бы, что в предыдущих рассуждениях ничего не изменится, если заменить объем осевшего твердого урана w полным объемом ГФУ W, а критический объем урана v, – критическим объемом V_{cr} ГФУ $U^{(235)}$, содержащим *ту же самую* критическую массу Δ активных атомов урана, то есть, то же самое критическое число n_{cr} атомов урана $U^{(235)}$, но уже в форме ГФУ, с массой M_Δ:

$$M_\Delta = \frac{\Delta}{0,676}, \quad V_{cr} = \frac{M_\Delta}{\varrho_G} \Longrightarrow \frac{\Delta}{0,676\, M} W = x_{cr} W. \tag{73}$$

$$\text{Однако:} \ \frac{V_{cr}}{v} = \frac{M_\Delta}{v\varrho_G} = \frac{\Delta}{0,676\, v\varrho_G} = \frac{\varrho_{U^5}}{0,676\,\varrho_G} = \frac{19,5}{0,676 \cdot 5,1} = 5,656 \equiv \eta. \tag{74}$$

При этом, однако, радиус такого "критического" объема V_{cr} возрастает в $1,78$ раза, а площадь его поверхности, – в $3,18$ раза, что приводит к резкому увеличению потерь тепловых нейтронов, вылетающих теперь наружу так и не столкнувшись с ядрами $U^{(235)}$. То есть эти "разрыхленные" фтором n_{cr} активных атомов НЕ образуют более критической массы для запуска цепной реакции ядерного взрыва.
Новый критический радиус R_c такой "рыхлой" среды можно оценить, решая в ней стационарное уравнение диффузии нейтронов, например, в односкоростном приближении с использованием закона Фика (см. Валл А.Н., Наумов В.А., Растегин А.Э., Физическая кинетика, Уч. пос., ИГУ, 2001). При этом критический радиус определяется решением y_0 трансцендентного уравнения:

$$\tan y = \frac{y}{1 - y\xi_1}, \quad R_c = \frac{y_0}{\chi}, \quad \chi = \overline{\mathrm{N}}\sigma\xi_2, \tag{75}$$

где: $\sigma = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_a$ - сумма сечений рассеяния, деления и радиационного захвата нейтрона отдельным ядром $U^{(235)}$, ξ_1, ξ_2 – некоторые *две* независимые безразмерные комбинации этих же *трех* сечений[3]; $\overline{\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{N}}_G$ – плотность числа этих ядер в ГФУ. Поскольку, ξ_1, ξ_2, y_0 – не зависят от плотности числа активных ядер, критический радиус r_c прежнего критического объема v для чистого урана определяется той же формулой при $\overline{\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{N}}_U$. Но отношение этих плотностей числа активных ядер в чистом $U^{(235)}$ $\overline{\mathrm{N}}_U$, и в его ГФУ $\overline{\mathrm{N}}_G$, дается как раз отношением η объемов (74). Откуда, для новых критических: радиуса R_c, объема Y_c, и полного числа активных ядер H_c:

$$R_c = \eta r_c \equiv 5,656 \cdot 8,5 \approx 48,1\,\text{см}, \quad Y_c = \eta^3 v, \tag{76}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{N}}_U}{\overline{\mathrm{N}}_G} = \eta, \quad H_c = \overline{\mathrm{N}}_G Y_c = \eta^2 v \overline{\mathrm{N}}_U = \eta^2 n_{cr} \approx 32\, n_{cr}, \tag{77}$$

– число активных ядер в новой, – критической массе “для ГФУ”, равной m_Δ, которую, однако, можно теперь “наскрести” лишь в сосуде с общей массой $\mathcal{M}$ необогащенного еще ГФУ, при $x = 0,7\%$:

$$m_\Delta = \eta^2 \Delta \approx 32 \cdot 50(\text{кг}) = 1,6 \cdot 10^3(\text{кг}), \quad \mathcal{M} = \frac{m_\Delta \cdot 10^3}{7 \cdot 0,676} \approx 338,1\,(\text{тонн}). \tag{78}$$

Таким образом, для осуществления ядерного взрыва нет нужды в диссоциации ГФУ на уран и фтор. Вполне достаточно, чтобы его молекулы просто оставались подвижными в жидкой или в критической фазе ГФУ.

Ответ:

Ядерный взрыв становится в принципе возможен уже для необогащенного ГФУ, $x_{cr} = 7 \cdot 10^{-3} = 0,7\%$, заполняющего в жидкой или критической фазе емкость объемом $\mathcal{M}/\varrho_G = 66,3\,\text{м}^3$. Хотя вероятность осуществления такой конфигурации молекул ГФУ за счет их теплового движения пока ничтожно мала.

Задача 6:

Оценить во сколько раз возрастает вероятность ядерного взрыва в процессе обогащения урана, в зависимости от доли x атомов $U^{(235)}$ в полной массе урана $U^{(238,235)}$, содержащейся в массах M и $\mathcal{M}$ ГФУ в контейнерах из Задач 5 и 5а.

Решение:

[3]Пренебрежение сечением захвата фтором тепловых нейтронов оправдано (107) и таблицей данных из Задачи 7. Пренебрежение сечением их рассеяния фтором можно оправдать компенсацией их рассеянного потока за счет отмеченного выше перевода тем же рассеянием быстрых нейтронов в тепловые. Т.е. для оценки предполагаем, что оба эффекта взаимно компенсируются, и критическая масса по прежнему зависит лишь от сечений на ядрах $U^{(235)}$.

Вероятность ядерного взрыва определяется произведением различных квантовомеханических и геометрических факторов, влияющих на эффективный коэффициент размножения нейтронов, который для развития лавинообразной ядерной цепной реакции должен быть заметно больше единицы (смотри, например, Физический энциклопедический словарь, М: 1983 г). Однако, все эти факторы относятся лишь к отдельному акту деления ядра $U^{(235)}$ и одинаковы для одной и той же однородной (гомогенной) среды, и одной и той же формы и размеров критического объема. Поэтому они сократятся в интересующем нас отношении вероятностей, которое будет определяться тогда лишь отношением комбинаторных факторов, отвечающих различным концентрациям $U^{(235)}$.
Пусть плотности чистых урана $U^{(238)}$ и $U^{(235)}$ равны: $\varrho_{U^8} = 18,9 \cdot 10^3\,(\text{кг}/\text{м}^3)$ и $\varrho_{U^5} = 19,5 \cdot 10^3\,(\text{кг}/\text{м}^3)$. Согласно решению Задачи 2, в результате диссоциации весь этот твердый уран может осесть в объеме w, в котором для критической массы $U^{(235)}$ окажется отведен лишь малый критический объем v:

$$w \approx \frac{0,676\,M}{\varrho_{U^8}}, \qquad v = \frac{\Delta}{\varrho_{U^5}}. \tag{79}$$

Вероятность найти в объеме v один единственный имеющийся атом урана $U^{(235)}$, гулявший по всему объему w, равна:

$$q = \frac{v}{w} = \frac{\varrho_{U^8}}{\varrho_{U^5}}\,\frac{\Delta}{0,676\,M} = \frac{\varrho_{U^8}}{\varrho_{U^5}}\,x_{cr} \Longrightarrow 0,97\,x_{cr} \longmapsto x_{cr}, \tag{80}$$

если пренебречь различием ϱ_{U^8} и ϱ_{U^5}. Вероятность того, что все имеющиеся λ атомов $U^{(235)}$, гулявшие по объему w, соберутся в том же объеме v, дается тогда произведением вероятностей таких независимых событий для каждого из этих λ атомов, то есть равна q^λ. Если в объеме v находятся первые λ атомов из всех $n > \lambda$ атомов урана $U^{(235)}$, а остальные $n-\lambda$ атомов находятся вне его, – в объеме $w - v$, то это дает еще один аналогичный фактор в вероятность такого события: $q^\lambda(1-q)^{n-\lambda}$, поскольку, аналогичная (80) вероятность, найти каждый отдельный атом в объеме $w - v$ равна $1 - q$. Не интересуясь нумерацией одинаковых атомов $U^{(235)}$, оказавшихся либо внутри либо снаружи объема v, такое их распределение по этим объемам можно осуществить C_n^λ различными способами, то есть, числом сочетаний из n по λ, равным полному числу перестановок $n!$ из n абсолютно одинаковых атомов $U^{(235)}$, деленному на независимые перестновки между собой только атомов в объеме v и только атомов в объеме $w - v$, соответственно, $\lambda!$ и $(n - \lambda)!$, которые не дают новых способов распределения. В итоге прходим к биномиальному распределению для атомов $U^{(235)}$: $\mathcal{B}_n^\lambda = q^\lambda(1 - q)^{n-\lambda}C_n^\lambda$. При наличии еще $N - n$ атомов $U^{(238)}$ в объеме $w - v$ имеем в вероятности еще дополнительный фактор $(1 - q)^{N-n}$. Так что абсолютная вероятность интересующего нас события пропорциональна

$$\mathcal{P}^{\lambda}_{n,N}=\mathcal{B}^{\lambda}_{n}(1-q)^{N-n}=q^{\lambda}(1-q)^{n-\lambda}C^{\lambda}_{n}(1-q)^{N-n}=q^{\lambda}(1-q)^{N-\lambda}\frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!},\quad(81)$$

где $n=xN$, при условии, что $\lambda\Longrightarrow n_{cr}=x_{cr}N\approx 1,032\,qN\simeq qN$, причем, больше атомов в v просто не поместится! Но это означает, что наши атомы отнюдь не точечные, как мы предполагали выше, а имеют конечный объем ε. Тогда при добавлении $k+1$- го атома в объем v, где уже имеется k атомов, ему остается доступен лишь объем $v-k\varepsilon$, что меняет $k+1$-ый сомножитель q в вероятности q^{λ} на $q-k\sigma$, где $\sigma=\varepsilon/w$. Аналогично $k+1$- ый множитель $(1-q)$ меняется на $(1-q-k\sigma)$. Тогда в (81) нужно заменить:

$$q^{\lambda}\longrightarrow\prod_{k=0}^{\lambda-1}(q-k\sigma)\,,\qquad(1-q)^{N-\lambda}\longrightarrow\prod_{k=0}^{N-\lambda-1}(1-q-k\sigma)\,,\quad(82)$$

$$\mathcal{P}^{\lambda}_{n,N}\Longrightarrow\frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!}\cdot\prod_{k=0}^{\lambda-1}(q-k\sigma)\cdot\prod_{k=0}^{N-\lambda-1}(1-q-k\sigma)\,,\ \text{ что, при:}\quad(83)$$

$$q=\frac{\lambda}{N},\ \ \varepsilon=\frac{v}{n_{cr}}=\frac{v}{\lambda}=\frac{v}{qN},\quad\text{то есть:}\ \ \sigma=\frac{\varepsilon}{w}=\frac{v}{w\lambda}=\frac{q}{\lambda}=\frac{1}{N},\quad(84)$$

$$\text{дает:}\ \prod_{k=0}^{\lambda-1}(q-k\sigma)=\prod_{k=0}^{\lambda-1}\left(\frac{\lambda-k}{N}\right)=\left(\frac{1}{N}\right)^{\lambda}\lambda!,\quad(85)$$

$$\prod_{k=0}^{N-\lambda-1}(1-q-k\sigma)=\prod_{k=0}^{N-\lambda-1}\left(\frac{N-\lambda-k}{N}\right)=\left(\frac{1}{N}\right)^{N-\lambda}(N-\lambda)!,\quad(86)$$

$$\text{так что:}\ \mathcal{P}^{\lambda}_{n,N}=\left(\frac{1}{N}\right)^{N}\frac{n!\,(N-\lambda)!}{(n-\lambda)!}.\quad(87)$$

В жидком (или критическом) ГФУ, согласно (78) и решению Задачи 5a, необходимо заменить: $M\mapsto\mathcal{M}$, $w\mapsto W$, $v\mapsto Y_c$, $n_{cr}\mapsto H_c$, что, при прежнем значении $q\approx x_{cr}$, дает и ту же вероятность (87) соответствующего события,

$$\text{поскольку при этом:}\quad q\Longrightarrow\frac{Y_c}{W}=\frac{H_c}{N}=x_{cr},\ \ \text{при:}\ \varepsilon\longmapsto\frac{Y_c}{H_c}=\frac{W}{N}=\zeta.\quad(88)$$

Вероятность взрыва будет пропорциональна относительной вероятности такого распределения (87) атомов по объемам v и $w-v$, по отношению к аналогичному произвольному распределению всех атомов, – без учета различия между $U^{(235)}$ и $U^{(238)}$, которое определяется той же формулой (87), но при $n\Longrightarrow N$, и дает:

$$\Omega^{\lambda}_{n,N}=\frac{\mathcal{P}^{\lambda}_{n,N}}{\mathcal{P}^{\lambda}_{N,N}}=\frac{n!\,(N-\lambda)!}{N!\,(n-\lambda)!}=\frac{C^{\lambda}_{n}}{C^{\lambda}_{N}}.\quad(89)$$

Замечательно, что тот же ответ сразу следует и из формулы (81), не учитывающей неточечность атомов (молекул). Здесь N, – полное число всех атомов урана в массе ГФУ, равное, очевидно, полному числу молекул ГФУ; $n = xN$, – полное число атомов $U^{(235)}$, или соответствующих молекул $U^{(235)}F_6$; $\lambda \Longrightarrow n_{cr}$ (или $\lambda \Longrightarrow H_c$), – (фиксированное) число этих атомов (или молекул) в критической массе Δ (или m_Δ). Искомое отношение вероятностей тогда равно:

$$Q^\lambda_{n,N} = \frac{\Omega^\lambda_{n,N}}{\Omega^\lambda_{\lambda,N}} = \frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!} = C^\lambda_n. \tag{90}$$

Оценка этого выражения по формуле Стирлинга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{имеет вид:} \quad Q^\lambda_{n,N} \approx \left[\frac{x^x}{q^q(x-q)^{x-q}}\right]^N, \quad \text{где:} \;\; q < x < 1. \tag{91}$$

Здесь и далее под q всюду понимается x_{cr}. При $x, q \sim 10^{-3}$, как в (72), выражение в квадратных скобках меньше единицы на ту же величину и равно 1-це при $x = q$. При $x = sq$ оно дает, для $s \Longrightarrow 7$:

$$Q^\lambda_{n,N} = \left[\frac{s^s}{(s-1)^{s-1}}\right]^\lambda \Longrightarrow \left[\frac{7^7}{6^6}\right]^\lambda. \tag{92}$$

С учетом значений числа Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ и молекулярного веса урана $\mu_U = 235$, для чисел n_{cr} и H_c атомов в критической массе $U^{(235)}$ и ГФУ, имеем:

$$\lambda \Longrightarrow \begin{cases} n_{cr} = \dfrac{\Delta \cdot N_A}{(\text{г})\,\mu_U} = \dfrac{5 \cdot 10^4 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{235} \simeq 1,28 \cdot 10^{26}, & U^{(235)}, \\ H_c = \eta^2\, n_{cr} = 32\, n_{cr} \approx 41 \cdot 10^{26}, & U^{(235)}F_6. \end{cases} \tag{93}$$

Ответ:
При возрастании в процессе обогащения доли x, то есть числа самих активных атомов $U^{(235)}$, в 7 раз: с $x = x_{cr} = 7 \cdot 10^{-3} = 0,7\%$, до $x = 50 \cdot 10^{-3} = 5\%$, вероятность взрыва возрастает в огромное число раз:

$$Q^\lambda_{n,N} = \left[\frac{7^7}{6^6}\right]^\lambda \approx (17,65)^\lambda \Longrightarrow \begin{cases} (17,65)^{n_{cr}} \simeq (39,43)^{10^{26}}, & U^{(235)}, \\ (17,65)^{H_c} \simeq \left[(39,43)^{10^{26}}\right]^{32}, & U^{(235)}F_6. \end{cases} \tag{94}$$

Разумеется, если контейнеров много, надо умножить еще и на их число.
Замечание 1: Возможно аналогичный бурный рост вероятности при осаждении связанных активных ядер привел к тепловому взрыву большой емкости с жидким раствором отработанного ядерного топлива в городе Северске. Поскольку

Задача 7:
Оценить, во сколько раз при обогащении возрастает вероятность саморазогрева ГФУ в контейнерах Задачи 6.
Решение:
Искомое отношение вероятностей саморазогрева определяется комбинаторными соображениями, аналогичными тем, что привели к формулам (87)–(90), (94), где параметры имеют теперь несколько иной смысл. Действительно, начнем мысленно разбавлять n_{cr} атомов $U^{(235)}$, составляющих критическую массу Δ, атомами $U^{(238)}$ (и F), до тех пор пока, при некотором новом критическом объеме $\omega > v$, коэффициент размножения нейтронов не станет меньше единицы и цепная реакция не прекратится и окажется невозможна вовсе.
Без учета возможных отклонений тепловых нейтронов при рассеянии, величину ω можно оценить, как объем шара **радиусом** порядка средней длины поглощения ℓ_a (вместо длины свободного пробега ℓ_s) тепловых нейтронов в получившемся тогда ГФУ $U^{(238,235)}$.
Вероятность в объеме ω найти n_1 молекул ГФУ $U^{(235)}$ и n_2 молекул ГФУ $U^{(238)}$, а оставшиеся, соответственно, N_1-n_1 и N_2-n_2 молекул найти во внешнем объеме $W-\omega$, для точечных молекул будет определяться произведением соответствующих биномиальных распределений Задачи 6:

$$\mathcal{B}_{N_1}^{n_1}\mathcal{B}_{N_2}^{n_2} = q^{n_1+n_2}(1-q)^{N_1-n_1+N_2-n_2}C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}, \tag{95}$$

$$\text{где теперь: } q = \frac{\omega}{W}, \text{ при условиях: } N_1 + N_2 = N, \quad n_1 + n_2 = n. \tag{96}$$

Соответствующее “безразличное” к типу изотопа урана распределение всех молекул ГФУ по этим объемам также имеет биномиальный вид:

$$\mathcal{B}_N^n = q^n(1-q)^{N-n}C_N^n. \tag{97}$$

Интересуясь снова лишь относительной вероятностью, разделим (95) на (97):

$$\Omega_{N,N_1}^{n,n_1} = \frac{\mathcal{B}_{N_1}^{n_1}\mathcal{B}_{N_2}^{n_2}}{\mathcal{B}_N^n} = \frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n} \equiv \frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N-N_1}^{n-n_1}}{C_N^n} = \frac{C_n^{n_1}C_{N-n}^{N_1-n_1}}{C_N^{N_1}} = \tag{98}$$

$$= \frac{N_1!\,(N-N_1)!\,n!\,(N-n)!}{N!\,n_1!\,(n-n_1)!\,(N_1-n_1)!\,[N-n-(N_1-n_1)]!}, \text{ где теперь: } n \Longrightarrow \frac{\omega}{\zeta}, \tag{99}$$

– полное число молекул ГФУ в объеме ω, фиксировано удельным объемом ζ из (88), приходящимся на одну молекулу ГФУ в твердом (жидком) состоянии, то есть обратной плотностью числа молекул в этом состоянии:

$$\overline{\mathrm{n}} = \frac{1}{\zeta} = \frac{N}{W} = \frac{n}{\omega} = \frac{\varrho_G N_A}{\mu_G}, \text{ тогда: } q = \frac{\omega}{W} = \frac{n}{N}, \tag{100}$$

$$\text{и при: } \omega \simeq \frac{4\pi}{3}\ell^3, \text{ получаем: } n \simeq \frac{4\pi}{3}\frac{\ell^3}{\zeta} = \frac{4\pi}{3}\frac{\ell^3\varrho_G N_A}{\mu_G}, \tag{101}$$

где учтено, что в одном грамм-моле любого вещества содержится его N_A молекул. Учет неточечности молекул ГФУ производится по тем же формулам (82) Задачи 6, и также не меняет вида относительной вероятности (98).

При данном полном числе N_1 атомов $U^{(235)}$, возможности саморазогрева отвечают все независимые значения n_1, при $n_{cr} \leq n_1 \leq \min\{N_1, n\} = m$. Поэтому, ввиду полной симметрии Ω^{n,n_1}_{N,N_1} (98) по перестановке $N_1 \rightleftharpoons n$, его полная вероятность пропорциональна сумме вероятностей этих независимых альтернатив:

$$\overline{\Omega}^n_{N,N_1} = \sum_{n_1=n_{cr}}^{m} \Omega^{n,n_1}_{N,N_1} = \sum_{n_1=n_{cr}}^{m} \frac{C^{n_1}_n C^{N_1-n_1}_{N-n}}{C^{N_1}_N} = \sum_{n_1=n_{cr}}^{m} \frac{C^{n_1}_{N_1} C^{n-n_1}_{N-N_1}}{C^n_N}. \tag{102}$$

Как и должно быть, полная сумма вероятностей всех возможных альтернатив в обоих случаях: $N_1 < n$ и $N_1 > n$, равна единице, в силу известных элементарных тождеств для C^k_n (см. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды, М. Наука, 1981):

$$\sum_{n_1=0}^{m} \Omega^{n,n_1}_{N,N_1} \Longrightarrow \sum_{n_1=0}^{N_1} \frac{C^{n_1}_{N_1} C^{n-n_1}_{N-N_1}}{C^n_N}\bigg|_{N_1<n} \Longrightarrow \sum_{n_1=0}^{n} \frac{C^{n_1}_n C^{N_1-n_1}_{N-n}}{C^{N_1}_N}\bigg|_{n<N_1} = 1, \tag{103}$$

Искомое отношение вероятностей, независящее от детальных микрохарактеристик цепной реакции саморазогрева, есть отношение величин (102) для различных значений $N_1 = xN$. В частности, для $x = x_{cr}$, $N_1 \Longrightarrow n_{cr} \Longrightarrow n_1$:

$$\overline{\Omega}^n_{N,n_{cr}} = \frac{C^{n_{cr}}_n}{C^{n_{cr}}_N}, \quad \text{откуда, для обоих случаев находим:} \tag{104}$$

$$\overline{Q}^n_{N,N_1} \equiv \frac{\overline{\Omega}^n_{N,N_1}}{\overline{\Omega}^n_{N,n_{cr}}} = \frac{C^{n_{cr}}_N}{C^{n_{cr}}_n} \sum_{n_1=n_{cr}}^{m} \frac{C^{n_1}_n C^{N_1-n_1}_{N-n}}{C^{N_1}_N} = \frac{C^{n_{cr}}_N}{C^{n_{cr}}_n} \left(1 - \sum_{n_1=0}^{n_{cr}-1} \Omega^{n,n_1}_{N,N_1}\right). \tag{105}$$

Дальнейшая оценка этого выражения требует знания средних длин поглощения/свободного пробега тепловых нейтронов $\ell_{a,s}$ и сопоставления характерных значений n и N_1.

Средняя длина поглощения ℓ_a, как и средняя длина свободного пробега ℓ_s, определяется плотностью числа неподвижных поглощающих/рассеивающих частиц $\overline{\mathrm{n}}$ и соответствующим сечением поглощения/рассеяния $\sigma_{a,s}$ на одной частице, по формуле:

$$\ell = \frac{1}{\overline{\mathrm{n}}\,\sigma} \Longrightarrow \frac{\zeta}{\sigma} = \frac{\mu_G}{\varrho_G N_A \sigma}. \tag{106}$$

Используя значения сеченийй (http://www.ncnr.nist.gov/resources/n-lengths/) поглощения (Abs) и рассеяния (Scatt) для $U^{(238)}$ и F из таблицы:

σ (barn)	Coh	Inc	Scatt	Abs
$U^{(235)}$	13,78	0,2	14	680,9(1.1)
$U^{(238)}$	8,871	0	8,871	2,68
F	4,017	0,0008	4.018	0,0096

находим ($1\,\mathrm{barn} = 10^{-28}\,\text{м}^2$) полные сечения поглощения σ_a, и рассеяния σ_s на молекуле ГФУ и соответствующие значения ℓ_a, ℓ_s, ζ, и n из (101):

$$\sigma_a = 2,68 + 6 \times 0,0096 \approx 2,74, \quad \sigma_s = 8,871 + 6 \times 4,018 \approx 33, \quad \text{откуда:} \tag{107}$$

$$\ell_a = \frac{\mu_G}{\varrho_G N_A \sigma_a} = \frac{352\dfrac{\text{г}}{\text{моль}}}{5,1 \cdot 10^6 \dfrac{\text{г}}{\text{м}^3}\; 6,02 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{\text{моль}}\; 2,74 \cdot 10^{-28}(\text{м}^2)} \approx 0,418(\text{м}), \tag{108}$$

$$\ell_s = \frac{\mu_G}{\varrho_G N_A \sigma_s} \approx 0,034(\text{м}) \equiv 34(mm), \tag{109}$$

$$\zeta \equiv r_0^3 = \frac{352\dfrac{\text{г}}{\text{моль}}}{5,1 \cdot 10^6 \dfrac{\text{г}}{\text{м}^3}\; 6,02 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{\text{моль}}} \approx \Big(0,486 \cdot 10^{-9}(\text{м})\Big)^3, \tag{110}$$

$$n \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\ell_a^3}{\zeta} \approx 26,72 \cdot 10^{26} \approx 20,88\, n_{cr}, \qquad (r) \tag{111}$$

– для значения n_{cr} из (93). Использование ℓ_s вместо ℓ_a привело бы здесь к абсурдному, – меньшему в $(12)^3$ раз, значению n, что в сотню раз меньше n_{cr}. Заметим, что оценка $\ell_a \simeq 42\,$см, в (108), как и должно быть, оказалась близка и меньше оценки (76) критического радиуса $R_c \simeq 48\,$см реакции взрыва в ГФУ. Можно, однако эффективно учесть отклонение тепловых нейтронов при рассеянии, полагая, что ℓ_a определяет **диаметр** объема ω. Тогда оценка (111) уменьшится в $2^3 = 8$ раз, то есть:

$$n \Longrightarrow 3,34 \cdot 10^{26} \approx 2,61\, n_{cr}. \qquad (d) \tag{112}$$

Интересуясь изменением вероятности при обогащении по массе вплоть до 7-ми раз, в первом случае *(r)* (111) имеем $m = N_1 < n$, а во втором случае *(d)* (112) имеем $m = n < N_1$. В обоих случаях необходимо, при $s = 7$, и $\beta = 1/x_{cr}$, оценить выражение (105), содержащее непревосходящую единицы сумму:

$$\sum_{n_1=0}^{n_{cr}-1} \Omega_{N,N_1}^{n,n_1} = \sum_{n_1=0}^{n_{cr}-1} \frac{C_n^{n_1} C_{N-n}^{N_1-n_1}}{C_N^{N_1}}, \quad \text{при: } \gamma = \text{ либо } 20,88, \quad \text{либо } 2,61, \tag{113}$$

$$\text{где: } n_{cr} = x_{cr} N, \quad n = \gamma n_{cr} = \gamma x_{cr} N, \quad N_1 = xN = s x_{cr} N = s n_{cr}, \tag{114}$$

$$\text{то есть: } x = s x_{cr}, \quad N = \beta n_{cr} \approx 142,86\, n_{cr}, \quad \text{при: } x_{cr} = 0,7 \cdot 10^{-3}. \tag{115}$$

Отсюда видно, что именно величина n_{cr} числа атомов в критической массе Δ для $U^{(235)}$ задает характерный масштаб интересующей нас вероятности. Воспользуемся этим для упрощения оценки.

Обозначим далее для краткости: $n_{cr} = \lambda$, $N_1 = p = s\lambda$, $n_1 = y$. Заметим, что для любых целых f и r число сочетаний из f по r определяется произведением лишь r сомножителей:

$$r! = \prod_{j=1}^{r} j, \quad C_f^r = \frac{f!}{r!(f-r)!} = \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{f-j+1}{j}\right), \quad \text{откуда:} \quad \ln C_f^r \equiv \tag{116}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{r} \ln\left(\frac{f-j+1}{j}\right) \approx \int\limits_0^r \ln\left(\frac{f-j+1}{j}\right) dj \approx \int\limits_0^r \ln\left(\frac{f-j}{j}\right) dj \equiv L(f,r). \tag{117}$$

Последняя замена по существу эквивалентна использованию формулы Стирлинга (91) для факториалов. Например, для логарифма (90), при $n = xN = s\lambda$, $j = z\lambda$, имеем:

$$\ln Q_{n,N}^{\lambda} = \ln C_n^{\lambda} = \sum_{j=1}^{\lambda} \ln\left(\frac{n-j+1}{j}\right) \approx \int\limits_0^{\lambda} \ln\left(\frac{n-j+1}{j}\right) dj \approx \tag{118}$$

$$\approx L(n,\lambda) \equiv \int\limits_0^{\lambda} \ln\left(\frac{n-j}{j}\right) dj = \lambda \int\limits_0^{1} \ln\left(\frac{s-z}{z}\right) dz = \lambda \ln\left(\frac{s^s}{(s-1)^{s-1}}\right), \tag{119}$$

что полностью совпадает с (92). С другой стороны, эти интегралы легко считаются на компютере. При этом всюду здесь можно вместо натурального логарифма с тем же успехом пользоваться десятичным. Для первого сомножителя в (105), согласно (114), (115), при $N = \beta\lambda$, $n = \gamma\lambda$, имеем:

$$\ln\left(\frac{C_N^{n_{cr}}}{C_n^{n_{cr}}}\right) = \ln\left(\frac{C_N^{\lambda}}{C_n^{\lambda}}\right) \Longrightarrow L(N,\lambda) - L(n,\lambda) = L(\beta\lambda,\lambda) - L(\gamma\lambda,\lambda) = \tag{120}$$

$$= \lambda\Big[L(\beta,1) - L(\gamma,1)\Big] = \lambda\left[\ln\left(\frac{\beta^{\beta}}{(\beta-1)^{\beta-1}}\right) - \ln\left(\frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma-1)^{\gamma-1}}\right)\right] \approx \tag{121}$$

$$\approx \begin{cases} \lambda \cdot 1,944 = 2,488 \cdot 10^{26}, & \gamma = 20,88, \quad (r) \\ \lambda \cdot 4,221 = 5,40 \cdot 10^{26}, & \gamma = 2,61, \quad (d). \end{cases} \tag{122}$$

$$\frac{C_N^{n_{cr}}}{C_n^{n_{cr}}} = \frac{C_N^{\lambda}}{C_n^{\lambda}} \approx \begin{cases} (6,986)^{\lambda} \approx (12,04)^{10^{26}}, & \gamma = 20,88, \quad (r) \\ (68,11)^{\lambda} \approx (222)^{10^{26}}, & \gamma = 2,61, \quad (d). \end{cases} \tag{123}$$

Рассмотрим теперь поведение вероятности (98), (99), как функции $n_1 = y$. Как и выше, удобно обратиться к меняющемуся более плавно ее логарифму:

$$f(y) = \ln\left[\Omega_{N,p}^{n,y}\right] \Longrightarrow L(n,y) + L(N-n, p-y) - L(N,p), \tag{124}$$

$$\frac{df}{dy} = \ln\left(\frac{n-y}{y}\right) - \ln\left(\frac{N-n-(p-y)}{(p-y)}\right) \Longrightarrow 0, \quad \text{при:} \;\; y_0 = \frac{np}{N} = \frac{\lambda\, s\gamma}{\beta}, \tag{125}$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \left(\frac{-1}{n-y} - \frac{1}{y} - \frac{1}{p-y} - \frac{1}{N-n-p+y}\right) \underset{y=y_0}{\Longrightarrow} \tag{126}$$

$$\underset{y=y_0}{\Longrightarrow} -|f_0''| = -\frac{N^3}{np(N-p)(N-n)} \Longrightarrow -\frac{\beta^3}{\lambda\, s\gamma(\beta-s)(\beta-\gamma)}, \tag{127}$$

$$\text{то есть:} \;\; |f_0''| = \frac{a}{y_0}, \quad a = \frac{\beta^2}{(\beta-s)(\beta-\gamma)} \simeq 1, \quad \text{так как:} \;\; \beta \gg s, \;\; \beta \gg \gamma. \tag{128}$$

Так что вероятность $\Omega^{n,y}_{N,p}$ почти всюду практически равна нулю, но имеет очень резкий и узкий максимум в точке $y = y_0$:

$$\Omega^{n,y}_{N,p} \approx \exp f(y_0)\, \exp\left[-\frac{|f_0''|}{2}(y-y_0)^2\right] \equiv \Omega_0\, \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2<(\delta y)^2>}\right], \tag{129}$$

$$\text{со среднеквадратичной шириной:} \quad <(\delta y)^2> = \frac{1}{|f_0''|} = \frac{y_0}{a}, \tag{130}$$

$$\text{то есть, с относительной шириной:} \quad \frac{\sqrt{<(\delta y)^2>}}{y_0} \simeq \frac{1}{\sqrt{a y_0}} \ll 1. \tag{131}$$

Тогда, заменяя, ввиду огромного числа слагаемых сумму на интеграл, величину Ω_0 легко найти из условия нормировки (103):

$$1 \Longleftarrow \int_0^m dy\; \Omega^{n,y}_{N,p} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \Omega_0\, \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2<(\delta y)^2>}\right], \tag{132}$$

$$\text{откуда:} \quad \Omega^{n,y}_{N,p} \approx \left(\frac{1}{2\pi<(\delta y)^2>}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2<(\delta y)^2>}\right]. \tag{133}$$

Заменяя, ввиду огромного числа слагаемых в (113), сумму на интеграл, имеем, полагая $y = y_0 z$:

$$(113) \approx \int_0^\lambda dy\, \Omega^{n,y}_{N,p} \approx \int_0^\lambda dy \left(\frac{1}{2\pi<(\delta y)^2>}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2<(\delta y)^2>}\right] = \tag{134}$$

$$= \left(\frac{a y_0}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^c dz\, \exp\left[-\frac{a y_0 (z-1)^2}{2}\right] \underset{y_0\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^c dz\, \delta(z-1) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & c<1 \\ 1, & c>1 \end{array} \right., \tag{135}$$

$$\text{где:} \;\; c = \frac{\lambda}{y_0} = \frac{\beta}{s\gamma} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} 0,977, & \gamma = 20,88, & (r) \\ 7,82, & \gamma = 2,61, & (d) \end{array} \right., \;\; \text{и где:} \;\; \delta(z-1), \tag{136}$$

– так называемая дельта-функция, отличная от нуля только в точке $z = 1$.
Таким образом, в случае *(r)* вкладом суммы (113) в отношении вероятностей (105) можно пренебречь по сравнению с единицей, и ответ определяется лишь выражением (123) *(r)*: $\overline{Q}^n_{N,N_1} \simeq (6,986)^\lambda \approx (12,04)^{10^{26}}$.
В случае *(d)* второй сомножитель (в круглых скобках) в (105) мал и может компенсировать большую величину (123) *(d)* первого сомножителя. Однако, для его численной оценки выражения (134)–(136) не годятся, и необходимо вернуться к исходноой сумме в (105):

$$\sum_{n_1=n_{cr}}^{m} \Omega^{n,n_1}_{N,N_1} \Longrightarrow \sum_{n_1=n_{cr}}^{n} \Omega^{n,n_1}_{N,N_1} \equiv \sum_{y=\lambda}^{n} \Omega^{n,y}_{N,p} \approx \int\limits_{\lambda}^{n} dy\, \Omega^{n,y}_{N,p}. \tag{137}$$

Согласно (124)–(126), разлагая в ряд Тейлора, имеем:

$$\text{для показателя степени в} \quad \Omega^{n,y}_{N,p} = \Omega^{n,\lambda}_{N,p} \exp\{f(y) - f(\lambda)\} \ : \tag{138}$$

$$f(y) - f(\lambda) \Longrightarrow f'(\lambda)(y-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2}(y-\lambda)^2 + \ldots, \tag{139}$$

$$\text{где:} \quad f'(\lambda) = -\ln\left(\frac{\beta-\gamma-s+1}{(s-1)(\gamma-1)}\right) \approx -2,632 \simeq -2,63, \tag{140}$$

$$f''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{\beta-\gamma-s+1}\right] \approx -\frac{1,8}{\lambda} \simeq -1,4 \cdot 10^{-26}. \tag{141}$$

Поскольку вероятность $\Omega^{n,y}_{N,p}$ является очень быстро убывающей функцией y, интеграл “садится” на свой нижний предел λ, и верхний предел можно считать бесконечным. А так как обе производные отрицательны, и по абсолютной величине вторая $|f''(\lambda)|$ ничтожна по сравнению с первой $|f'(\lambda)|$, то и ее вкладом также можно уже пренебречь. Тогда, полагая $z = y - \lambda$, находим:

$$\int\limits_{\lambda}^{n} dy\, \Omega^{n,y}_{N,p} \approx \Omega^{n,\lambda}_{N,p} \int\limits_{\lambda}^{n} dy \exp\{f'(\lambda)(y-\lambda)\} = \Omega^{n,\lambda}_{N,p} \int\limits_{0}^{n-\lambda} dz \exp\{-|f'(\lambda)|z\} \approx \tag{142}$$

$$\approx \Omega^{n,\lambda}_{N,p} \int\limits_{0}^{\infty} dz \exp\{-|f'(\lambda)|z\} = \frac{\Omega^{n,\lambda}_{N,p}}{|f'(\lambda)|}, \quad \text{что, с учетом (116)–(119),} \tag{143}$$

$$\text{дает:} \quad \overline{Q}^n_{N,N_1} \equiv \overline{Q}^n_{N,p} = \frac{C^\lambda_N\, \Omega^{n,\lambda}_{N,p}}{C^\lambda_n\, |f'(\lambda)|} = \frac{C^\lambda_N C^{p-\lambda}_{N-n}}{C^p_N\, |f'(\lambda)|} \simeq \frac{C^\lambda_N C^{p-\lambda}_{N-n}}{C^p_N} = \tag{144}$$

$$= \exp\left\{\lambda\Big[L(\beta,1) + L(\beta-\gamma, s-1) - L(\beta,s)\Big]\right\} \approx (16,46)^\lambda \approx (36,06)^{10^{26}}. \tag{145}$$

Причем, этот случай физически кажется более адекватным реальной ситуации.
Ответ:

Верхний предел для отношения вероятностей саморазогрева ГФУ при обогащении в 7 раз в случае *(r)* определяется как: $\overline{Q}^n_{N,N_1} \simeq (6,986)^\lambda \approx (12,04)^{10^{26}}$; в случае *(d)* имеем бо́льшее значение: $\overline{Q}^n_{N,N_1} \simeq (16,46)^\lambda \approx (36,06)^{10^{26}}$.

Будучи приведенными к близким основаниям: 39, и 36 или 12, отношения для вероятностей взрыва и саморазогрева имеют одинаковый показатель степени, определяемый характерным порядком величины числа атомов n_{cr} в критической массе Δ урана $U^{(235)}$. Разумеется, значения для одного контейнера необходимо умножить на полное число контейнеров с обогащенным ураном.

Замечание 1: Сравнение характерного размера r_0 (110) с радиусом молекулы ГФУ, $R_G \approx R_U + R_F \simeq 0,213 \cdot 10^{-9}$(м), показывает что эти молекулы в твердой и/или жидкой фаэе “довольно плотно упакованы” и их нельзя считать там точечными, что, как видим, не влияет, тем не менее, на искомое отношение вероятностей.

Замечание 2: Согласно данным сечений из (http://www.ncnr.nist.gov/resources/n-lengths/), Fe взаимодействует с тепловыми нейтронами чуть слабее, чем $U^{(238)}$, O_2 – слабее, чем F_2, а сечения взаимодействие их с N_2 имеют промежуточные значения. Поэтому, при 42-х сантиметровом радиусе области взаимодействия (108), даже если считать поглощение в воздухе и в железе сравнимым с $U^{(238)}$, для 2-3 сантиметровых стенок оказывается возможным “взаимный разогрев” за счет взаимодействия с нейтронами из соседних цилиндрических контейнеров, установленных вплотную друг к другу.

Задача 8:

Оценить температуру диссоциации ГФУ на уран и молекулярный фтор F_2.

Решение:

Исходим из условия минимума в равновесии полной свободной энергии $\mathcal{F}$, как суммы свободных энергий $\mathcal{F}_i$ каждого из идеальных газов, $i = G, U, F2$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_U(N_U) + \mathcal{F}_G(N_G) + \mathcal{F}_{F2}(N_{F2}), \quad \mathcal{F}_i(N_i) = -kT \ln Z_i(N_i), \tag{146}$$

$$\text{с каноническими статсуммами газов: } Z_i(N_i) = \frac{(Z_i^1)^{N_i}}{N_i!}, \tag{147}$$

и уравнения химической реакции образования/диссоциации ГФУ:

$$UF_6 \rightleftharpoons U + 3F_2, \quad \text{в силу которого:} \tag{148}$$

$$N_{F2} = 3N_U, \quad N_G + N_U = N_G^m, \quad N = N_G + N_U + N_{F2} \equiv N_G^m + N_{F2}, \tag{149}$$

поскольку полное число атомов урана N_G^m в реакции сохраняется (как и полное число атомов фтора), а на каждый из N_U атомов чистого урана проходится три молекулы фтора F_2. Найдем экстремум $\mathcal{F}$, как функции единственного, таким образом, независимого параметра, например, N_U. Дифференцирование $\ln n!$ осуществляется по формуле:

$$\frac{d\ln n!}{dn}\approx \ln n, \quad \text{и дает в результате:} \quad \frac{N_U N_{F2}^3}{N_G}=\frac{Z_U^1 (Z_{F2}^1)^3}{Z_G^1}, \tag{150}$$

где одночастичные статсуммы, с учетом вращательных и колебательных степеней свободы:

$$Z_U^1 = g_U V\left(\frac{2\pi m_U kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-E_U^0/(kT)}, \tag{151}$$

$$Z_{F2}^1 = g_{F2} V\left(\frac{2\pi m_{F2} kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_{F2}}\right] e^{-E_{F2}^0/(kT)}\cdot\left\{\frac{T}{\eta_{F2}}\right\}, \tag{152}$$

$$Z_G^1 = g_G V\left(\frac{2\pi m_G kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_G}\right]^{3/2} e^{-E_G^0/(kT)}\cdot\left\{\frac{T}{\eta_G}\right\}^{15}, \tag{153}$$

приводят закон действующих масс (150) к виду:

$$\frac{N_U}{N_G}\left(\frac{N_{F2}}{N}\right)^3 = \left(\frac{V}{N}\right)^3\left(\frac{m_U}{m_G}\right)^{3/2}\frac{g_U g_{F2}^3}{g_G}\left(\frac{T\theta_G}{\theta_{F2}^2}\right)^{3/2}\left[\left(\frac{2\pi m_{F2}kT}{h^2}\right)^{3/2}\right]^3 e^{-J^0/(kT)}, \tag{154}$$

$$\text{где: } J^0 = \left[E_U^0 + 6E_F^0 - E_G^0\right] - 3\left[2E_F^0 - E_{F2}^0\right]\approx \tag{155}$$

$$\approx [32,705\,\text{эв}] - 3\,[1,606\,\text{эв}] = 27,887\,\text{эв} \approx k\cdot 323\,524(K). \tag{156}$$

Здесь m_i – массы соответствующих молекул, g_i – кратности спинового вырождения их основных состояний с энергиями E_i^0 из Краткого Справочника Химика под ред. Рабиновича и Хавина, и стало быть, $J^0 > 0$, – полная энергия, необходимая для диссоциации одной молекулы ГФУ, k, – Постоянная Больцмана. Степени отношений (T/θ_i), (T/η_i), – квазиклассические, соответственно, вращательные и колебательные статсуммы соответсвующих молекул, с характеристическими температурами:

$$\theta_{F2} = \left(\theta_{F2}^{(1)}\theta_{F2}^{(2)}\right)^{1/2}, \quad \theta_G = \left(\theta_G^{(1)}\theta_G^{(2)}\theta_G^{(3)}\right)^{1/3}, \quad \eta_G = \left(\prod_{j=1}^{15}\eta_G^{(j)}\right)^{1/15}, \tag{157}$$

и с учетом двух вращательных и одной колебательной степеней свободы для молекулы F_2, и трех вращательных и 15 колебательной степеней свободы для молекулы UF_6. Если температура T не слишком высока, то колебательные степени свободы считаются еще "замороженными", и не учитываются в первом приближении. Поэтому множители в фигурных скобках из (152), (153) отсутствуют

в (154) и далее также не учитываются.
Вводя степень диссоциации $0 < \alpha < 1$, уравнение (150) в форме (154), с помощью (149), можно преобразовать к виду:

$$N_U = \alpha N_G^m, \quad N_{F2} = 3\alpha N_G^m, \quad N_G = (1-\alpha) N_G^m, \quad N = (1+3\alpha) N_G^m, \tag{158}$$

$$3^3 \left(\frac{\alpha^4}{1-\alpha} \right) = \Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}, \quad \text{где:} \tag{159}$$

$$\Omega(T) = \left(\frac{V}{N_G^m} \right)^3 \left(\frac{\mu_U}{\mu_G} \right)^{3/2} \frac{g_U g_{F2}^3}{g_G} \left(\frac{T\theta_G}{\theta_{F2}^2} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi m_{F2} kT}{h^2} \right)^{9/2} \equiv \left(\frac{kT}{kT_0} \right)^6. \tag{160}$$

При $\alpha = 1/2$ левая часть (159) равна 3,375. Поэтому, для $T \gg T_0$, $\Omega(T) \gg 1$, $\ln\Omega(T) \gg 1$, приближенное решение этого трансцендентного уравнения итерациями по методу Саха определяет с логарифмической точностью температуру диссоциации, $T = T_d$ и интервал перехода к полной диссоциации δT_d, как:

$$kT_d \approx \frac{J^0}{\ln\Omega(T_d)} \simeq \frac{J^0}{\ln\Omega(J^0/k)}, \quad \text{и:} \quad k\delta T_d \simeq \frac{J^0}{(\ln\Omega(J^0/k))^2}. \tag{161}$$

Для оценки kT_0 заметим, что при $m_0 = 930$ Мэв$/c^2$, $(\hbar c)^2 = 0,39 \cdot 10^{-31}$ Гэв^{2}м^2, и с учетом (100) и неизменности спиновых кратностей при объединении атомов в молекулы: $g_{F2} \Longrightarrow g_F^2$, $g_G \Longrightarrow g_U g_F^6$,

$$\frac{N_G^m}{V} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\varrho_G N_A}{\mu_G} \sim \frac{(\text{г м}^{-3}\text{моль}^{-1})}{(\text{г моль}^{-1})}, \quad \frac{\mu_G}{\mu_U} \approx \frac{3}{2}, \quad \frac{m_{F2}}{m_0} = 2\mu_F, \quad \theta_i \sim \frac{\hbar^2}{m_i R_i^2}, \tag{162}$$

$$\frac{g_U g_{F2}^3}{g_G} \Longrightarrow 1, \quad kT_0 \Longrightarrow \left(\frac{N_G^m}{V} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_G}{\mu_U} \right)^{1/4} \left(\frac{k\theta_{F2}^2}{\theta_G} \right)^{1/4} \left(\frac{h^2}{2\pi m_{F2}} \right)^{3/4} = \tag{163}$$

$$= (k\theta_{F2})^{1/4} \left(\frac{\varrho_G N_A}{\mu_G} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_G}{\mu_U} \right)^{1/4} \left(\frac{\theta_{F2}}{\theta_G} \right)^{1/4} \left(\frac{\pi(\hbar c)^2}{\mu_F m_0 c^2} \right)^{3/4}, \tag{164}$$

$$\text{где при:} \;\; R_G \approx R_U + R_F, \quad R_{F2} \simeq R_F, \quad R_U \approx 2R_F, \;\; \text{имеем:} \tag{165}$$

$$\frac{\theta_{F2}}{\theta_G} \simeq \frac{6\mu_F}{2\mu_F} \left(\frac{R_G}{R_{F2}} \right)^2 \simeq \frac{6}{2} \left(\frac{R_U + R_F}{R_F} \right)^2 \approx 3(3)^2, \;\; \text{и, для} \;\; \theta_{F2} \simeq 2(K): \tag{166}$$

$$kT_0 \simeq 11,7 \cdot 10^{-5}\,\text{эв} \approx k \cdot 1,36(K), \quad T_d \simeq 4354(K), \quad \delta T_d \simeq 58(K). \tag{167}$$

Здесь учтены значения ковалентных радиусов урана R_U и фтора R_F, и $2R_{F2}$ из того же Справочника, и то, что тяжелое ядро урана в центре дает малый вклад в момент инерции молекулы ГФУ. Представление статсуммы ГФУ статсуммой идеального газа при столь высоких плотностях оправдано лишь логарифмической зависимостью искомой температуры (161) от плотности.

Из уравнения (159) можно, наоборот, определять степень диссоциации α при заданных температуре T и объеме V, а затем и концентрации отдельных компонент $x_i = N_i/N$, например:

$$x_{F2} = \frac{N_{F2}}{N} = \frac{3\alpha}{1+3\alpha}, \qquad \alpha^4 + \mathcal{K}\alpha - \mathcal{K} = 0, \tag{168}$$

$$\text{где константа реакции: } \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T,V) = 3^{-3}\Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}. \tag{169}$$

Ответ: Температура диссоциаци ГФУ на уран и фтор имеет порядок $4354(K)$. Это значение вполне согласуется с температурой кипения урана, равной $4018(K)$. Характерные температуры колебательных степеней свободы η_G имеют тот же порядок $10^3(K)$. Поэтому их учет существенно не изменит полученой оценки. Температура диссоциации на уран и атомарный фтор будет еще выше, как видно из решения Задач 9,9(а).

Задача 9:
Оценить температуру диссоциации ГФУ на ТФУ и молекулярный фтор.
Решение:
Вновь исходим из условия минимума в равновесии полной свободной энергии $\mathcal{F}$, как суммы свободных энергий $\mathcal{F}_i$ каждого из идеальных газов, $i = G, \tau, F_2$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau(N_\tau) + \mathcal{F}_G(N_G) + \mathcal{F}_{F2}(N_{F2}), \quad \mathcal{F}_i(N_i) = -kT\ln Z_i(N_i), \tag{170}$$

$$\text{с каноническими статсуммами газов: } Z_i(N_i) = \frac{(Z_i^1)^{N_i}}{N_i!}, \tag{171}$$

и уравнения химической реакции образования/диссоциации ГФУ:

$$UF_6 \rightleftharpoons UF_4 + F_2, \quad \text{в силу которого теперь:} \tag{172}$$

$$N_{F2} = N_\tau, \quad N_G + N_\tau = N_G^m, \quad N = N_G + N_\tau + N_{F2} \equiv N_G^m + N_{F2}, \tag{173}$$

поскольку полное число атомов урана N_G^m в реакции сохраняется (как и полное число атомов фтора), а на каждую из N_τ молекул ТФУ теперь проходится одна молекула фтора F_2. Найдем экстремум $\mathcal{F}$, как функции единственного, таким образом, независимого параметра, например, N_τ. Дифференцирование $\ln n!$ осуществляется по формуле:

$$\frac{d\ln n!}{dn} \approx \ln n, \quad \text{и дает в результате: } \frac{N_\tau N_{F2}}{N_G} = \frac{Z_\tau^1 Z_{F2}^1}{Z_G^1}, \tag{174}$$

где одночастичные статсуммы, с учетом вращательных и колебательных степеней свободы:

$$Z_\tau^1 = g_\tau V\left(\frac{2\pi m_\tau kT}{h^2}\right)^{3/2}\left[\frac{T}{\theta_\tau}\right]^{3/2} e^{-E_\tau^0/(kT)} \cdot \left\{\frac{T}{\eta_\tau}\right\}^9, \tag{175}$$

$$Z^1_{F2} = g_{F2} V \left(\frac{2\pi m_{F2} kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_{F2}}\right] e^{-E^0_{F2}/(kT)} \cdot \left\{\frac{T}{\eta_{F2}}\right\}, \tag{176}$$

$$Z^1_{G} = g_{G} V \left(\frac{2\pi m_{G} kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_{G}}\right]^{3/2} e^{-E^0_{G}/(kT)} \cdot \left\{\frac{T}{\eta_{G}}\right\}^{15}, \tag{177}$$

приводят закон действующих масс (174) к виду:

$$\frac{N_\tau}{N_G}\frac{N_{F2}}{N} = \frac{V}{N}\left(\frac{m_\tau}{m_G}\right)^{3/2} \frac{g_\tau g_{F2}}{g_G} \left(\frac{\theta_G}{\theta_\tau}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_{F2}}\right] \left(\frac{2\pi m_{F2} kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-J^0/(kT)}, \tag{178}$$

$$\text{где: } J^0 = \left[E^0_\tau + 2E^0_F - E^0_G\right] - \left[2E^0_F - E^0_{F2}\right] \approx \tag{179}$$

$$\approx [7,285\,\text{эв}] - [1,606\,\text{эв}] = 5,679\,\text{эв} \approx k \cdot 65\,888(K). \tag{180}$$

Здесь m_i – массы соответствующих молекул, g_i – кратности спинового вырождения их основных состояний с энергиями E^0_i из Краткого Справочника Химика под ред. Рабиновича и Хавина, и стало быть, $J^0 > 0$, – полная энергия, необходимая для диссоциации одной молекулы ГФУ, k, – Постоянная Больцмана. Степени отношений (T/θ_i), (T/η_i), – квазиклассические, соответственно, вращательные и колебательные статсуммы соответсвующих молекул, с характеристическими температурами, при $l = G, \tau$:

$$\theta_{F2} = \left(\theta^{(1)}_{F2}\theta^{(2)}_{F2}\right)^{1/2}, \;\; \theta_l = \left(\theta^{(1)}_l\theta^{(2)}_l\theta^{(3)}_l\right)^{1/3}, \;\; \eta_G = \left(\prod_{j=1}^{15}\eta^{(j)}_G\right)^{1/15}, \;\; \eta_\tau = \left(\prod_{j=1}^{9}\eta^{(j)}_\tau\right)^{1/9},$$

и с учетом двух вращательных и одной колебательной степеней свободы для молекулы F_2, трех вращательных и 15 колебательной степеней свободы для молекулы UF_6, а также, трех вращательных и 9 колебательной степеней свободы для молекулы UF_4. Если температура T не слишком высока, то колебательные степени свободы считаются еще "замороженными", и не учитываются в первом приближении. Поэтому множители в фигурных скобках из (176), (177) отсутствуют в (178) и далее также не учитываются.

Вводя степень диссоциации $0 < \alpha < 1$, уравнение (174) в форме (178), с помощью (173), можно преобразовать к виду:

$$N_\tau = \alpha N^m_G, \quad N_{F2} = \alpha N^m_G, \quad N_G = (1-\alpha)N^m_G, \quad N = (1+\alpha)N^m_G, \tag{181}$$

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}, \quad \text{где:} \tag{182}$$

$$\Omega(T) = \frac{V}{N^m_G}\left(\frac{\mu_\tau}{\mu_G}\right)^{3/2} \frac{g_\tau g_{F2}}{g_G}\left(\frac{\theta_G}{\theta_\tau}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_{F2}}\right]\left(\frac{2\pi m_{F2} kT}{h^2}\right)^{3/2} \equiv \left(\frac{kT}{kT_0}\right)^{5/2}. \tag{183}$$

При $\alpha = 1/2$ левая часть (182) равна 1/2. Поэтому, для $T \gg T_0$, $\Omega(T) \gg 1$, $\ln \Omega(T) \gg 1$, приближенное решение этого трансцендентного уравнения итерациями по методу Саха определяет с логарифмической точностью температуру диссоциации, $T = T_d$ и интервал перехода к полной диссоциации δT_d, как:

$$kT_d \approx \frac{J^0}{\ln \Omega(T_d)} \simeq \frac{J^0}{\ln \Omega(J^0/k)}, \quad \text{и:} \quad k\delta T_d \simeq \frac{J^0}{(\ln \Omega(J^0/k))^2}. \tag{184}$$

Для оценки kT_0 заметим, что при $m_0 = 930$ Мэв$/c^2$, $(\hbar c)^2 = 0,39 \cdot 10^{-31}$ Гэв^{2}м^2, $\mu_\tau = 314$, и с учтем (100) и неизменности спиновых кратностей при объединении атомов в молекулы: $g_{F2} \Longrightarrow g_F^2$, $g_G \Longrightarrow g_U g_F^6$, $g_\tau \Longrightarrow g_U g_F^4$,

$$\frac{N_G^m}{V} = \frac{\varrho_G N_A}{\mu_G} \sim \frac{(\text{г м}^{-3}\text{моль}^{-1})}{(\text{г моль}^{-1})}, \quad \frac{\mu_G}{\mu_\tau} \approx 1,12, \quad \frac{m_{F2}}{m_0} = 2\mu_F, \quad \theta_i \sim \frac{\hbar^2}{m_i R_i^2}, \tag{185}$$

$$\frac{g_\tau g_{F2}}{g_G} \Longrightarrow 1, \quad kT_0 \Longrightarrow (k\theta_{F2})^{2/5} \left(\frac{N_G^m}{V}\right)^{2/5} \left(\frac{\mu_G}{\mu_\tau} \cdot \frac{\theta_\tau}{\theta_G}\right)^{3/5} \left(\frac{h^2}{2\pi m_{F2}}\right)^{3/5} = \tag{186}$$

$$= (k\theta_{F2})^{2/5} \left(\frac{\varrho_G N_A}{\mu_G}\right)^{2/5} \left(\frac{\mu_G}{\mu_\tau}\right)^{3/5} \left(\frac{\theta_\tau}{\theta_G}\right)^{3/5} \left(\frac{\pi(\hbar c)^2}{\mu_F m_0 c^2}\right)^{3/5}, \tag{187}$$

$$\text{где при:} \;\; R_G \approx R_\tau, \quad R_{F2} \simeq R_F, \quad \text{имеем:} \tag{188}$$

$$\frac{\theta_\tau}{\theta_G} \simeq \frac{6\mu_F}{4\mu_F} \left(\frac{R_G}{R_\tau}\right)^2 \simeq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \;\; \text{откуда, для} \;\; \theta_{F2} \simeq 2(K): \tag{189}$$

$$kT_0 \simeq 3,21 \cdot 10^{-5}\,\text{эв} \approx k \cdot 0,373(K), \quad T_d \simeq 2180(K), \quad \delta T_d \simeq 72(K). \tag{190}$$

Здесь учтены значения ковалентных радиусов урана R_U и фтора R_F, и $2R_{F2}$ из того же Справочника, и то, что тяжелое ядро урана в центре дает малый вклад в моменты инерции молекул ГФУ и ТФУ. Представление статсумм ГФУ и ТФУ статсуммой идеального газа при столь высоких плотностях оправдано лишь логарифмической зависимостью искомой температуры (184) от этих плотностей. Из уравнения (182) можно, наоборот, определять степень диссоциации α при заданных температуре T и объеме V, а затем и концентрации отдельных компонент $x_i = N_i/N$, например:

$$x_{F2} = \frac{N_{F2}}{N} = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \alpha^2 + \mathcal{K}\alpha - \mathcal{K} = 0, \quad \alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\mathcal{K}^{-1}}}, \tag{191}$$

$$\text{где константа реакции:} \;\; \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T,V) = \Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}. \;\; \text{Например:} \tag{192}$$

при $T = 1000(K)$, $\alpha \sim 10^{-10}$; при $T = 2000(K)$, $\alpha \sim 3.21 \cdot 10^{-3}$.

Того же порядка будет и относительная концентрация фтора x_{F2}, которая и определяет парциальный вклад давления фтора P_1 из Задачи 2, как $x_{F2} P_1$.

Ответ:
Температура диссоциаци ГФУ на ТФУ и фтор F_2 – порядка $2180(K)$. Это значение вполне согласуется с температурой кипения ТФУ, равной $1691(K)$, при $P = \Pi = 1$*(атм)*, $(2003(K)$, при $P \gg \Pi)$. Характерные температуры колебательных степеней свободы η_G, η_τ имеют тот же порядок $10^3(K)$. Поэтому их учет существенно не изменит полученой оценки.

Задача 9(а):
Диссоциация ГФУ на ТФУ и атомарный фтор.
Решение:
Вновь исходим из условия минимума в равновесии полной свободной энергии $\mathcal{F}$, как суммы свободных энергий $\mathcal{F}_i$ каждого из идеальных газов, $i = G, \tau, F$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau(N_\tau) + \mathcal{F}_G(N_G) + \mathcal{F}_F(N_F), \quad \mathcal{F}_i(N_i) = -kT \ln Z_i(N_i), \tag{193}$$

$$\text{с каноническими статсуммами газов: } Z_i(N_i) = \frac{(Z_i^1)^{N_i}}{N_i!}, \tag{194}$$

и уравнения химической реакции образования/диссоциации ГФУ:

$$UF_6 \rightleftharpoons UF_4 + 2F, \quad \text{в силу которого теперь:} \tag{195}$$

$$N_F = 2N_\tau, \quad N_G + N_\tau = N_G^m, \quad N = N_G + N_\tau + 2N_F \equiv N_G^m + 2N_F, \tag{196}$$

поскольку полное число атомов урана N_G^m в реакции сохраняется (как и полное число атомов фтора), а на каждую из N_τ молекул ТФУ теперь проходится два атома фтора F. Найдем экстремум $\mathcal{F}$, как функции единственного, таким образом, независимого параметра, например, N_τ. Дифференцирование $\ln n!$ осуществляется по формуле:

$$\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln n, \quad \text{и дает в результате: } \frac{N_\tau N_F^2}{N_G} = \frac{Z_\tau^1 \left(Z_F^1\right)^2}{Z_G^1}, \tag{197}$$

где одночастичные статсуммы, с учетом вращательных и колебательных степеней свободы:

$$Z_\tau^1 = g_\tau V \left(\frac{2\pi m_\tau kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_\tau}\right]^{3/2} e^{-E_\tau^0/(kT)} \cdot \left\{\frac{T}{\eta_\tau}\right\}^9, \tag{198}$$

$$Z_F^1 = g_F V \left(\frac{2\pi m_F kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-E_F^0/(kT)}, \tag{199}$$

$$Z_G^1 = g_G V \left(\frac{2\pi m_G kT}{h^2}\right)^{3/2} \left[\frac{T}{\theta_G}\right]^{3/2} e^{-E_G^0/(kT)} \cdot \left\{\frac{T}{\eta_G}\right\}^{15}, \tag{200}$$

приводят закон действующих масс (197) к виду:

$$\frac{N_\tau}{N_G}\left(\frac{N_F}{N}\right)^2 = \left(\frac{V}{N}\right)^2 \left(\frac{m_\tau}{m_G}\right)^{3/2} \frac{g_\tau g_F^2}{g_G} \left(\frac{\theta_G}{\theta_\tau}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi m_F kT}{h^2}\right)^3 e^{-J^0/(kT)}, \tag{201}$$

$$\text{где: } J^0 = \left[E_\tau^0 + 2E_F^0 - E_G^0\right] \approx [7,285\,\text{эв}] \approx k\cdot 84\,506(K). \tag{202}$$

Здесь m_i – массы соответствующих атомоа или молекул, g_i – кратности спинового вырождения их основных состояний с энергиями E_i^0 из Краткого Справочника Химика под ред. Рабиновича и Хавина, и стало быть, $J^0 > 0$, – полная энергия, необходимая для диссоциации одной молекулы ГФУ, k, – Постоянная Больцмана. Степени отношений (T/θ_i), (T/η_i), – квазиклассические, соответственно, вращательные и колебательные статсуммы соответсвующих молекул, с характеристическими температурами, при $l = G, \tau$:

$$\theta_l = \left(\theta_l^{(1)}\theta_l^{(2)}\theta_l^{(3)}\right)^{1/3},\ \ \eta_G = \left(\prod_{j=1}^{15}\eta_G^{(j)}\right)^{1/15},\ \ \eta_\tau = \left(\prod_{j=1}^{9}\eta_\tau^{(j)}\right)^{1/9}, \tag{203}$$

и с учетом трех вращательных и 15 колебательной степеней свободы для молекулы UF_6, а также, трех вращательных и 9 колебательной степеней свободы для молекулы UF_4. Если температура T не слишком высока, то колебательные степени свободы считаются еще "замороженными", и не учитываются в первом приближении. Поэтому множители в фигурных скобках из (199), (200) отсутствуют в (201) и далее также не учитываются.

Вводя степень диссоциации $0 < \alpha < 1$, уравнение (197) в форме (201), с помощью (196), можно преобразовать к виду:

$$N_\tau = \alpha N_G^m, \quad N_F = 2\alpha N_G^m, \quad N_G = (1-\alpha)N_G^m, \quad N = (1+2\alpha)N_G^m, \tag{204}$$

$$2^2\frac{\alpha^3}{1-\alpha} = \Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}, \quad \text{где:} \tag{205}$$

$$\Omega(T) = \left(\frac{V}{N_G^m}\right)^2 \left(\frac{\mu_\tau}{\mu_G}\right)^{3/2} \frac{g_\tau g_F^2}{g_G} \left(\frac{\theta_G}{\theta_\tau}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi m_F kT}{h^2}\right)^3 \equiv \left(\frac{kT}{kT_0}\right)^3. \tag{206}$$

При $\alpha = 1/2$ левая часть (205) равна 1. Поэтому, для $T \gg T_0$, $\Omega(T) \gg 1$, $\ln\Omega(T) \gg 1$, приближенное решение этого трансцендентного уравнения итерациями по методу Саха определяет с логарифмической точностью температуру диссоциации, $T = T_d$ и интервал перехода к полной диссоциации δT_d, как:

$$kT_d \approx \frac{J^0}{\ln\Omega(T_d)} \simeq \frac{J^0}{\ln\Omega(J^0/k)}, \quad \text{и:} \quad k\delta T_d \simeq \frac{J^0}{(\ln\Omega(J^0/k))^2}. \tag{207}$$

Для оценки kT_0 заметим, что при $m_0 = 930$ Мэв$/c^2$, $(\hbar c)^2 = 0,39 \cdot 10^{-31}$ Гэв^{2}м^2, $\mu_\tau = 314$, и с учтем (100) и неизменности спиновых кратностей при объединении атомов в молекулы: $g_{F2} \Longrightarrow g_F^2$, $g_G \Longrightarrow g_U g_F^6$, $g_\tau \Longrightarrow g_U g_F^4$,

$$\frac{N_G^m}{V} = \frac{\varrho_G N_A}{\mu_G} \sim \frac{(\text{г м}^{-3}\text{моль}^{-1})}{(\text{г моль}^{-1})}, \quad \frac{\mu_G}{\mu_\tau} \approx 1,12, \quad \frac{m_F}{m_0} = \mu_F, \quad \theta_i \sim \frac{\hbar^2}{m_i R_i^2}, \tag{208}$$

$$\frac{g_\tau g_F^2}{g_G} \Longrightarrow 1, \quad kT_0 \Longrightarrow \left(\frac{N_G^m}{V}\right)^{2/3} \left(\frac{\mu_G}{\mu_\tau} \cdot \frac{\theta_\tau}{\theta_G}\right)^{1/2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_F}\right) = \tag{209}$$

$$= \left(\frac{\varrho_G N_A}{\mu_G}\right)^{2/3} \left(\frac{\mu_G}{\mu_\tau}\right)^{1/2} \left(\frac{\theta_\tau}{\theta_G}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi(\hbar c)^2}{\mu_F m_0 c^2}\right), \tag{210}$$

$$\text{где при: } R_G \approx R_\tau, \quad \text{имеем: } \frac{\theta_\tau}{\theta_G} \simeq \frac{6\mu_F}{4\mu_F} \left(\frac{R_G}{R_\tau}\right)^2 \simeq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \text{откуда:} \tag{211}$$

$$kT_0 \simeq 7,61 \cdot 10^{-5}\,\text{эв} = k \cdot 0,884(K), \quad T_d \simeq 2456(K), \quad \delta T_d \simeq 71(K). \tag{212}$$

Здесь учтены значения ковалентных радиусов урана R_U и фтора R_F из того же Справочника, и то, что тяжелое ядро урана в центре дает малый вклад в моменты инерции молекул ГФУ и ТФУ. Представление статсумм ГФУ и ТФУ статсуммой идеального газа при столь высоких плотностях оправдано лишь логарифмической зависимостью искомой температуры (207) от этих плотностей.
Из уравнения (205) можно, наоборот, определять степень диссоциации α при заданных температуре T и объеме V, а затем и концентрации отдельных компонент $x_i = N_i/N$, например:

$$x_F = \frac{N_F}{N} = \frac{2\alpha}{1+2\alpha}, \qquad \alpha^3 + \mathcal{K}\alpha - \mathcal{K} = 0, \tag{213}$$

$$\text{где константа реакции: } \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T,V) = 2^{-2}\Omega(T)\, e^{-J^0/(kT)}. \tag{214}$$

Ответ:
Температура диссоциаци ГФУ на ТФУ и атомарный фтор – около $2456(K)$. Это значение вполне согласуется с температурой кипения ТФУ, равной $1691(K)$, при $P = \Pi = 1$(*атм*), ($2003(K)$, при $P \gg \Pi$). Характерные температуры колебательных степеней свободы η_G, η_τ имеют тот же порядок $10^3(K)$. Поэтому их учет существенно не изменит полученой оценки.

Задача 10:
Исходя из законов сохранения и принципов термодинамики оценить энергетическое влияние человеческой цивилизации на физические причины глобальных изменений климата. Оценить вклад от использования ядерной энергии.
Решение:

Исходя из законов сохранения момента количества движения и энергии получаем следующую картину. В процессе образования Земли из газопылевого облака она довольно быстро вращалась, в результате чего центробежными силами тяжелые атомы урана были вытолкнуты и более или менее равномерно размазаны у **поверхности** твердеющей планеты, а ее вращение замедлилось.
Солнце излучает как черное тело с температурой поверхности $T_R \approx 5778K$. Значение солнечной постоянной $\Lambda = 1367\,\text{Вт/м}^2 = 1,367 \cdot 10^3\,\text{Дж/(сек м}^2)$ и средний радиус Земли $\rho = 6,371 \cdot 10^6\,\text{м}$ приводят к падению на Землю в среднем $\pi\rho^2\Lambda \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 364$ сек $= 5,5 \cdot 10^{24}$ Дж в год. Причем, относительная вариация этой величины на $10^{-2} \mapsto 1\%$ уже приводит к изменению температуры планеты на 1-2 градуса. Однако, доля r этой падающей энергии просто отражается от атмосферы, суши и мирового океана, доля d проходит сквозь Землю, и лишь доля $a = 1 - r - d$ поглощается ею и, либо запасается путем фотосинтеза еще не вырубленными лесами, либо переизлучается в виде равновесного чернотельного излучения уже с температурой ее поверхности $T_\rho \simeq 288K$ (15^0C). Поскольку Земля находится в термодинамическом равновесии и с излучением Солнца на своей орбите, то по его условиям, пренебрегая фотосинтезом, имеем:

$$\pi\rho^2 a\Lambda = 4\pi\rho^2 \mathcal{J}_\rho^-, \text{ где мощность Солнца: } \mathcal{P}_\odot = 4\pi R^2 \mathcal{J}_R^+ = 4\pi\ell^2\Lambda, \tag{215}$$

$$\text{при: } \mathcal{J}_{R,\rho}^{+,-} = \int\limits_0^\infty d\omega J_{R,\rho}^{+,-}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2}\, c \ll u(T_{R,\rho}) \gg, \quad J_{R,\rho}^{+,-}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2}\, c\, \overline{u}(\omega, T_{R,\rho}), \tag{216}$$

$$\ll u(T) \gg = \sigma T^4, \text{ откуда: } \left(\frac{T_\rho}{T_R}\right)^4 = \frac{\mathcal{J}_\rho^-}{\mathcal{J}_R^+} \Longrightarrow a\left(\frac{R}{2\ell}\right)^2 \equiv a\left(\frac{2\beta}{4}\right)^2 \mapsto \frac{a}{20^4}. \tag{217}$$

Здесь ℓ - расстояние от Земли до Солнца, $R = R_\odot$ – его радиус, $2\beta = 10^{-2}$ – его видимый с Земли угловой диаметр, $\mathcal{J}_{R,\rho}^{+,-}$ и $J_{R,\rho}^{+,-}(\omega)$ – соответствующие плотности **полных** радиальных потоков энергии, излучаемых перпендикулярно с поверхности Солнца и Земли, которые отличаются вдвое от **средних перпендикулярных** потоков на единицу телесного угла, определяемых законом Кирхгофа: $\overline{I}_{R,\rho}^{+,-}(\omega) = (1/4)c\,\overline{u}(\omega, T_{R,\rho})$ (см. ниже *Замечание 1*), и чье сравнение приводит, разумеется, к тому же условию равновесия (217). Здесь c – скорость света, σ – постоянная Стефана-Больцмана, $\overline{u}(\omega, T)$ – планковская спектральная плотность, $\ll u(T) \gg$ – плотность полной внутренней энергии излучения. Как видно из (Рис. 3), вследствии флюоресценции излучения, соотношение $\Longrightarrow$ в (217) **не имеет места** для отдельных монохроматических радиальных потоков $J_{R,\rho}^{+,-}(\omega)$ или $\overline{I}_{R,\rho}^{+,-}(\omega)$, то есть, для каждой отдельной частоты $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$, тем более, в случае зависимости от нее ρ_ω и коэффициентов r_ω, a_ω. А так как Земля вращается вокруг своей оси, то падающее на нее излучение $\pi\rho^2\Lambda$ эффективно “размазывается” по всей ее площади поверхности $4\pi\rho^2$, так что среднесуточная, точнее, среднегодовая плотность потока падающей солнечной энергии будет в 4-ре раза меньше: $\pi\rho^2\Lambda(4\pi\rho^2)^{-1} = \Lambda/4 \approx 341 \div 342\,\text{Вт/м}^2$, на (Рис. 2) и (Рис. 5):

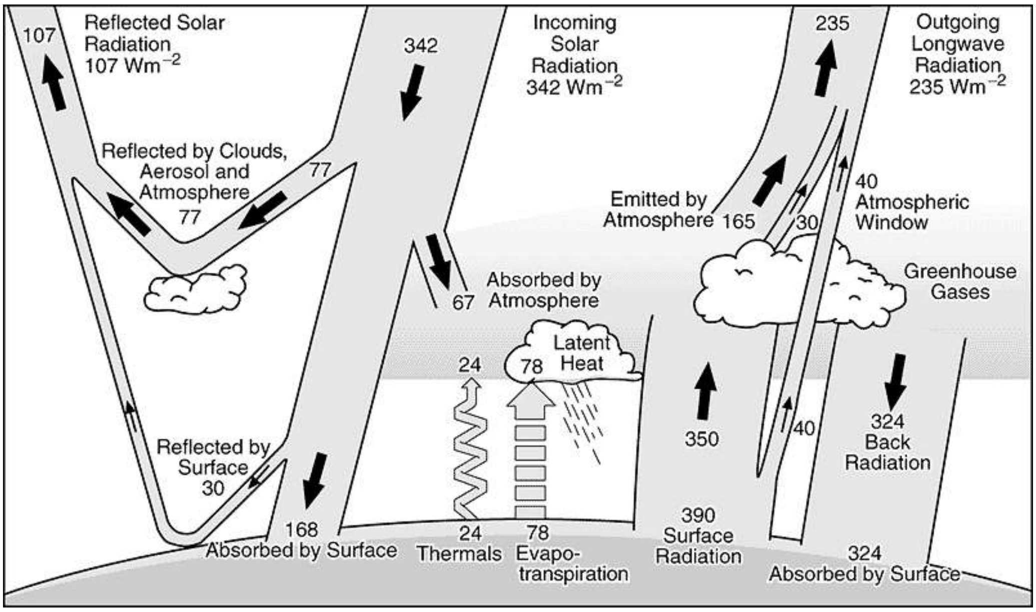

Рис. 2: Равновесие излучения Солнца, Земли и атмосферы по усредненным данным за период до 2000 года (K.E. Trenberth et al.).

В тоже время, при достаточно малом “среднем” значении коэффициента поглощения $a_\omega \Rightarrow a \leq 1$, порог влияния на температуру Земли $10^{-2}a\Lambda$ может оказаться значительно меньше, чем $10^{-2} \cdot 10^{24} = 10^{22}$ Дж в год, и лежать между $10^{20} \div 10^{21}$ Дж в год.

Дело в том, что наибольшая доля излучаемой Солнцем и поглощаемой Землей энергии приходится на ультрафиолетовый (УФ) и видимый диапазон частот, для которого атмосфера достаточно прозрачна. Тогда как Земля излучает в основном в инфракрасном (ИК) диапазоне, где атмосфера эффективно поглощает и рассеивает излучение молекулами водяного пара, метана, озона и CO_2.

Этот, так называемый “парниковый эффект”, связаный с ростом значений r_ω в инфракрасном диапазоне за счет уменьшения прозрачности атмосферы, будет действовать двояко: увеличение потока отраженной внешней солнечной энергии приведет к уменьшению и a_ω, понижая истинный порог влияния на температуру Земли, а обратное отражение от атмосферы найденного ниже потока дополнительной “внутренней” энергии (219) приведет к быстрому накоплению недостающего до этого порога порядка. Другими словами, “средний” коэффициент поглощения a вполне может быть уже существенно меньше 1-цы, чтобы влияние парникового эффекта и потока тепла (219) оказались заметны, однако при этом все еще $a^{1/4} \simeq 1$, в соответствии со значениями температур равновесных излучений Земли и Солнца в (217) и на (Рис. 2), $T_\rho \approx a^{1/4} T_R/20$ (например, при $a^{1/4} = 0,9$, $a = 0,656$). То есть, надо знать, как правильно усреднять ρ_ω и коэффициенты r_ω, a_ω по частотным распределениям на (Рис. 3):

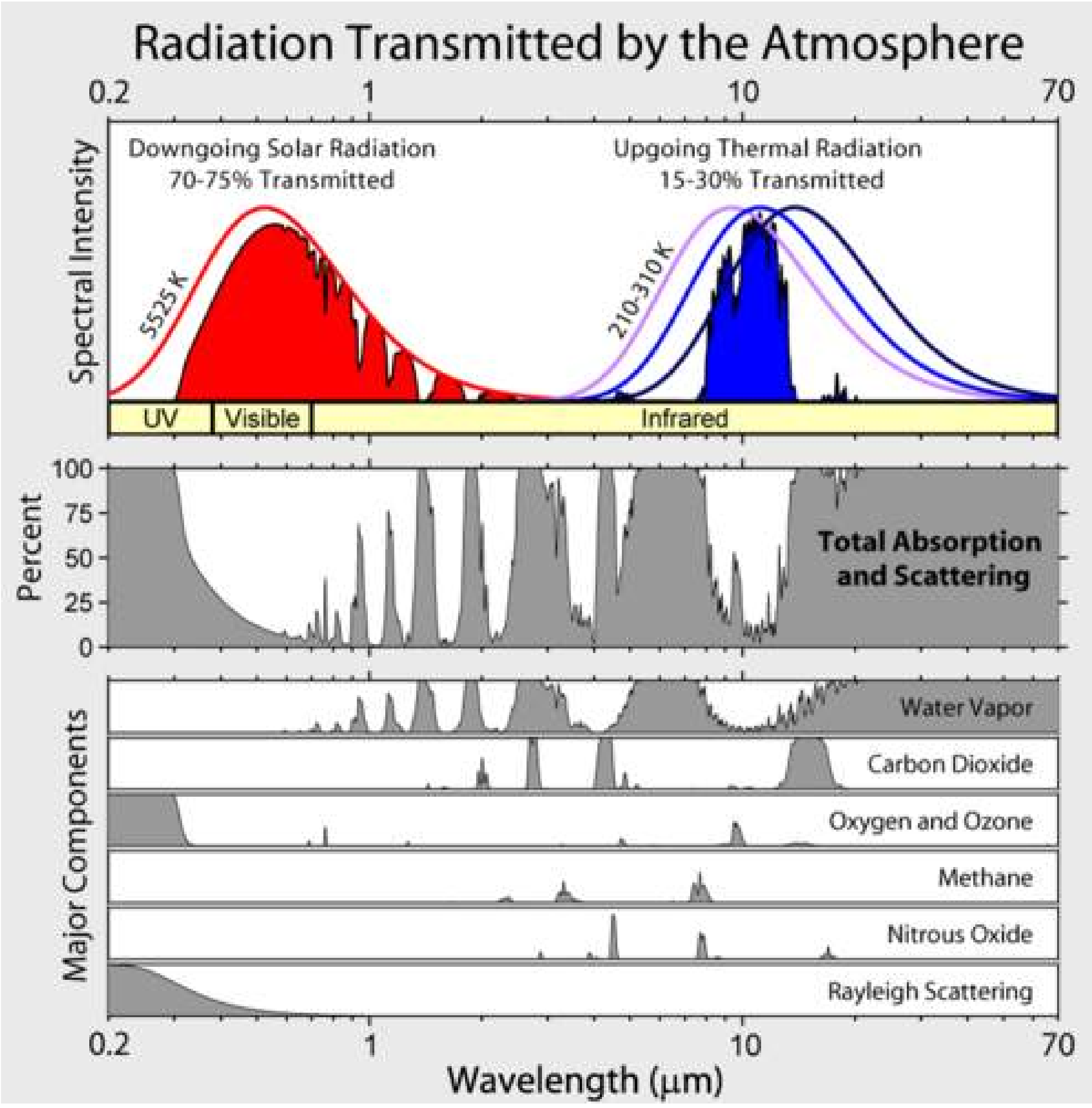

Рис. 3: Спектральные плотности излучений Солнца (УФ и видимый свет), и Земли (ИК диапазон), и прозрачность для них атмосферы из кислорода, метана, водяного пара и CO_2.

За 4-5 млрд. лет своего существования Земля поглотила и запасла путем фотосинтеза огромное количество падавшей на нее солнечной энергии в виде угля, нефти и газа. Скорость освобождения этой энергии человечеством за последние 150 лет выросла на два порядка и продолжает расти (Рис. 4):

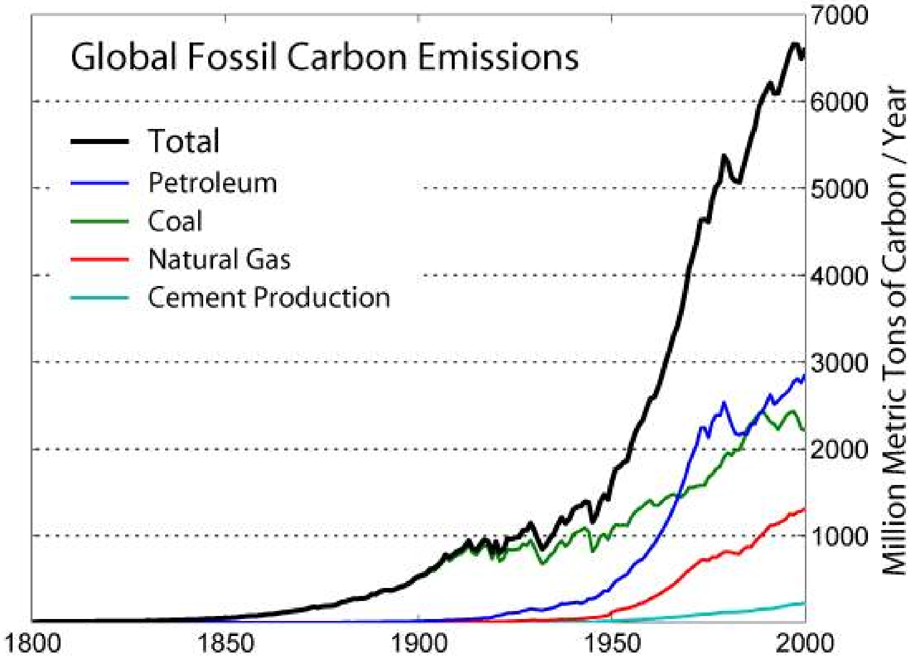

Рис. 4: Добыча углеродного топлива с 1800 по 2000 год

Но вся эта запасенная Землей солнечная энергия, – капля по сравнению с океаном ядерной энергии, запасенной и постепенно непрерывно выделяемой радиоактивно распадающимися ядрами калия 40, изотопов урана, тория и других радиоактивных элементов, подогревающей земную кору изнутри **независимо** от Солнца, играя важную роль в тепловом балансе планеты.

Однако, неуемное в своей жадности человечество вмешалось и в этот процесс и, путем громадных дополнительных затрат энергии на обогащение[4], заставило уран планеты отдавать свою энергию на АЭС с невообразимо большей скоростью, чем это протекало бы в природных условиях. Так что энергия, гораздо большая той, что должна была излучиться за миллионы лет, путем альфа- и бета- распада, излучается теперь в реакторах за часы или дни совершенно иным способом, – в реакциях вынужденного деления ядер урана или конверсии их в плутоний с последующим делением. В итоге, появление на планете человека

[4]Только реакторы на тяжелой воде могут использовать необогащенный уран.

изменило судьбу огромного числа атомов урана не просто на ближайшие 24 тысячи лет, оно изменило их судьбу **навсегда**. В то время как в Земле половина их превратилась бы в стабильный свинец через четыре с половиной миллиарда лет, в реакторах, помимо плутония, америция и т.д., они порождают еще тонны иных, бесполезных и опаснейших для человека радиоактивных осколков.

Мощность в 10^6 Вт =1МВт, выделяемая в течение суток при сжигании за это время 3 тонн углеродного топлива, либо "сжигании" в реакторе 1г $U^{(235)}$ или Pu, означает выделение $10^6 \cdot 3600 \cdot 24$ сек $= 8,64 \cdot 10^{10}$ Дж в этот день, или же $10^6 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 364$ сек $= 3,15 \cdot 10^{13}$ Дж в год. При этом, за этот год будет сожжено $3 \cdot 364 = 1,092 \cdot 10^3$ тонн углеводородов, или 364 грамма урана.

Эти числа дают основание апологетам ядерной энергетики заявлять, что "Энерговыделение 1 кг урана эквивалентно сжиганию 3000 тонн угля (ж/д состава из 50 вагонов)". Однако, при этом они тщательно скрывают, что физика "горения" ядерного топлива такова, что эффективно "сжечь" этот 1 кг урана можно, лишь загрузив в реактор не менее 27 тонн ядерного топлива. Так что оставшиеся после его "сгорания" 26 999 килограммов извлекаются затем уже в виде отработанного ядерного топлива (ОЯТ), и в дальнейшем требуют до сих пор неподдающихся оценке затрат энергии, внимания и денег на их хранение, переработку и утилизацию на протяжении **уже сотен и тысяч лет**.

Поскольку, ежегодно на планете добывается и сжигается около $7 \cdot 10^9$ тонн углеродного топлива и, вдобавок, действует более 430 ядерных реакторов средней мощностью 1ГВт=10^9 Вт, с КПД $\simeq 1/3$, то, так как по сути ВСЯ производимая человечеством ЭНЕРГИЯ в конце концов переводится им в ТЕПЛО[5], имеем:

$$\frac{7 \cdot 10^9}{1,092 \cdot 10^3} \cdot 3,15 \cdot 10^{13} + 430 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 364 \approx \tag{218}$$

$$\approx (2,02 + 0,41) \cdot 10^{20} = 2,43 \cdot 10^{20} \text{ Дж в год.} \tag{219}$$

Причем, главный обман состоит здесь в том, что для выработки топлива ДЛЯ, и последующей утилизации отходов ОТ этих "ядерных" $0,41 \cdot 10^{20}$ Дж в год, из "углеродных" $2,02 \cdot 10^{20}$ Дж в год было взято ДО того, и будет еще взято ПОСЛЕ того во много раз больше энергии. Только это делалось, делается и будет делаться незаметно и постепенно – в течении многих лет. Однако, все это, пока еще без учета, сравнимого с полной тепловой мощностью АЭС, тепловыделения уже в хранилищах ОЯТ при АЭС, где его выдерживают от 1 до 3-х лет, работы подвижных реакторов ВМФ и других плавучих АЭС, периодических ядерных испытаний и запусков космических аппаратов, а также многочисленных газовых факелов при нефтедобыче, и лесных пожаров.

[5]Тогда как электроэнергия, вырабатываемая на ГЭС и ВЭС, переводилась бы в тепло самой природой и в отсутствие этих ЭС, и потому не влияет на тепловой баланс Земли.

Закутанная в шубу своей атмосферы планета не успевает излучать всю эту энергию в окружающее пространство в виде равновесного чернотельного излучения, а потому нагревается сама: Net absorbed $= 0,9\,\text{Вт/м}^2$ на (Рис. 5):

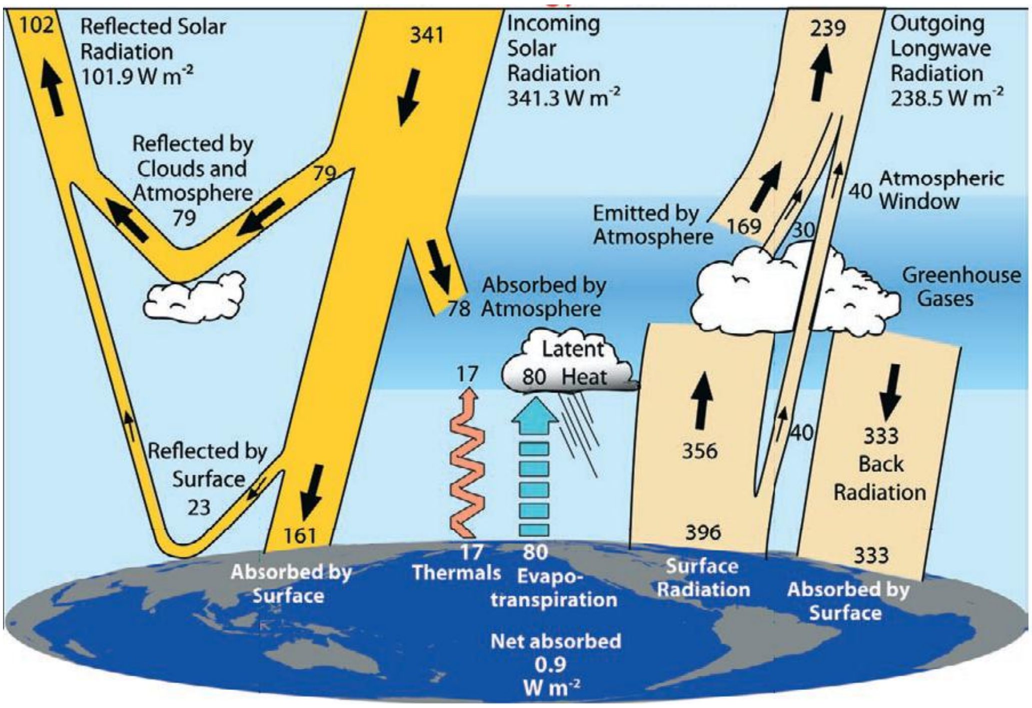

Рис. 5: Равновесие излучения Солнца, Земли, атмосферы за 2000-2004 гг. Net absorbed - мощность количества тепла, поглощаемого Землей, ранее отсутствовала (K.E. Trenberth et al., Earth's global energy budget. BAMS March 2009, p 311. DOI:10.1175/2008BAMS2634.1).

В будущем это может привести уже к лавинообразному разогреву, несмотря на астрономическую, но все же, конечную теплоемкость мирового океана, определяющую лишь "время задержки" наблюдаемых последствий этого разогрева, но в принципе не способную предотвратить эти последствия. Причем, ленивое в своей безграмотности человечество предпочитает барахтаться в пеленках Первого Начала термодинамики, не пытаясь усвоить и извлечь колоссальную выгоду из Второго Начала термодинамики, и с убийственной расточительнстью использует добытые крохи полезной энергии для своего прямого обогрева, вместо того чтобы *отнимать ею гораздо большее количество тепла от более холодной атмосферы* (см. Дж. Орир, "Физика", том 1, М: Мир, 1981 (Jay Orear, "Physics", vol. 1, Co. Inc. New York)).

Согласно принципу Ле Шателье – Брауна, реакция планеты неизбежно направлена на **устранение причин** такого грубого вмешательства в ее равно-

весное состояние, проявляясь как возмездие за эту энергетическую жадность и расточительность, в виде нарастающего числа ураганов, тайфунов, торнадо и их мощности. Нагретая атмосфера нагретой планеты, даже при неизменном атмосферном давлении П станет заметно более разреженной (235) (см. ниже *Замечание 2*), всвязи с ростом высоты ее центра тяжести z_{cw} (30), (38), (40). Вырубленные леса не оставят никаких шансов на ее скорую регенерацию. И хотя в ближайшее время удушье нам не грозит (см. *Замечание 2*), условия жизни на Земле могут стать гораздо менее комфортными.
Ответ:
Согласно Второму Началу термодинамики, во Всененной есть только процесс возрастания энтропии. Но в масштабах Земли у нас, быть может, есть все же некоторая свобода – выбирать, когда, где и как она будет возрастать (?).

Замечание 1: Коэффициенты 1/4 в законе Кирхгофа и 1/2 в (216) имеют чисто геометрическое происхождение. Причем, 1/4 совпадает с отношением средней скорости $\ll v_\perp \Theta(v_\perp) \gg$ вдоль перпендикулярной стенке полуоси $\mathbf{N}_\Sigma$, к средней абсолютной скорости $\ll v \gg$, т.к. $v_\perp = v\cos\vartheta$, и в этом закон Кирхгофа вполне аналогичен выражению для плотности потока $\overline{\mathcal{J}}_\Sigma(\mathbf{N}_\Sigma)$ газа из малого отверстия площади Σ в сосуде с фиксированной плотностью числа частиц $\overline{n}$, как числу ударов молекул газа в секунду о единицу площади этой стенки (Л.Л. Гольдин, Г.И. Новикова, Введение в квантовую физику. М: Наука, 1988, §43):

$$\overline{\mathcal{J}}_\Sigma(\mathbf{N}_\Sigma) = \ll v_\perp \Theta(v_\perp) \gg \overline{n} = \frac{1}{4} \ll v \gg \overline{n}, \quad \text{или:} \quad \overline{\mathcal{J}}^{+,-}_{R,\rho}(\mathbf{N}_\Sigma) = \frac{1}{4}\, c \ll u(T_{R,\rho}) \gg, \tag{220}$$

$$\text{т.к.:} \ll v \gg \mapsto c, \quad \overline{n} \mapsto \ll u(T) \gg, \quad \text{и:} \int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{1}{2}, \quad \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta = 2. \tag{221}$$

Действительно, запишем выражение для энергии, излученной черным телом в спектральном интервале $d\omega$ за время Δt с площадки Σ в направлении вектора $\mathbf{n}(\vartheta,\varphi)$, под углом ϑ к нормали $\mathbf{N}_\Sigma$ к этой площадке, в элемент телесного угла $d\Omega = d\Omega(\mathbf{n}) = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, при $\cos\vartheta = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}_\Sigma)$:

$$dE^{\vartheta;\varphi}_{\omega\Sigma} = \Delta V_\vartheta\, \overline{u}(\omega,T)\frac{d\Omega}{4\pi}d\omega \Rightarrow dI^{\vartheta;\varphi}_{\omega\Sigma}\Delta t\Sigma d\omega = \mathcal{I}_{\omega\Sigma}(\mathbf{n})\cos\vartheta d\Omega\Delta t\Sigma d\omega, \tag{222}$$

$$\text{где тогда:}\ \mathcal{I}_{\omega\Sigma}(\mathbf{n}) \Longrightarrow \frac{c}{4\pi}\overline{u}(\omega,T) = \mathcal{I}^0_{\omega\Sigma}, \ \text{– лучевая интенсивность на } \Sigma, \tag{223}$$

излучения в направлении вектора $\mathbf{n}$, в равновесии не зависящая от этого $\mathbf{n}$, а $\Delta V_\vartheta = c\Delta t\Sigma\cos\vartheta$ – объем косого цилиндра, который заполняют за время Δt излученные в $d\Omega(\mathbf{n})$ фотоны. Излучательную способность – плотность потока энергии излучения, отнесенную к спектральному интервалу $d\omega$, получим, проинтегрировав (222), с учетом (221), по всем возможным направлениям излучения **n с одной стороны** площадки, и разделив результат на $\Delta t\,\Sigma\,d\omega$:

$$e_0(\omega,T) = \int\limits_{2\pi} dI^{\vartheta,\varphi}_{\omega\Sigma} = \frac{1}{4\pi\Delta t\Sigma}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, \Delta V_\vartheta\, \overline{u}(\omega,T) \overset{!!!}{=} \overline{I}_{\omega\Sigma}(\mathbf{N}_\Sigma) = \tag{224}$$

$$= \int\limits_{2\pi} \mathcal{I}_{\omega\Sigma}(\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}_\Sigma)d\Omega = \mathcal{I}^0_{\omega\Sigma}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \pi\mathcal{I}^0_{\omega\Sigma} = \frac{c}{4}\,\overline{u}(\omega,T). \tag{225}$$

Полный поток (220) вновь дается интегралом вида (216) по всем частотам ω (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика. М: Наука, 1976, §63):

$$\overline{\mathcal{J}}^{+,-}_{R,\rho}(\mathbf{N}_\Sigma) = \int\limits_0^\infty d\omega \overline{I}^{+,-}_{\omega\Sigma}(\mathbf{N}_\Sigma) = \frac{c}{4}\int\limits_0^\infty d\omega\, \overline{u}(\omega, T_{R,\rho}) = \frac{c}{4} \ll u(T_{R,\rho}) \gg. \tag{226}$$

В общем случае поверхностная лучевая **интенсивность** $\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})$ в точке $\mathbf{r}$ излучения в направлении вектора $\mathbf{n}$ в виде потока вектора $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})$, с реальной или воображаемой излучающей поверхности Σ, **определяется** (А. Исимару, Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.1, М: Мир, 1981, §7.1, §7.2) **мощностью** $d\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{N}_\Sigma)$ потока энергии (222), протекающей за время dt в направлении вектора $\mathbf{n}(\vartheta,\varphi)$, через ориентированный по $\mathbf{N}_\Sigma$ элемент площади $d\Sigma$, в единицу телесного угла $d\Omega(\mathbf{n}) = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, при $d\mathbf{\Sigma} = \mathbf{N}_\Sigma d\Sigma$, и для $\cos\vartheta = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}_\Sigma)$, в интервале частот $(\omega,\omega+d\omega)$, **как** $dE^{\vartheta,\varphi}_{\omega\Sigma} = d\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{N}_\Sigma)dt$:

$$d\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{N}_\Sigma) = (\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})\cdot d\mathbf{\Sigma})\, d\Omega(\mathbf{n})\, d\omega = \mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})\cos\vartheta\, d\Omega(\mathbf{n})\, d\Sigma\, d\omega\,. \tag{227}$$

$$\text{Но: } d\overline{u}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{n})dt}{c\,dt\,d\Sigma d\omega} = \frac{\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})\,d\Omega(\mathbf{n})\,d\Sigma\,d\omega\,dt}{c\,dt\,d\Sigma\,d\omega} = \frac{\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})d\Omega(\mathbf{n})}{c}\,; \tag{228}$$

$$\text{и: } \overline{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{4\pi} \mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})d\Omega(\mathbf{n}), \tag{229}$$

есть элемент плотности энергии, как ее количество, покидающее со скоростью c за время dt элемент площади $d\Sigma$ **по его нормали n**, в элемент телесного угла $d\Omega(\mathbf{n})$, в интервале частот $(\omega,\omega+d\omega)$, а потому занимающее объем $cdtd\Sigma$; и соответствующая полная плотность энергии, как сумма элементарных энергий, приходящих в точку **r со всех** направлений. Для равновесного чернотельного излучения, – с изотропной, независящей от направления $\mathbf{n}$ лучевой интенсивностью $\mathcal{I}^0_\omega$, определение (229) возвращает к формулам (223), (225), а формула (227) превращается в закон Ламберта: $d\mathcal{P}_\vartheta = d\mathcal{P}_\perp\cos\vartheta$. В тоже время, простое геометрическое рассмотрение (Рис. 7) показывает, что лучевая интенсивность вдоль луча $\mathcal{I}_\omega(r\mathbf{n},\mathbf{n}) = \mathcal{I}_r(\mathbf{n})$, т.е. при $\widehat{\mathbf{r}} = \mathbf{n}$, остается постоянной: $\mathcal{I}_{r1}d\Sigma_1 d\Omega_1 = \mathcal{I}_{r2}d\Sigma_2 d\Omega_2$, т.к. $d\Sigma_1 d\Omega_1 = d\Sigma_1 d\Sigma_2/r^2 = d\Sigma_2 d\Omega_2$. Из (Рис. 6) находим плотность потока излучения в радиальном направлении $\widehat{\mathbf{r}}$ и полную плотность его энергии, приходящие в точку $\mathbf{r} = r\,\widehat{\mathbf{r}}$ с поверхности изотропно излучающей сферы радиуса a, видимой из нее под углом $2\vartheta_0 = 2\arcsin(a/r)$. Так как для любого луча с поверхности сферы: $\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \mathcal{I}_\omega(\mathbf{r}'\!=\!r'\mathbf{n},\mathbf{n}) \Rightarrow \mathcal{I}^0_\omega$, где r' – расстояние вдоль луча от точки излучения на сфере (а r – от ее центра), то:

$$J^\pm_r(\omega,\widehat{\mathbf{r}}) = \int\limits_{\Omega_0} d\Omega(\mathbf{n})\,(\widehat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n})) \Longrightarrow \int\limits_{\Omega_0} d\Omega(\mathbf{n})\,(\widehat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\,\mathcal{I}_\omega(r'\mathbf{n},\mathbf{n}) \Longrightarrow \tag{230}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{I}^0_\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\vartheta_0} d\vartheta \sin\vartheta\,\cos\vartheta = \pi\mathcal{I}^0_\omega\left(\frac{a}{r}\right)^2, \text{ откуда: } J^\pm_a(\omega,\widehat{\mathbf{r}}) = \pi\mathcal{I}^0_\omega \mapsto \overline{I}^\pm_{\omega a}(\widehat{\mathbf{r}}), \tag{231}$$

аналогично (224), (225), и снова: $r^2 J^\pm_r(\omega) = a^2 J^\pm_a(\omega)$, в соответствии с (215).

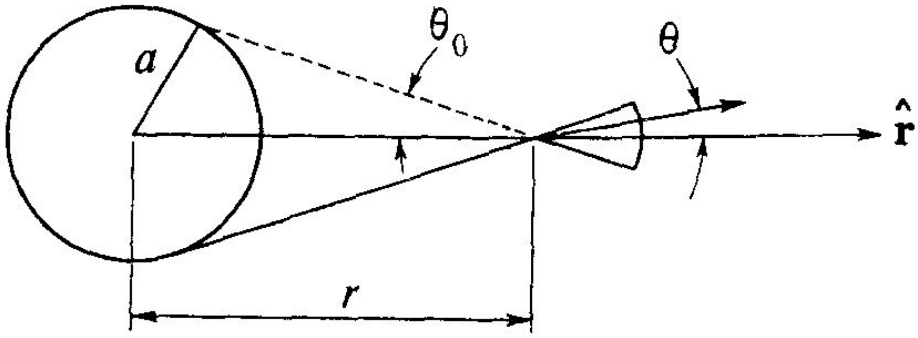

Рис. 6: Излучение с поверхности сферы радиуса a на расстоянии r: $\sin\vartheta_0 = a/r$.

Однако, для плотности энергии теперь, согласно (229), вместо (223), имеем:

$$\overline{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega_0} d\Omega(\mathbf{n})\,\mathcal{I}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n}) \Longrightarrow \frac{\mathcal{I}^0_\omega}{c}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\vartheta_0} d\vartheta\sin\vartheta = \frac{2\pi\mathcal{I}^0_\omega}{c}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2}\,\right], \tag{232}$$

$$\overline{u}(\mathbf{r})\Big|_{r\gg a} = \frac{\pi\mathcal{I}^0_\omega}{c}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{J^\pm_r(\omega)}{c},\;\; \overline{u}(a\widehat{\mathbf{r}}) = \frac{2\pi\mathcal{I}^0_\omega}{c} = \frac{2J^\pm_a(\omega)}{c},\;\; J^\pm_a(\omega) = \frac{c}{2}\,\overline{u}(a\widehat{\mathbf{r}}), \tag{233}$$

где $r \mapsto \ell, a$, при $a \mapsto R_\odot, \rho$, – соответственно. Чтобы вернуть здесь 1/4 закона Кирхгофа (225), надо добавить еще такой же вклад от излучения внутрь от дальней части сферы, т.е. принять и внутренность сферы прозрачной, либо саму точку наблюдения поместить согласно (229) **внутри** излучающей внутрь сферы.

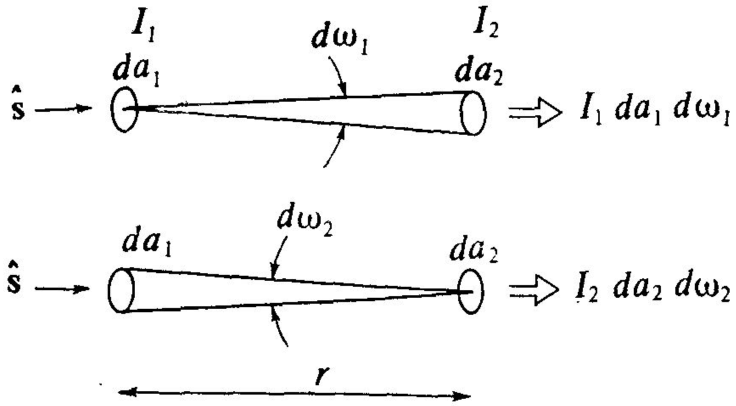

Рис. 7: Неизменность лучевой интенсивности вдоль луча.

Полагая, что поверхностная интенсивность внутри Солнца и Земли исчезает: $\mathcal{I}^{(in)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{n}) = 0$, для них уместно использовать именно формулы (233), (216). Из (231) видно, что смысловое различие между определениями потоков условно.

Замечание 2: Согласно барометрической формуле (39), (40) из *Замечания 4* к Задаче 3, при $T_0 = 273\,K$ (т.е. 0^0C) давление в $\Pi = 1(\mathit{атм})$ на площади Σ обеспечивается столбом воздуха из N молекул массы M_1 в поле тяжести g с центром тяжести на высоте $z_c \approx 8\,$км. Проблемы с дыханием при восхождении возникают уже на высоте $z_{cr} \simeq 2\,$км, что отвечает уменьшению плотности числа частиц $\overline{n}(z) = \overline{n}(0)e^{-z/z_c}$, как $\overline{n}(z_{cr}) = \overline{n}(0)e^{-1/4}$, в $\xi = e^{1/4} \approx 1,284$ раза. Поскольку:

$$m = NM_1, \quad \mu = N_A M_1, \quad R = N_A k, \quad \varrho(z) = \overline{n}(z)M_1, \quad P(z) = \overline{n}(z)kT, \tag{234}$$

$$\text{то: } m\mathrm{g} = NM_1\mathrm{g} = \Pi\Sigma = \overline{n}(0)kT\Sigma, \ \text{ откуда: } \overline{n}(0) = \frac{\varrho(0)}{M_1} = \frac{N}{kT}\frac{M_1\mathrm{g}}{\Sigma}, \tag{235}$$

и такое уменьшение $\overline{n}_0(0) \mapsto \overline{n}_0(0)/\xi$ только за счет температуры $T \mapsto \xi T_0$ означает ее рост в ξ раз, до $350\,K$. Однако, с ростом T все больше молекул приобретают 2-ю космическую скорость $\upsilon_2 \simeq 11,3\,$км/сек, навсегда покидая Землю, что может изменить и величину N. Если 1-я космическая скорость $\upsilon_1 = \sqrt{\mathrm{g}\rho} \simeq 8\,$км/сек отвечает финитному вращению молекулы с полной энергией $E = -M_1\upsilon_1^2/2 \equiv -\varepsilon_1 < 0$, как падению “мимо” Земли массы M и радиуса ρ, то 2-я космическая скорость $\upsilon_2 = \sqrt{2\mathrm{g}\rho}$ отвечает предельной инфинитной параболической траектории с нулевой полной энергией $E \Rightarrow 0$, откуда, при $r \Rightarrow \rho$, и имеем для них, соответственно:

$$M_1\frac{\upsilon_1^2}{r} = M_1\frac{GM}{r^2}\bigg|_{r=\rho} \Rightarrow M_1\,\mathrm{g}, \quad E = \frac{M_1\upsilon^2}{2} - \frac{GM_1M}{r}, \quad \frac{M_1\upsilon_2^2}{2} = M_1\mathrm{g}\rho \equiv \varepsilon_2. \tag{236}$$

Максвелловская доля $w_T(\varepsilon_2)$ молекул, чья энергия (скорость), при температуре газа T, превышает ε_2, (υ_2), определена выражениями (67), (68), как безразмерная функция переменной $y_2(T) \gg 1$, что, при $T \simeq T_0 = 273K$, дает:

$$\upsilon_T^2 = \frac{2kT}{M_1} = \frac{2RT}{\mu} \simeq (400\,\text{м/сек})^2, \quad y_2(T) = \frac{\varepsilon_2}{kT} = \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_T^2} \simeq 800 \sim (28)^2, \tag{237}$$

$$w_T(\varepsilon_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{y_2}^{\infty} dy \sqrt{y} e^{-y} \simeq \frac{2\sqrt{y_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-y_2} \sim 10^{-260}, \quad \text{т.е.:} \ N\left(1 - w_T(\varepsilon_2)\right) \approx N. \tag{238}$$

Тем не менее, при фиксированной температуре T, "на смену" улетевшим молекулам, согласно максвелловскому распределению $f_T(\mathbf{v})$, постоянно будут "приходить" новые, и существует конечное время $\tau_\rho(T)$, за которое планета радиуса ρ потеряет свою атмосферу (Коткин Г.Л., Образовский Е.Г. Задачи по статистической физике. НГУ, Новосибирск, 2007. зад. 3.10-3.12). В частности, для Луны оно уже истекло. Концентрация $\overline{\mathrm{n}}(r)$ молекул M_1 газа μ на расстоянии r от центра Земли, при $r = \rho + z$ и условии на ее поверхности, $\overline{\mathrm{n}}(\rho) = \overline{n}(0)$, равна:

$$\overline{\mathrm{n}}(r) = \overline{n}(0) \exp\left[\frac{GM_1M}{kT}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right)\right] = \overline{n}(0) \exp\left[-\frac{\mu \mathrm{g} z}{RT}\left(1 + \frac{z}{\rho}\right)^{-1}\right] \equiv \tag{239}$$

$$\equiv \overline{\mathrm{n}}(\infty) \exp\left[-\frac{U(r)}{kT}\right], \quad \text{где:} \ \overline{\mathrm{n}}(\infty) = \overline{n}(0) \exp\left[-\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_T^2}\right], \quad z_c = \frac{RT}{\mu \mathrm{g}} = \frac{\upsilon_T^2}{2\mathrm{g}}, \tag{240}$$

$$\overline{\mathrm{n}}(r) = \overline{\mathrm{n}}(\rho + z) \underset{z \ll \rho}{\longmapsto} \overline{n}(z) = \overline{n}(0) e^{-z/z_c}, \tag{241}$$

и, при малых z воспроизводит барометрическую формулу (39), а при $r \to \infty$ стремится к ненулевой постоянной, $\overline{\mathrm{n}}(\infty) = \overline{n}(0) e^{-y_2(T)}$, определяемой 2-ой космической скоростью. То есть, при $T = \text{const}$, сам гравитационный потенциал $U(r) = -GM_1M/r$ в распределении Больцмана (239), (240) предполагает для него либо стационарные граничные условия на бесконечности, где $U(\infty) = 0$, с бесконечным тогда полным числом частиц $\mathcal{N} = \infty$, размазанных с ничтожной плотностью $\sim \overline{\mathrm{n}}(\infty)$ по всему пространству, с конечной $\overline{n}(0) \neq 0$, либо постепенное испарение с Земли любого конечного числа частиц $\mathcal{N} < \infty$, и тогда $\overline{n}(0) \to 0$. Т.е., строго говоря, распределение Больцмана не применимо к равновесному состоянию в поле тяжести (239), (240) с $\overline{n}(0) \neq 0$. Но при очень долгом и медленном испарении (238) вторая нестационарная картина очень близка к первой стационарной, в которой Земля просто рассеивает падающие на нее молекулы, как одна из них, но с бóльшим сечением рассеяния:

$$\sigma_\rho(\mathbf{v}) = \pi \rho^2 \left(1 + \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon^2}\right) \gg \sigma_\mathrm{b}(\mathbf{u}) \simeq 4\pi \mathrm{b}^2, \quad \text{при:} \ l_\mathrm{b} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{n}}(\infty)\sigma_\mathrm{b}} \gg \rho, \tag{242}$$

где $\upsilon = |\mathbf{v}|$ - скорость молекул радиуса b относительно Земли, $\mathrm{u} = |\mathbf{u}|$ - их относительная скорость, l_{b} - длина их свободного пробега в этом газе. Благодаря тому, что $l_{\mathrm{b}} \gg \rho$, процесс испарения молекул с Земли выглядит как процесс их (упругого) рассеяния, и число частиц, покидающих Землю за 1 секунду в нестационарной картине равно числу частиц $\overline{\nu}_\rho$ падающих на нее в стационарной картине за 1 секунду со всех направлений с плотностью потока $j(\upsilon) = \overline{n}(0)\upsilon$:

$$\nu_\rho(\upsilon) = \sigma_\rho(\mathbf{v})j(\upsilon), \quad \overline{\nu}_\rho = \langle\!\langle \nu_\rho(\upsilon) \rangle\!\rangle_T = \langle\!\langle \sigma_\rho(\mathbf{v})j(\upsilon) \rangle\!\rangle_T \equiv \tag{243}$$

$$\equiv \int d^3\upsilon \, \sigma_\rho(\mathbf{v})j(\upsilon)f_T(\mathbf{v}) \Longrightarrow 4\pi\,\overline{n}(0)\int\limits_0^\infty d\upsilon\,\sigma_\rho(\upsilon)\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_T}\right)^3 \frac{e^{-\upsilon^2/\upsilon_T^2}}{\pi^{3/2}}, \tag{244}$$

$$\text{где:} \;\; d^3\upsilon = \upsilon^2\,d\upsilon\,d\Omega(\mathbf{n}) \mapsto 4\pi\,\upsilon^2 d\upsilon, \;\; \text{а:} \;\; f_T(\mathbf{v}) = \frac{1}{\upsilon_T^3}\frac{e^{-\mathbf{v}^2/\upsilon_T^2}}{\pi^{3/2}}, \tag{245}$$

– функция распределения Максвелла. Однако, навсегда покидают Землю лишь молекулы с $\upsilon > \upsilon_2$, откуда следует, что интеграл в (244) обрезан снизу на υ_2, и скорость убывания полного числа частиц определяется выражением (сравни с (238) и (Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.2: Термодинамика и молекулярная физика. М. Наука, 1979, §79)):

$$-\frac{d\mathcal{N}}{dt} \Rightarrow \overline{\nu}_{\rho 2} = 4\sqrt{\pi}\,\overline{n}(0)\rho^2\int\limits_{\upsilon_2}^\infty d\upsilon\left(1 + \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon^2}\right)\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_T}\right)^3 e^{-\upsilon^2/\upsilon_T^2} = \tag{246}$$

$$= 2\sqrt{\pi}\,\overline{n}(0)\rho^2\upsilon_T\int\limits_{y_2}^\infty dy(y + y_2)e^{-y} = 2\sqrt{\pi}\overline{n}(0)\rho^2\upsilon_T(2y_2 + 1)e^{-y_2}, \quad \text{или:} \tag{247}$$

$$-\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \frac{\mathcal{N}}{\tau_\rho}, \quad \mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-t/\tau_\rho}, \quad \text{где:} \;\; \mathcal{N} = \frac{4\pi\rho^2}{\Sigma}N = 4\pi\overline{n}(0)\rho^2 z_c, \tag{248}$$

– есть полное число частиц в стационарной изотермической барометрической атмосфере (234), (235), и для характерного времени ее рассеяния, с учетом (240), находим:

$$\tau_\rho = \sqrt{\pi}\,\frac{\upsilon_T}{\mathrm{g}} \cdot \frac{e^{y_2}}{(2y_2 + 1)}. \tag{249}$$

В отсутствии экспоненциального множителя, т.е. без обрезания снизу интеграла (246), атмосфера рассеивалась бы за считанные минуты. Для Земли этот множитель, к счастью, огромен согласно (238). Однако, Луне и Меркурию с более высокой температурой поверхности и/или гораздо меньшими радиусом и массой повезло меньше.

Задачник

Кореенблит Сергей Эммануилович

ДВЕНАДЦАТЬ ЗАДАЧ ПО ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ISBN 978–5–9624–221–5

Печатается в авторской редакции

Темплан 2013. Поз. ??.
Подписано в печать ??.??.??. Формат ??x??
Бумага офсетная. Усл.-печ. л. ??. Тираж 75 экз.
Заказ ??.

Издательство Иркутского государственного университета
664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 36