ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Краевые задачи и интегральные уравнения для физиков

(Издание второе, дополненное и исправленное)

Методические указания

Иркутск 2004

В кратком виде изложены основные понятия теории линейных интегральных уравнений и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и прослежена их взаимосвязь. Рассмотрены уравнения Фредгольма и Вольтерра 2 рода, а также теория самосопряженных уравнений Фредгольма. В ходе изложения происходит знакомство с рядом понятий, широко используемых в курсах теоретической физики. Предназначено для студентов–физиков младших курсов.

Библиограф. 7 назв.

Составитель д.ф.-м.н., проф. А.Е.Калошин (кафедра теоретической физики)

Рецензент д.ф.-м.н., проф. В.Б.Иванов (кафедра радиофизики)

Редакционно–издательский отдел
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36

1 Введение

Теория интегральных уравнений — обширная область математики, которая имеет приложения в самых разных областях. Интегральным уравнениям посвящены десятки превосходных книг и учебников. Настоящие краткие заметки не могут и не должны заменять собой полноценный учебник и предназначены лишь для первого знакомства с основными понятиями. В связи с этим используется минимум терминологии из функционального анализа. Оборотной стороной такого подхода является не самая общая формулировка некоторых теорем и необходимость опустить некоторые доказательства. Что касается краевых задач, то они являются одним из приложений теории интегральных уравнений и непосредственно примыкают к рассмотренному кругу вопросов.

2 Краевые задачи, функция Грина.

2.1 Краевая задача.

Будем говорить о линейном дифференциальном уравнении (ДУ) 2 порядка

$$y'' + p_1(x)\ y' + p_2(x)\ y = \ f(x) \tag{1}$$

Краевая задача для этого уравнения ставится так: найти решение ДУ, удовлетворяющее граничным условиям

$$y(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1 \tag{2}$$

В отличие от задачи Коши эти дополнительные условия ставятся в различных точках a и b. Иногда граничные условия имеют более общий вид:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = A_0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = A_1,$$

но мы ограничимся более простыми граничными условиями без участия производных.

Можно без потери общности рассматривать нулевые граничные условия. Действительно, при линейной замене неизвестной функции $z(x) = y(x) + \alpha x + \beta$ уравнение для z снова будет линейным, а константы α и β можно выбрать так, чтобы сделать граничные условия нулевыми. А именно:

$$z(x) = y(x) - \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) - y_0, \quad z(a) = z(b) = 0$$

Умножив уравнение на $p(x) = exp(\int p_1(x)dx)$, его можно привести к так называемому самосопряженному виду

$$(p(x)y')' + q(x)y = g(x), \tag{3}$$

который обладает рядом полезных свойств.

Поэтому ниже мы будем говорить о краевой задаче вида:

$$\hat{L}\ y \equiv (p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = y(b) = 0 \tag{4}$$

Соответственно, однородной краевой задачей будем называть случай $f(x) = 0$.

Для задачи Коши есть, как известно, теорема единственности, которая гарантирует существование решения и его единственность при достаточно "хороших"коэффициентных функциях, входящих в уравнение. Для краевой задачи задачи подобной теоремы единственности нет. Проиллюстрируем это примером.

Пример

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = y(l) = 0$$

Общее решение ДУ:

$$y = C_1 sin\ x + C_2 cos\ x + 1$$

Левое граничное условие приводит к $C_1 = -1$. После этого правое граничное условие выглядит так:

$$y(l) = C_1 sin\ l + 1 - cos\ l = 0$$

Здесь возможны разные варианты.

- $sin\ l \neq 0$ *, т.е. $l \neq n\pi$, n = 1,2...*
  В этом случае константа C_1 определяется однозначно: $C_1 = (cos\ l - 1)/sin\ l$

- $sin\ l = 0$ *, причем $n = 2k$. Тогда $cos\ l = 1$ и правое граничное условие выполнено при любом значении C_1.*

- $sin\ l = 0$ *и $n = 2k + 1$. При этом $cos\ l = -1$ и правое граничное условие не может быть выполнено ни при каком C_1 – краевая задача решения не имеет.*

Таким образом, в зависимости от параметра l рассматриваемая краевая задача либо имеет единственное решение, либо имеет бесчисленное множество решений, либо вовсе не имеет решения.

Нетрудно понять, что наличие различных возможностей связано с разрешимостью или неразрешимостью однородной краевой задачи. А именно:

Если однородная задача (ОКЗ) не имеет нетривиального решения, то неоднородная краевая задача (НКЗ) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$. Если же однородная задача разрешима, то неоднородная краевая задача либо не имеет решения, либо имеет множество решений в зависимости от вида правой части $f(x)$.

2.2 Определение функции Грина.

В случае, если ОКЗ не имеет решения, решение НКЗ можно построить с помощью функции Грина (другое название – фундаментальное решение). Вначале мы дадим формальные определения, а затем поясним как возникают эти конструкции. Функцией Грина краевой задачи (4) называется функция $G(x, s)$ $(a \leq x \leq b, \quad a < s < b)$, зависящая от дополнительного параметра s, и обладающая следующими свойствами:

1. Функция $G(x, s)$ непрерывна по x при фиксированном s.

2. Она удовлетворяет граничным условиям

$$G(a, s) = G(b, s) = 0.$$

3. Она удовлетворяет однородному ДУ всюду, кроме одной точки:

$$\hat{L}_x G(x, s) = 0 \quad \text{при} \ \ x \neq s.$$

4. Производная по x терпит скачок в одной точке при $x = s$:

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$$

В этом месте у любознательного читателя уже должен возникнуть вопрос: "А зачем она нужна, эта самая функция Грина ?". Ответ таков: решение краевой задачи выражается через функцию Грина следующим образом:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds \tag{5}$$

Проверим, что построенная таким образом функция удовлетворяет ДУ. Дифференцируем ее: [1]

$$y'(x) = \int_a^b G'_x(x,s)f(s)ds = \int_a^x G'_x(x,s)f(s)ds + \int_x^b G'_x(x,s)f(s)ds$$

Еще раз: [2]

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x G'_x(x,s)f(s)ds\right) = G'_x(x,x-0)f(x) + \int_a^x G''_x(x,s)f(s)ds$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b G'_x(x,s)f(s)ds\right) = -G'_x(x,x+0)f(x) + \int_x^b G''_x(x,s)f(s)ds$$

В этих формулах формально возникает $G'_x(x,x)$ (т.е. при совпадающих аргументах), но нетрудно понять, что аргументы на самом деле такие, как указаны выше. Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x\, y &\equiv py'' + p'\, y' + qy = \\ &= \int_a^b \hat{L}_x G(x,s)f(s)ds + p(x)\left[G'_x(x,x-0) - G'_x(x,x+0)\right]f(x) \;=\; f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, (5) действительно является решением краевой задачи (4).

2.3 Построение функции Грина.

Итак, мы рассматриваем краевую задачу (4) и хотим построить для нее функцию Грина. Предположим, что однородная задача не имеет решения, отличного от нуля.

Начнем с того, что решим однородное дифференциальное уравнение. Линейное ДУ второго порядка имеет два линейно независимых решения и любая их линейная комбинация тоже является решением. Сделаем так, чтобы первое из них удовлетворяло левому граничному условию $y_1(a) = 0$, а второе — правому граничному условию $y_2(b) = 0$. Теперь построим из них кусочно–непрерывную функцию вида:

$$F(x,s) = \begin{cases} c_1\, y_1(x), & a \le x < s \\ c_2\, y_2(x), & s < x \le b \end{cases}. \tag{6}$$

[1] Предвидя, что при совпадающих аргументах будут проблемы, мы разбили область интегрирования на две.
[2] Напомним как дифференцируется интеграл такого типа: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,s)ds = f(x,x) + \int_a^x f'_x(x,s)ds$

Это почти функция Грина , см. определение (4). Осталось лишь потребовать непрерывности по переменной x и условия на скачок производной. Это дает систему уравнений на коэффициенты c_i:

$$\begin{cases} c_1\ y_1(s) = c_2\ y_2(s) \\ c_2\ y_2'(s) - c_1\ y_1'(s) = 1/p(s). \end{cases} \tag{7}$$

Определитель этой системы есть не что иное, как определитель Вронского.

$$W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система легко решается:

$$c_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}, \qquad c_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}. \tag{8}$$

Вот теперь мы имеем в настоящую функцию Грина, которая удовлетворяет всем четырем условиям (4).

$$G(x,s) = \begin{cases} y_2(s)y_1(x)/W(s)p(s), & a \leq x < s \\ y_1(s)y_2(x)/W(s)p(s), & s < x \leq b \end{cases} \tag{9}$$

Функция Грина оказалась симметричной функцией двух аргументов — это есть следствие того, что уравнение было написано в самосопряженном виде.

Если однородная краевая задача не имеет нетривиального решения, то функция Грина единственна. Действительно, предположим, что у нас есть две различные функции Грина G_1 и G_2. Тогда мы имеем два решения краевой задачи:

$$y_1(x) = \int_a^b G_1(x,s)f(s)ds, \qquad y_2(x) = \int_a^b G_2(x,s)f(s)ds.$$

Но тогда их разность

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_a^b \left[G_1(x,s) - G_2(x,s)\right] f(s)ds$$

удовлетворяет однородной краевой задаче, что противоречит исходному предположению.

После прочтения последних страниц у всякого человека должно было возникнуть чувство неудовлетворенности: формальное решение построено, но какой-либо логики в построениях не видно. Тем не менее, понятие функции Грина и конструкция решения в виде (5) очень логичны и естественны. Чтобы убедиться в этом, надо рассмотреть краевую задачу вида:

$$(p(x)y')' + q(x)y = \delta_\epsilon(x,s), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

где $\delta_\epsilon(x,s)$ – ступенчатая функция вида:

$$\delta_\epsilon(x,s) = \begin{cases} 1/2\epsilon, & \mid x - s \mid < \epsilon \\ 0, & \mid x - s \mid < \epsilon, \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \delta_\epsilon(x,s) = 1.$$

Обозначим через $G_\epsilon(x,s)$ непрерывное решение этой краевой задачи. Предположим, что существует предел

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(x,s) = G(x,s).$$

Теперь приблизим функцию $f(x)$ ступенчатой функцией. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей и напишем так:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \delta_\epsilon(x,s_i) f(s_i)\Delta S_i, \qquad \Delta S_i = \frac{b-a}{n} = 2\epsilon.$$

По принципу суперпозиции решение с такой правой частью строится как сумма решений, отвечающих каждому отдельному слагаемому:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} G_\epsilon(x,s) f(s_i)\Delta S_i.$$

Предел этой интегральной суммы при $n \to \infty$ есть определенный интеграл

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds,$$

который является решением рассматриваемой краевой задачи (4).

2.4 δ–функция Дирака и ее свойства.

Оказывается, что удобно ввести в рассмотрение не совсем обычную функцию, относящуюся к классу так называемых обобщенных функций. Определение (нестрогое, но достаточное для наших целей) такое:

$$\delta(x) = 0, \qquad x \neq 0, \qquad \delta(0) = \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{11}$$

Основные свойства с минимальными комментариями:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \tag{12}$$

   Здесь $f(x)$ – непрерывная на всей оси функция. Это и есть фактически определение δ–функции.

2. Выше была рассмотрена ступенчатая функция, пределом которой при $\epsilon \to 0$ является δ–функция. Но δ–функцию можно представить и как предел обычных непрерывных функций, причем многими способами. Приведем одно из таких представлений — наиболее простое.

   $$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}.$$

3. $\delta(-x) = \delta(x)$.

4. $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$.

5. Обозначим через $\Theta(x)$ ступенчатую функцию Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x).$$

Доказывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

если, как предполагается, пробная функция $\varphi(x)$ достаточно быстро падает на бесконечности.

Теперь вернемся к функции Грина и дадим более точное ее определение, используя δ–функцию. Итак, функцией Грина краевой задачи (4) называется функция $G(x,s)$ двух аргументов ($a \le x \le b, \quad a < s < b$), обладающая следующими свойствами:

1. *Функция $G(x,s)$ непрерывна по x при фиксированном s.*

2. *Она удовлетворяет граничным условиям*

$$G(a,s) = G(b,s) = 0.$$

3. *Она удовлетворяет неоднородному ДУ вида:*

$$\hat{L}_x G(x,s) = \delta(x-s).$$

Теперь проверка того, что конструкция (5) является решением ДУ становится почти тривиальной.

$$\hat{L}y(x) = \int_a^b \hat{L}_x G(x,s)f(s)ds = \int_a^b \delta(x-s)f(s)ds = f(x).$$

3 Уравнения Фредгольма 2 рода

Ниже мы будем рассматривать лишь линейные интегральные уравнения, а именно, уравнение Фредгольма 2 рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$$

и уравнение Вольтерра 2 рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t).$$

Итак, рассмотрим ИУ Фредгольма 2 рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \tag{14}$$

Если $f(t) = 0$, то уравнение называется **однородным**. Уравнением, **сопряженным** к данному (14), называется:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds + f(t) \tag{15}$$

В операторной записи уравнение (14) есть:

$$\varphi = \hat{A}\varphi = \lambda\hat{K}\varphi + f, \tag{16}$$

где $\hat{A},\ \hat{K}$ – линейные операторы, определяемые (14).

Какие задачи приводят к такого рода ИУ ? Рассмотрим в частности краевую задачу для линейного дифференциального уравнения 2 порядка.

$$\begin{gathered} \hat{L}\ y + \lambda\rho(x)y(x) = f(x), \qquad y(a) = y(b) = 0 \\ \hat{L}\ y = (p(x)y')' + q(x)y \end{gathered} \tag{17}$$

ДУ (17) можно переписать так: $\hat{L}\ y = f(x) - \lambda\rho(x)y(x) \equiv \nu(x)$. *Тогда, если мы знаем функцию Грина G(x,s) для оператора* $\hat{L}$, *мы легко можем построить решение уравнения* $\hat{L}y = \nu(x)$ *:*

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x,s)\nu(s)ds = \int_a^b G(x,s)f(s)ds - \lambda\int_a^b G(x,s)\rho(s)y(s)ds = \\ &= -\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + h(s) \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь мы ввели очевидные обозначения для ядра и свободного члена. Таким образом, решение краевой задачи (17) удовлетворяет интегральному уравнению (18) и наоборот.

Требования к ядру и свободному члену могут быть разными, но наиболее общими требованиями, при которых справедливы теоремы Фредгольма, являются условия квадратичной интегрируемости ядра и свободного члена:

$$\int_a^b\int_a^b \mid K(t,s) \mid^2 dsdt < \infty$$

$$\int_a^b \mid f(t) \mid^2 dt < \infty$$

Мы сузим класс функций по сравнению с этим и будем считать, что свободный член непрерывен при $t \in [a,b]$ и ядро $K(t,s)$ непрерывно в прямоугольнике Q : $\{a \ \leq\ t\ \leq\ b,\ \ a\ \leq\ s\ \leq\ b\}$. Требование непрерывности приводит к более простым доказательствам основных теорем.

Из линейности задачи сразу следуют два простых факта:

- Если однородное интегральное уравнение не имеет решения кроме тривиального ($\varphi = 0$), то решение неоднородного интегрального уравнения единственно.
- Если $y(x)$ – решение неоднородного, а $y_1(x)$ – решение однородного, то $y(x) \ + \ C \ y_1(x)$ тоже является решением неоднородного уравнения.

3.1 Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Вырожденным называется ядро вида:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\ b_i(s) \quad ,$$

где $a_i(t)$, $b_i(t)$ – два набора линейно–независимых функций. Подставив вырожденное ядро в уравнение Фредгольма и проинтегрировав по s, мы получим соотношение вида:

$$\varphi(t) = \lambda \ \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\ c_i + f(t) \quad , \qquad \text{где} \qquad c_i = \int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds \ . \tag{19}$$

Таким образом, если уравнение имеет решение, то его зависимость от t обязана быть такой, как в (19). Поэтому осталось найти неизвестные коэффициенты c_i и подставить их в (19). Это соотношение можно превратить в систему уравнений для коэффициентов c_i. Для этого умножим (19) на $b_j(t)$ и проинтегрируем по t. В результате мы получим систему из n алгебраических уравнений для n неизвестных.

$$c_j = \lambda \ \sum_{i=1}^{n} K_{ji}\ c_i + f_j, \tag{20}$$

где введены обозначения

$$K_{ji} = \int_a^b b_j(t)a_i(t)dt, \qquad f_j = \int_a^b f(t)b_j(t)dt \quad . \tag{21}$$

В матричном виде (20) можно записать так:

$$\vec{c} = \lambda\ K\ \vec{c} + \vec{f} \quad \text{или} \quad (E - \lambda K)\ \vec{c} = \vec{f} \tag{22}$$

Определитель этой системы $D(\lambda) = det(E - \lambda K)$ является многочленом порядка n относительно λ и называется определителем Фредгольма для вырожденного уравнения. Определитель Фредгольма имеет n нулей λ_k с учетом их кратности, часть из них может быть комплексными. Заметим, что $D(0) = 1$.

Теперь проделаем то же самое с сопряженным уравнением

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \left(\ \sum_i \ b_i(t)a_i(s) \right) \ \varphi(s)ds + g(t)$$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_i \ b_i(t)e_i + g(t), \qquad \text{где} \quad e_i = \int_a^b a_i(s)\varphi(s)ds$$

Умножая это уравнение на $a_j(t)$ и интегрируя по t, получим алгебраическую систему уравнений для e_i вида:

$$(E - \lambda K^T)\ \vec{e} = \vec{g} \tag{23}$$

Отметим, что в сопряженном уравнении возникла транспонированная по отношению к (22) матрица, определитель которой совпадает с $D(\lambda)$. Теперь, в зависимости от значения параметра λ, возможны различные ситуации.
Если $\lambda \neq \lambda_k$, тогда системы уравнений (22), (23) решаются однозначно

$$\vec{c} = (E - \lambda K)^{-1}\vec{f}, \qquad \vec{e} = (E - \lambda K^T)^{-1}\vec{g}$$

Если $\lambda = \lambda_k$, тогда соответствующая однородная алгебраическая система (22) (и сопряженная (23)) имеет p штук независимых решений. Число p определяется рангом r матрицы: $p = n - r$.

$$\Psi_{\cdot}^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)}\ a_i(t) \qquad l = 1...p$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\varphi_{o.o.} = \sum_{l=1}^{p} \psi_{\cdot}^{(l)}(t)\ A^{(l)} \quad , \tag{24}$$

где $A^{(l)}$ – произвольные константы. Далее возникает вопрос, может ли при $\lambda = \lambda_k$ иметь решение неоднородная алгебраическая система ?

$$A\vec{c} = \vec{f}$$

Ответ дает известная теорема линейной алгебры:

Теорема
Для того, чтобы алгебраическая система с равным нулю определителем имела решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vec{f}$ был ортогонален всем решениям однородного транспонированного уравнения $A^T\ \vec{a} = 0$.

Рассмотрим упомянутое выше условие ортогональности. Пусть транспонированное однородное алгебраическое уравнение имеет набор решений $\vec{a}^{(l)}$, $l = 1...p$. Тогда решения сопряженного ИУ имеют вид: $\Psi^{(l)}(t) = \lambda\ \sum a_i^{(l)} b_i(t)$.

$$0 = \vec{a}^{(l)}\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)} f_i = \sum_i a_i^{(l)} \int_a^b f(t) b_i(t) dt$$
$$= \int_a^b f(t)(\ \sum a_i^{(l)} b_i(t)\ )dt = \int_a^b f(t)\Psi^{(l)}(t)dt$$

В результате нашего рассмотрения мы можем сформулировать три теоремы Фредгольма для вырожденных ядер.

1 теорема Фредгольма
Для того, чтобы интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имело единственное решение при любом f(t) , необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное

уравнение $\varphi = \lambda\hat{K}\varphi$ имело бы только тривиальное решение $\varphi(t) = 0$.

2 теорема Фредгольма
Если параметр λ в уравнении равен характеристическому числу ядра K(t,s), то однородное уравнение $\varphi = \lambda\hat{K}\varphi$ и сопряженное к нему $\varphi = \lambda\hat{K}^T\varphi$ имеют одно и то же конечное число линейно–независимых решений.

3 теорема Фредгольма
Неоднородное интегральное уравнение $\varphi = \lambda\hat{K}\varphi + f$ при λ, равным характеристическому числу будет разрешимо тогда и только тогда, если f(t) ортогонален всем решениям сопряженног интегрального уравнения $\psi = \lambda\hat{K}^T\psi$.

Несколько замечаний относительно теорем:

1. Очевидно, что характеристические числа вырожденного ядра лежат в некотором кольце $\lambda_0 \le |\lambda| \le \lambda_1$, причем $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 < \infty$. Это следует из того, что характеристические числа определяются алгебраическим уравнением и тем, что $D(\lambda = 0) = 1$. Важно, что существует некоторая окрестность точки $\lambda = 0$, свободная от характеристических чисел: именно поэтому при малых λ работает метод последовательных приближений – см. ниже.

2. Как следует из теорем, возникает необходимость решения однородного интегрального уравнения или, что то же самое, исследования задачи на собственные значения для оператора.

3. Теоремы Фредгольма намеренно сформулированы так, что они будут справедливы не только для вырожденных ядер, но и для ядер общего вида. Добавится еще четвертая теорема, касающаяся характеристических чисел.

Введем важное понятие **резольвенты** для вырожденного ядра. При $\lambda \neq \lambda_k$

$$\vec{c} = (E - \lambda K)^{-1}\vec{f}, \qquad (E - \lambda K)^{-1}_{ij} = \frac{D_{ij}(\lambda)}{D(\lambda)},$$

где $D_{ij}(\lambda)$ – соответствующий минор матрицы. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t)c_i + f(t) = \lambda \sum_i a_i(t) \sum_j \frac{D_{ij}(\lambda)}{D(\lambda)} \int_a^b f(s)b_j(s)ds + f(t) = \\ &= \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda)f(s)ds + f(t), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$R(t,s;\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{ij} a_i(t)D_{ij}(\lambda)b_j(s)$$

называется **резольвентой или разрешающим ядром**. Заметим, что характеристические числа есть полюса резольвенты.

Дальнейшая задача будет состоять в том, чтобы доказать теоремы Фредгольма для ядер общего вида, а не только вырожденных.

3.2 Метод последовательных приближений

Основой для метода последовательных приближений (или метода итераций) является теорема о неподвижной точке оператора, которая нам уже встречалась при доказательстве теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений [3]. Напомним ее еще раз.

Теорема о неподвижной точке

Пусть в полном метрическом пространстве M задан оператор $\hat{A}$ со свойствами:
1) $\hat{A}\,x\ \in M \qquad \forall x \in M$
2) Оператор является сжимающим, т.е.

$$\rho(\hat{A}x,\ \hat{A}y) \le \alpha\ \rho(x,\ y), \qquad \alpha\ <\ 1, \qquad \forall x,y\ \in\ M$$

Тогда существует одна и только одна неподвижная точка оператора $\hat{A}\bar{x} = \bar{x}$ и $\bar{x}$ может быть получена методом последовательных приближений:

$$x_0, \quad x_1 = \hat{A}x_0, \ \ \ldots \ \ , x_n = \hat{A}x_{n-1}, \ldots,$$
$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Теперь вернемся к уравнению Фредгольма 2 рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \equiv \hat{A}\varphi$$

где ядро $K(t,s)$ непрерывно в квадрате Q и функция $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$.

Пусть $C[a,b]$ – множество непрерывных на $[a,b]$ функций. Введем в этом пространстве метрику (она нам уже встречалась)

$$\rho(x(t),y(t)) = \max_{t\in[a,b]} \mid x(t) - y(t) \mid$$

Очевидно, что оператор $\hat{A}$ переводит непрерывную на $[a,b]$ функцию снова в непрерывную функцию.

Проверим свойство сжимаемости:

$$\rho(\hat{A}\varphi_1, \hat{A}\varphi_2) = \max_{t\in[a,b]} \mid \hat{A}\varphi_1 - \hat{A}\varphi_2 \mid = \max \mid \lambda \int_a^b K(t,s)(\varphi_1(s) - \varphi_2(s))ds \mid \le$$
$$\le\ \max \mid \lambda \mid \int_a^b \mid K(t,s) \mid\mid \varphi_1(s) - \varphi_2(s) \mid ds\ \le \mid \lambda \mid \cdot \max \mid K \mid \max \mid \varphi_1 - \varphi_2 \mid (b-a)\ \le$$
$$\le \mid \lambda \mid M(b-a) \cdot \rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

где мы обозначили $M = \max_{t\in Q} \mid K(t,s) \mid$. Таким образом, оператор является сжимающим, если

$$\mid \lambda \mid <\ \frac{1}{M(b-a)}$$

Итак, теорема о неподвижной точке гарантирует нам, что

[3] Там же при необходимости можно найти и некоторые термины, которые в данном разделе полагаются известными.

- ИУ Фредгольма 2 рода однозначно разрешимо для любой $f(t)$ при достаточно малых λ: $\mid \lambda \mid < 1/M(b-a)$,

- Характеристические числа ядра лежат вне области $\mid \lambda \mid < 1/M(b-a)$.

Теперь выпишем итерационную последовательность, причем удобнее это сделать в операторном виде, записав уравнение Фредгольма как $\varphi = \lambda\hat{K}\varphi + f$. В качестве функции нулевого приближения выберем неоднородный член $f(t)$ (это не обязательно, но удобно).

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0 = f(t),\\
&\varphi_1 = \lambda\hat{K}\varphi_0 + f = \lambda\hat{K}f(t) + f = (I + \lambda\hat{K})f,\\
&\varphi_2 = \lambda\hat{K}\varphi_1 + f = \lambda\hat{K}(\lambda\hat{K}f(t) + f) + f = (I + \lambda\hat{K} + \lambda^2\hat{K}^2)f\\
&...\\
&\varphi_n = (I + \lambda\hat{K} + \lambda^2\hat{K}^2 + ... + \lambda^n\hat{K}^n)f\\
&...
\end{aligned}
$$

Возникшая степень оператора $\hat{K}^n$ – это тоже некоторый оператор, который можно характеризовать своим ядром. Рассмотрим подробнее $\hat{K}^2$

$$
\begin{aligned}
\hat{K}^2\varphi &= \hat{K}\hat{K}\varphi = \hat{K}\int_a^b K(\tau,s)\varphi(s)ds = \int_a^b K(t,\tau)\left(\int_a^b K(\tau,s)\varphi(s)ds\right)d\tau\\
&= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,\tau)K(\tau,s)d\tau\right]\varphi(s)ds = \int_a^b K_2(t,s)\varphi(s)ds,
\end{aligned} \tag{26}
$$

где мы обозначили через $K_2(t,s)$ ядро оператора $\hat{K}^2$ и оно оказалось равным

$$
K_2(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)K(\tau,s)d\tau.
$$

Если обозначить через K_n ядро оператора $\hat{K}^n$, то легко понять, что между повторными ядрами возникает рекуррентное соотношение

$$
K_n(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau \quad .
$$

Тогда, стартуя с $K_1(t,s) \equiv K(t,s)$, можно последовательно построить все повторные ядра. Решение через них:

$$
\varphi(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(t,s)f(s)ds = f(t) + \lambda\int_a^b R(t,s,\lambda)f(s)ds, \tag{27}
$$

где

$$
R(t,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,s) \tag{28}
$$

называется **резольвентой** или разрешающим ядром (ср. с (25)).

Что такое резольвента на операторном языке? Решение ИУ выглядит так:

$$
\varphi = \left[I + \lambda\hat{K} + \lambda^2\hat{K}^2 + ...\right]f = \left[I + \lambda(\hat{K} + \lambda\hat{K}^2 + ...)\right]f.
$$

Тогда оператор резольвенты есть

$$\hat{R} = \hat{K} + \lambda\hat{K}^2 + \lambda^2\hat{K}^3 + ... = \left[\left(I - \lambda\hat{K}\right)^{-1} - I\right]\frac{1}{\lambda}$$

$$\left(I - \lambda\hat{K}\right)\varphi = f, \quad \varphi = \left(I - \lambda\hat{K}\right)^{-1} f = f + \lambda\hat{R}f.$$

3.3 Ядра, близкие к вырожденным

Пусть ядро имеет вид:

$$K(t,s) = K_B(t,s) + K_\varepsilon(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s) + K_\varepsilon(t,s), \tag{29}$$

где $K_B(t,s)$ – вырожденное ядро, а ядро K_ε ограничено в прямоугольнике Q:
$\max \mid K_\varepsilon(t,s) \mid = \varepsilon$. Уравнение

$$\varphi = \lambda(\hat{K}_B + \hat{K}_\varepsilon)\varphi + f \tag{30}$$

можно переписать так:

$$\varphi - \lambda\hat{K}_\varepsilon = g, \qquad \text{где} \qquad g = f + \lambda\hat{K}_B\varphi \tag{31}$$

Мы знаем, что в области $\mid \lambda \mid < 1/\varepsilon(b-a)$ последовательные приближения для ядра $\hat{K}_\varepsilon$ сходятся и существует резольвента $R_\varepsilon(t,s,\lambda)$. Вспоминая определение резольвенты (27), напишем решение уравнения (31):

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)g(s)ds + g(t) \tag{32}$$

Если уравнение (30) имеет решение, то $g(t)$ – известная функция. Осталось лишь подставить в соотношение (32) явный вид $g(t)$ и переписать в удобном виде.

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s)g(s)ds + g(t) = \\
= \;& f(t) + \lambda\int_a^b K_B(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)\left[f(s) + \lambda\int_a^b K_B(s,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right]ds = \\
= \;& f(t) + \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)f(s)ds + \lambda\int_a^b\left[K_B(t,\tau) + \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)K_B(s,\tau)ds\right]\varphi(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Тем самым, используя резольвенту оператора $\hat{K}_\varepsilon$, мы получили другое (эквивалентное) уравнение для функции $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \tilde{f}(t) + \lambda\int_a^b \tilde{K}(t,\tau,\lambda)\varphi(\tau)d\tau,$$

где

$$\tilde{f}(t,\lambda) = f(t) + \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)f(s)ds, \qquad \tilde{K}(t,\tau,\lambda) = K_B(t,\tau) + \lambda\int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda)K_B(s,\tau)ds.$$

Рассмотрим ядро $\tilde{K}$:

$$\tilde{K}(t,\tau,\lambda) = \sum_i a_i(t)b_i(\tau) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(t,s,\lambda) \sum_i a_i(s)b_i(\tau)ds = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(t,\lambda)b_i(\tau). \qquad (33)$$

Новое ядро $\tilde{K}$ оказалось вырожденным !!

Таким образом, знание резольвенты позволяет свести дело (при $\mid \lambda \mid < 1/\varepsilon(b-a)$) к эквивалентному интегральному уравнению **с вырожденным ядром**. Стало быть внутри круга $\mid \lambda \mid = 1/\varepsilon(b-a)$ имеется конечное число характеристических чисел λ_i. Но, согласно теореме Вейерштрасса, величину $\varepsilon = \max \mid K_\varepsilon(t,s) \mid$ можно сделать сколь угодно малой.

Теорема Вейерштрасса

Всякую непрерывную в Q функцию можно приблизить полиномом с любой заданной точностью ε.

$$K(t,s) = P^n(t,s) + K_\varepsilon(t,s), \qquad \max_Q K_\varepsilon(t,s) = \varepsilon$$

или

$$K(t,s) = K_B(t,s) + K_\varepsilon(t,s),$$

Поэтому область $\mid \lambda \mid < 1/\varepsilon(b-a)$ можно сделать сколь угодно большой. Внутри этой области дело сводится к уравнению с вырожденным ядром и справедливы доказанные выше три теоремы Фредгольма. Это означает, что они справедливы и для ядер общего вида в сколь угодно широкой области. Кроме того, справедлива

4 теорема Фредгольма

Уравнение Фредгольма имеет не более, чем счетное множество характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.

Итак, мы доказали теоремы Фредгольма для непрерывных ядер и непрерывного неоднородного члена. Однако эти теоремы справедливы и при более слабых требованиях: достаточно квадратичной интегрируемости ядра и свободного члена.

Следствием теорем Фредгольма является так называемая

Теорема об альтернативе

Если однородное уравнение Фредгольма имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение однозначно разрешимо при любом свободном члене $f(t)$.

Если же однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то, в зависимости от вида $f(t)$, неоднородное уравнение либо не имеет решений вовсе, либо имеет бесконечное множество решений.

3.4 Свойства резольвенты

Перечислим основные свойства резольвенты:

1. Резольвента единственна.

2. У резольвенты, рассматриваемой как функция от λ, во всей λ-плоскости нет никаких особенностей, кроме изолированных полюсов (мероморфная функция).

3. Полюса резольвенты есть характеристические числа.

4. При малых λ резольвента определяется формулой (28).

5. Резольвента сама является решением интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} R(x,t;\lambda) &= K(x,t) + \int_a^b K(x,\tau)R(\tau,t;\lambda)d\tau \\ R(x,t;\lambda) &= K(x,t) + \int_a^b K(\tau,t)R(x,\tau;\lambda)d\tau \end{aligned} \tag{34}$$

4 Уравнения Вольтерра второго рода

Уравнение Вольтерра в отличие от уравнения Фредгольма характеризуется переменным верхним пределом.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{35}$$

К уравнениям такого типа приводит, в частности, задача Коши для дифференциальных уравнений. Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для линейного уравнения 2 порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = A, \quad y'(a) = B$$

Обозначим $y'' = \varphi(x)$ *и вычислим последовательно* $y'(x), y(x)$ *с учетом начальных значений.*

$$\begin{aligned} &y'(x) = \int_a^x \varphi(t)dt + B \\ &y(x) = \int_a^x y'(s)ds + A = \int_a^x ds\left[\int_a^s dt\varphi(t) + B\right] + A = \\ &= \int_a^x dt\varphi(t)(x-t) + B(x-a) + A \end{aligned}$$

Подставив все в уравнение, получим уравнение Вольтерра для функции $\varphi(t)$*.*

Уравнение Вольтерра в принципе можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма. Ядро $K(t,s)$ в (35) определено при $a \le s \le t$. Доопределив его нулем при $s > t$, можно вместо (35) написать эквивалентное уравнение Фредгольма

$$\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \tilde{K}(t,s)\varphi(s)ds$$

Таким образом, для уравнений Вольтерра должны быть справедливы теоремы Фредгольма. Но для них справедливы и более сильные утверждения.
Построим ряд последовательных приближений

Уравнение: $\varphi = \hat{A}\varphi = \lambda\hat{K}\varphi + f$

$$y_0(t) = f(t), \quad y_1(t) = \hat{A}y_0(t), \quad \ldots \quad y_n(t) = \hat{A}y_{n-1}(t), \quad \ldots$$

Теперь n-ый член напишем так:

$$y_n(t) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}),$$

и вместо сходимости последовательности мы будем изучать сходимость ряда.

Оценим по модулю слагаемые в этом ряду.

$$\begin{aligned} &\mid y_1(t) - y_0(t) \mid = \mid \hat{A}\ y_0 - y_0 \mid \leq \mid \lambda \int_a^t K(t,s) f(s) ds \mid \leq \\ &\leq \mid \lambda \mid \ \int_a^t \mid K(t,s) \mid\mid f(s) \mid ds \leq \\ &\leq \mid \lambda \mid MF(t-a), \end{aligned} \tag{36}$$

где $M = \max_{\Delta} \mid K(t,s) \mid$, $F = \max_{[a,b]} \mid f(t) \mid$.

$$\begin{aligned} &\mid y_2(t) - y_1(t) \mid = \mid \left(\lambda \int_a^t K(t,s) y_1(s) ds + f(t) \right) - \left(\lambda \int_a^t K(t,s) y_0(s) ds + f(t) \right) \mid = \\ &= \mid \lambda \int_a^t K(t,s)(y_1(s) - y_0(s)) ds \mid \ \leq \mid \lambda \mid \ \int_a^t \mid \lambda \mid \ MF(s-a) ds = \\ &= \mid \lambda \mid^2 M^2 F (t-a)^2 / 2 \end{aligned}$$

Для n-го члена очевидным образом имеем оценку:

$$\mid y_n(t) - y_{n-1}(t) \mid \leq \mid \lambda \mid^n M^n F (t-a)^n / n!$$

Возвращаемся к последовательности

$$\mid y_n \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid y_k(t) - y_{k-1}(t) \mid \leq \ F \sum_{k=1}^{n} \mid \lambda \mid^k \frac{[M(t-a)]^k}{k!}$$

Таким образом, функциональный ряд мажорируется сходящимся степенным рядом, поэтому он сходится равномерно и абсолютно. Стало быть уравнение Вольтерра второго рода решается однозначно при любом виде свободного члена $f(t)$. Для него реализуется первая возможность альтернативы Фредгольма, оно не имеет характеристических чисел.

Однородное уравнение Вольтерра имеет только тривиальное решение.

$$\varphi = \lambda \hat{K} \varphi = \hat{A} \varphi$$

Предположим, что оно имеет нетривиальное решение $\psi_0(t)$. Построим последовательность:

$$\begin{aligned} &\psi_0(t) \\ &\psi_1(t) = \hat{A} \psi_0 = \psi_0 \\ &\psi_2(t) = \hat{A} \psi_1 = \psi_0 \\ &... \\ &\psi_n(t) = \hat{A} \psi_{n-1} = \psi_0 \\ &... \end{aligned}$$

С другой стороны, таким же способом, как выше, можно получить оценку:

$$| \psi_n(t) | \leq | \lambda |^n \frac{[M(t-a)]^n}{n!}$$

Таким образом, n-ый член последовательности может быть сделан сколь угодно малым. Это означает, что он равен нулю: $\psi_0(t) = 0$.

5 Интегральные уравнения Фредгольма с симметричными ядрами.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2 рода с симметричным ядром.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \qquad K(t,s) = K(s,t)$$

Другое название – самосопряженные ядра [4].

Напомним, что значения λ, при которых разрешимо однородное интегральное уравнение, называются характеристическими числами. При этом $\mu_i = 1/\lambda_i$ является собственным значением оператора $\hat{K}$, а $\varphi_i(t)$ собственной функцией. Введем краткое обозначение для интеграла (скалярное произведение двух функций):

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt$$

Сформулируем основную теорему данного раздела.

Теорема
Интегральное уравнение с действительным симметричным непрерывным ядром имеет хотя бы одно характеристическое число.

Без доказательства.

5.1 Свойства собственных функций и собственных значений.

1. **СФ, отвечающие различным СЗ ортогональны между собой.**

$$\varphi_1(t) = \lambda_1 \int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)ds$$
$$\varphi_2(t) = \lambda_2 \int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)ds$$

Умножим первое равенство на $\lambda_2\varphi_2(t)$, второе – на $\lambda_1\varphi_1(t)$, проинтегрируем по t и вычтем одно из другого. Получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\ (\varphi_1, \varphi_2) = \int\int dtds\,[\varphi_2(t)K(t,s)\varphi_1(s) - \varphi_1(t)K(t,s)\varphi_2(s)] = 0$$

[4] В случае комплексных ядер самосопряженным называется ядро вида $K(t,s) = K^*(s,t)$. Кстати, терминология очень напоминает случай матриц, только роль матричных индексов играют непрерывные переменные t, s.

2. **Все СЗ действительны.**

   От противного: пусть СЗ комплексное $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда
   $$\varphi(t) = (\alpha + i\beta)\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$
   $$\varphi^*(t) = (\alpha - i\beta)\int_a^b K(t,s)\varphi^*(s)ds$$
   Функции $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ относятся к различным собственным значениям, поэтому $(\varphi, \varphi^*) = 0$ по свойству 1. Это означает
   $$\int_a^b \mid \varphi(t) \mid^2 dt = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0$$
   Пришли к противоречию.

3. **СФ могут быть выбраны вещественными.**

   Из линейности и вещественности вытекает очевидное свойство: если комплексная функция $\varphi(t) = U(t) + iV(t)$ является СФ, отвечающей СЗ λ, то реальная и мнимая части по отдельности тоже являются СФ. Отсюда утверждение.

4. **Ортогонализация СФ.**

   Одному СЗ $\mu_i = 1/\lambda_i$ может отвечать несколько (конечное число по 2-й теореме Фредгольма) линейно-независимых СФ $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$. При этом любая их линейная комбинация тоже является СФ. Поэтому, пользуясь этим свойством, можно перейти к другому набору СФ, который является ортонормированным: $\{\varphi_i\} \;\Rightarrow\; \{\psi_i\}, \quad (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Делается это так:

   - $\psi_1 = a\ \varphi_1$, число a находится из $(\psi_1, \psi_1) = 1$.
   - $\psi_2 = b\ (\varphi_2 + b_2\ \psi_1)$. Из условия
     $(\psi_1, \psi_2) = b\ [(\psi_1, \varphi_2) + b_1] = 0$ находим $b_1 = -(\psi_1, \varphi_2)$, затем
     $(\psi_2, \psi_2) = 1$ определяет b.
   - $\psi_3 = c\ (\varphi_3 + c_2\ \psi_2 + c_1\ \psi_1)$
     $0 = (\psi_1, \psi_3) = c\ [(\psi_1, \varphi_3) + c_1] \quad \Rightarrow\ c_1 = -(\psi_1, \varphi_3)$
     $0 = (\psi_2, \psi_3) = c\ [(\psi_2, \varphi_3) + c_2] \quad \Rightarrow\ c_2 = -(\psi_2, \varphi_3)$
     $1 = (\psi_3, \psi_3)$
   - ...

   Такая процедура (ортогонализация по Шмидту) позволяет последовательно построить набор ортонормированных собственных функций для данного собственного значения. В дальнейшем мы будем считать, что ортогонализация уже проведена и мы имеем ортонормированную систему СФ. Возьмем среди них максимальную в том смысле, что любая СФ линейно выражается через них.
   $$\begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_n & ... \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n & ... \end{matrix} \tag{37}$$
   Упорядочим их по возрастанию λ
   $$\mid \lambda_1 \mid \le \mid \lambda_2 \mid \le\ ... \le \mid \lambda_n \mid \le\ ...$$
   Если есть несколько СФ, отвечающих одному λ, то мы их повторим в этой последовательности.

5.2 Билинейное разложение ядра

Теорема

Пусть $\varphi_1(t)$ – СФ ядра $K(t,s)$, отвечающая СЗ λ_1. Тогда для ядра

$$K_1(t,s) = K(t,s) - \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$$

ряд СФ и СЗ будет совпадать с (37) за исключением $\varphi_1,\ \lambda_1$.

Доказательство

$$\varphi = \lambda \hat{K}_1 \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \lambda \hat{K} \varphi$$

Покажем, что из первого равенства вытекает второе. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
(\varphi_1, \varphi) &= \int_a^b \varphi_1(t)\varphi(t)dt = \int_a^b dt\varphi_1(t)\left[\lambda \int_a^b K_1(t,s)\varphi(s)ds\right] = \\
&= \int_a^b dt\varphi_1(t)\left[\lambda \int_a^b \left(K(t,s) - \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\right)\varphi(s)ds\right] = \\
&= \lambda \int_a^b ds \left(\int_a^b K(t,s)\varphi_1(t)dt - \frac{\varphi_1(s)}{\lambda_1}\cdot 1\right) = \lambda \int_a^b ds \left(\frac{\varphi_1(s)}{\lambda_1} - \frac{\varphi_1(s)}{\lambda_1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение равно нулю $(\varphi, \varphi_1) = 0$. По условию $\varphi \ = \ \lambda\, \hat{K}_1\, \varphi$, более подробно это есть

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \left(K(t,s) - \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\right)\varphi(s)ds.$$

Вспоминая, что $(\varphi, \varphi_1) = 0$, имеем искомый результат: $\varphi \ = \ \lambda\ \hat{K}\ \varphi$.

Наоборот, пусть φ_i – произвольная СФ ядра K .

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int_a^b K(t,s)\varphi_i(s)ds = \lambda_i \int_a^b \left[K_1(t,s) + \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\right]\varphi_i(s)ds$$

Если $i \neq 1$, то $\varphi_i \ = \ \lambda_i\ \hat{K}_1\ \varphi_i$.

Если $i = 1$

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int_a^b K(t,s)\varphi_i(s)ds + \varphi_1(t),$$

то есть φ_1 не является СФ ядра K_1.

Теорема доказана

Продолжим этот процесс вычерпывания последовательности (37).

$$\begin{aligned}
&K_1(t,s) = K(t,s) - \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1} \\
&K_2(t,s) = K_1(t,s) - \frac{\varphi_2(t)\varphi_2(s)}{\lambda_2} = K(t,s) - \frac{\varphi_1(t)\varphi_1(s)}{\lambda_1} - \frac{\varphi_2(t)\varphi_2(s)}{\lambda_2} \\
&\ldots \\
&K_n(t,s) = K(t,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

Либо этот процесс оборвется на каком–то шаге (т.е. мы исчерпаем все СЗ) и в результате будем иметь вырожденное ядро

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$$

и утверждение, что **всякое симметричное ядро с конечным числом СЗ является вырожденным**.

Либо этот процесс можно продолжать до бесконечности и после конечного числа шагов мы имеем формулу

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} + K_n(t,s). \tag{38}$$

Эта формула называется **билинейным разложением ядра**, а $K_n(t,s)$ называется **остаточным ядром** (не путать с повторным ядром).

Интересный вопрос о сходимости этой последовательности мы обсудим чуть позднее, а пока нам понадобится следующая теорема.

Теорема Гильберта-Шмидта
Всякая функция, представимая через симметричное ядро в виде

$$f(t) = \int_a^b K(t,s)h(s)ds$$

(истокообразно представимая), где функция $h(s)$ квадратично интегрируема, может быть разложена в ряд по собственным функциям ядра $K(t,s)$, который сходится равномерно и абсолютно.

Без доказательства.

Итак, функция разложима в ряд

$$f(t) = \sum_n f_n \, \varphi_n(t) \tag{39}$$

и надо найти коэффициенты разложения. Для этого умножим (39) на $\varphi_m(t)$ и проинтегрируем. С учетом ортонормированности СФ найдем, что коэффициенты равны

$$f_m = (f, \varphi_m)$$

Пусть теперь мы имеем функцию, истокообразно представимую через ядро

$$f(t) = \int_a^b K(t,s)h(s)ds.$$

Раскладываем эту функцию в ряд и вычисляем коэффициенты

$$f_m = (f, \varphi_m) = \int\int dtds\varphi_m(t)K(t,s)h(s) = \int_a^b ds \; h(s) \; \frac{\varphi_m(t)}{\lambda_m} = \frac{h_m}{\lambda_m}.$$

Итого:

$$f(t) = \sum_n \varphi_n(t) \cdot \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

5.3 Формула Шмидта для решения

Имеем интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t).$$

Если λ не равняется характеристическому числу, то по теореме Фредгольма уравнение имеет единственное решение. Согласно теореме Гильберта–Шмидта решение представимо в виде:

$$\varphi(t) = \sum_i c_i\varphi_i(t) + f(t).$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned}
\sum_i c_i\varphi_i(t) + f(t) &= \lambda \int_a^b K(t,s)\left(\sum_i c_i\varphi_i(s) + f(s)\right) + f(t) \Rightarrow \\
\Rightarrow \sum_i c_i\varphi_i(t) &= \lambda \sum_i c_i\varphi_i(t)\frac{1}{\lambda_i} + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s)ds \Rightarrow \\
\Rightarrow \sum_i c_i\varphi_i(t) &= \lambda \sum_i c_i\varphi_i(t)\frac{1}{\lambda_i} + \lambda \sum_i \varphi_i(t)\frac{f_i}{\lambda_i} \qquad (40)
\end{aligned}$$

Ряды сходятся равномерно, поэтому, сравнивая коэффициенты, находим:

$$c_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}.$$

Если $\lambda = \lambda_k$, то по третьей теореме Фредгольма решение существует, если $f(t)$ ортогональна всем СФ ядра, соответствующим этому СЗ λ_k. Это означает, что в сумме

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) f_i$$

не должно быть членов, соответствующих этому λ. Если функция $f(t)$ обладает этим свойством, то решение существует.

Итого, формулы Шмидта для решения:

$\underline{\lambda \neq \lambda_k}$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_i \varphi_i(t)\ \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} + f(t).$$

Ряд сходится равномерно и абсолютно.

$\underline{\lambda = \lambda_k}$

Необходимое и достаточное условие – ортогональность. Если это так, то решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \lambda_k \sum_i{}' \varphi_i(t)\ \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda_k} + \sum_{l=1}^{p} \alpha_l\ \varphi_{(k)}^{(l)}(t) + f(t).$$

Здесь вторая сумма представляет из себя решение однородного уравнеия, p – ранг характеристического числа λ_k, α_l – произвольные числа, штрих около первой суммы указывает на то, что в сумме отсутствует слагаемое с $i = k$.

Теперь вернемся к билинейному разложению ядра (38) и обсудим его сходимость

$$K(t,s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}+K_n(t,s).$$

Гарантировать сходимость этого разложения нельзя. Сходится оно лишь **в среднем**, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(K(t,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}\right)^2dt=0 \qquad \text{при фиксир. } s. \tag{41}$$

Докажем, что билинейное разложение сходится в среднем.

Вначале рассмотрим повторное ядро, которое нам понадобится для доказательства.

$$K_2(t,s)=\int_a^b K(t,\tau)K(\tau,s)d\tau.$$

Если считать s фиксированным, то по теореме Гильберта–Шмидта K_2 можно разложить в ряд, который сходится равномерно и абсолютно.

$$K_2(t,s)=\sum_i c_i\ \varphi_i(t).$$

Найдем коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}c_i&=\int_a^b K_2(t,s)\varphi_i(t)dt=\int_a^b dt\varphi_i(t)\left(\int_a^b d\tau K(t,\tau)K(\tau,s)\right)=\\&=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b d\tau K(\tau,s)\varphi_i(s)=\frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i^2}.\end{aligned}$$

Итого

$$K_2(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\cdot\varphi_i(s)}{\lambda_i^2}$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно при фиксированном s. При совпадающих аргументах ряд сходится, но не обязательно равномерно.

Теперь рассмотрим интеграл в (41):

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(K(t,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}\right)^2dt=\\&=\int_a^b\left(K(t,s)\cdot K(t,s)-2\ K(t,s)\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_j(s)}{\lambda_i\lambda_j}\ (\varphi_i,\varphi_j)\right)=\\&=K_2(s,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(s)}{\lambda_i^2}.\end{aligned}\tag{42}$$

При $n\to\infty$ эта разность стремится к нулю, стало быть, билинейное разложение сходится в среднем, что и требовалось доказать.

5.4 Экстремальные свойства собственных функций и собственных значений

В силу теоремы Гильберта-Шмидта

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\frac{a_i}{\lambda_i}, \qquad a_i = (\varphi, \varphi_i). \tag{43}$$

Умножая это равенство на $\varphi(x)$ и интегрируя, получим

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi(x)\varphi(s)dsdx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\lambda_i}. \tag{44}$$

Отсюда с помощью неравенства Бесселя можно получить:

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi(x)\varphi(s)dsdx \right| \leq \frac{1}{\mid \lambda_1 \mid}(\varphi, \varphi), \tag{45}$$

где λ_1 – наименьшее из всех характеристических чисел. Если $\varphi = \varphi_1$, то неравенство превращается в равенство.

Таким образом, фунционал $\left|(\hat{K}\varphi, \varphi)\right|$ на множестве функций, нормированных на единицу, достигает максимума $1/\mid \lambda_1 \mid$ при $\varphi = \varphi_1$.

6 Задача Штурма-Лиувилля

Задачей Штурма-Лиувилля называется краевая задача вида:

$$\hat{L}u + \lambda\rho(x)u = 0, \qquad u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{46}$$

Здесь $\hat{L}$ – дифференциальный оператор второго порядка, записанный в самосопряженном виде

$$\hat{L}u = (p(x)u'(x))' - q(x)u(x),$$

$p(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция, функции $q(x), \rho(x)$ предполагаются непрерывными. Кроме того, будем предполагать

$$p(x) > 0, \qquad \rho(x) > 0 \qquad q(x) \geq 0.$$

Значение λ, при котором существует нетривиальное решение, называется собственным значением задачи Штурма–Лиувилля, соответственно $u(x)$ — собственная функция.

Задача Штурма-Лиувилля возникает при решении уравнений в частных производных, если вы пытаетесь найти частное решение с разделенными переменными.

6.1 Эквивалентность интегральному уравнению

Для начала вспомним свойства краевой задачи

$$\hat{L}u = f, \qquad u(a) = u(b) = 0. \tag{47}$$

Как известно, решение этой краевой задачи можно выразить через функцию Грина:

$$u(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds. \tag{48}$$

Задача Штурма–Лиувилля (46) может быть сведена к интегральному уравнению. Если

$$\hat{L}u = -\lambda\rho(x)u(x), \qquad u(a)=0, \quad u(b)=0,$$

то, согласно определению функции Грина,

$$u(x) = -\lambda\int_a^b G(x,s)\rho(s)u(s)ds.$$

Ядром уравнения является $G(x,s)\rho(s)$ — несимметричное по аргументам выражение. Тем не менее ядро можно симметризовать. Для этого достаточно умножить предыдущее уравнение на $\sqrt{\rho(x)}$.

$$u(x)\sqrt{\rho(x)} = -\lambda\int_a^b \sqrt{\rho(x)}G(x,s)\sqrt{\rho(s)}\cdot\sqrt{\rho(s)}u(s)ds.$$

В результате мы получим однородное интегральное уравнение Фредгольма с симметричным ядром на функцию $y(x) = u(x)\sqrt{\rho(x)}$:

$$y(x) = -\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds, \qquad \text{где} \;\; K(x,s) = \sqrt{\rho(x)}G(x,s)\sqrt{\rho(s)}. \tag{49}$$

Тем самым, мы свели задачу Штурма-Лиувилля к эквивалентному интегральному уравнению и можем пользоваться хорошо изученными свойствами самосопряженных ядер.

6.2 Свойства собственных функций и собственных значений

1. Задача Штурма–Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений.
   Действительно, если бы было наоборот, то G(x,t) было бы представимо в виде конечной суммы (вспомним билинейное разложение ядер):

   $$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)\rho(t)}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{50}$$

   где $\varphi_i(x)$ – собственные функции ядра K. Тогда:

   $$\varphi_i'(x) = \lambda\int_a^b K'(x,s)\varphi_i(s)ds,$$

   откуда следует, что СФ ядра является непрерывно дифференцируемой. Тогда (50) тоже непрерывно дифференцируема, а это противоречит свойствам функции Грина – функция Грина должна иметь скачок производной при совпадающих аргументах.

2. $$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)dx = \delta_{ij}$$

   Это очевидное следствие эквивалентности задачи Штурма–Лиувилля однородному интегральному уравнению с симметричным ядрром.

3. Каждое собственное значение задачи Штурма–Лиувилля имеет ранг 1.
   Предположим, что это не так и одному СЗ соответствуют две линейно независимые собственные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Поскольку $u_1(x)$, $u_2(x)$ – линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения 2 порядка, общее решение этого уравнения на $[a,b]$ имеет вид:

   $$y(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$$

Тем самым оказывается, что любое решение ЛДУ обладает свойством $y(a) = y(b) = 0$. Поскольку a и b это совершенно посторонние числа по отношению к дифференциальному оператору, такого быть не может.

4. Для любого собственного значения справедливо неравенство:

$$\lambda_n > inf\ \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0.$$

Следствие: все собственные значения задачи Штурма–Лиувилля положительны.

Пусть $u_n(x)$ — СФ, отвечающая СЗ λ_n:

$$\hat{L}u_n(x) + \lambda_n \rho(x) u_n(x) = 0$$

Умножим это равенство на $u_n(x)$ и проинтегрируем от a до b.

$$\int_a^b u_n(x) \left[(pu_n')' - qu_n\right] dx + \lambda_n = 0$$

Далее преобразуем, интегрируя по частям:

$$\lambda_n = \int_a^b q(x)u_n^2(x)dx - \int_a^b u_n(x)(p(x)u_n'(x))'dx$$
$$= \int_a^b q(x)u_n^2(x)dx + \int_a^b p(x)(u_n')^2 dx > \int_a^b q(x)u_n^2(x)dx =$$
$$= \int_a^b \frac{q(x)}{\rho(x)} \cdot \rho(x)u_n^2(x)dx \geq \frac{q(x^*)}{\rho(x^*)} \int_a^b \rho(x)u_n^2(x)dx = \frac{q(x^*)}{\rho(x^*)}. \quad (51)$$

5. **Теорема Стеклова**
Пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(a) = f(b) = 0$. Тогда $f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, который сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

Доказательство
Так как $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $\hat{L}f = -h(x)$, где $h(x)$ – непрерывная функция, $f(a) = f(b) = 0$. Тогда

$$f(x) = -\int_a^b G(x,s)h(s)ds$$

Поскольку (см. выше) функция Грина просто связана с ядром интегрального уравнения, получим:

$$F(x) \equiv \sqrt{\rho(x)}f(x) = \int_a^b K(x,s)\ \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}}\ ds$$

Стало быть $F(x)$ представима через симметричное ядро и, согласно теореме Гильберта–Шмидта, она разлагается в ряд по СФ ядра, причем ряд сходится абсолютно и равномерно. Отсюда утверждение теоремы.

7 Интегральные уравнения 1-го рода

7.1 Уравнение Фредгольма 1-го рода

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{52}$$

не для всякой функции $f(x)$ имеет решение. Пусть, например, ядро имеет вид многочлена по x

$$K(x,s) = a_0(s) + xa_1(s) + \ldots + x^n a_n(s).$$

Тогда левая часть (52) принимает вид многочлена

$$b_0 + xb_1 + \ldots + x^n b_n$$

и ясно, что уравнение (52) может иметь решение только, если $f(x)$ тоже имеет вид многочлена n-ой степени.

Если $K(x,s)$ – симметричное ядро, то удобно искать решение в виде ряда по СФ ядра

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \cdot c_i.$$

Подставив в уравнение, получим значения коэффициентов: $c_i = \lambda_i f_i$. После получения формального решения остаются более тонкие вопросы о существовании нетривиального решения у однородного уравнения 1-го рода и о сходимости ряда.

7.2 Уравнение Вольтерра 1-го рода

Интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{53}$$

можно свести к уравнению Вольтера второго рода. Дифференцируем (53), считая, что $K'_x(x,s)$ и $f'(x)$ существуют и непрерывны.

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x,s)\varphi(s)ds = f'(x). \tag{54}$$

Если $K(x,x) \neq 0$, мы можем поделить на него и получить уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\varphi(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}. \tag{55}$$

Если же $K(x,x) = 0$, мы по-прежнему имеем уравнение первого рода. В этом случае можно попытаться еще раз продифференцировать (54) и, если $K'_x(x,x) \neq 0$, мы получим уравнение Вольтерра второго рода.

Список литературы

[1] А.Н.Тихонов, А.Б.Васильева, А.Г.Свешников, *Дифференциальные уравнения*, М., Наука, 1979

[2] М.В.Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М., Наука, 1980

[3] М.Л.Краснов, *Интегральные уравнения*, М., Наука, 1975

[4] И.Г.Петровский, *Лекции по теории интегральных уравнений*, М., Наука, 1965

[5] П.И.Лизоркин. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа*, М., Наука, 1981

[6] М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко, *Интегральные уравнения (задачи и упражнения)*, М., Наука, 1968

[7] Л.Я.Цлаф, *Вариационное исчисление и интегральные уравнения*, М., Наука, 1970

Содержание

1 Введение **1**

2 Краевые задачи, функция Грина. **1**

2.1 Краевая задача. 1
2.2 Определение функции Грина. 2
2.3 Построение функции Грина. 3
2.4 δ–функция Дирака и ее свойства. 5

3 Уравнения Фредгольма 2 рода **6**

3.1 Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром 8
3.2 Метод последовательных приближений 11
3.3 Ядра, близкие к вырожденным 13
3.4 Свойства резольвенты 14

4 Уравнения Вольтерра второго рода **15**

5 Интегральные уравнения Фредгольма с симметричными ядрами. **17**

5.1 Свойства собственных функций и собственных значений. 17
5.2 Билинейное разложение ядра 19
5.3 Формула Шмидта для решения 21
5.4 Экстремальные свойства собственных функций и собственных значений 23

6 Задача Штурма-Лиувилля **23**

6.1 Эквивалентность интегральному уравнению 23
6.2 Свойства собственных функций и собственных значений 24

7 Интегральные уравнения 1-го рода **26**

7.1 Уравнение Фредгольма 1-го рода 26
7.2 Уравнение Вольтерра 1-го рода 26