Министерство образования Российской Федерации
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Методические рекомендации

Иркутск 2002

Теория. Математическим маятником называется материальная точка массой m, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. На практике приближением к такому маятнику служит подвешенный на тонкой нити шарик, диаметр которого d значительно меньше длины нити l ($d << l$), а масса шарика много больше массы нити.

Будучи отклоненным от положения равновесия, шарик может совершать колебательные движения в плоскости отклонения. В этом случае на шарик действуют две силы: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, направленная вертикально, и сила натяжения нити $\vec{F}_H$. Силу тяжести можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие $P_1 = P\cos\alpha$ и $P_2 = P\sin\alpha$ (см. рис.1), одна из которых направлена вдоль нити, а вторая – перпендикулярно нити. Первая из них будет в точности уравновешена силой натяжения нити ($P_1 = F_H$), так как нить не рвется и движения вдоль направления нити нет. Согласно второму закону Ньютона ускорение, приобретенное телом, равно геометрической сумме действующих сил (т.е. силе P_2), деленной на массу тела, и будет направлено перпендикулярно нити. Таким образом

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_2}{m} \qquad (1)$$

Так как шарик движется по окружности радиуса l (длина нити) с центром в точке подвеса нити, то за некоторое время dt он будет проходить путь, равный длине дуги $ds = l d\alpha$, где $d\alpha$ - изменение угла (выраженного в радианах) между вертикалью и направлением нити. Тогда скорость движения шарика по окружности может быть записана в виде

$$V = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\alpha}{dt} \qquad (2)$$

Если угол отклонения нити от положения равновесия мал ($\alpha < \pi/6$), то $\sin\alpha \approx \alpha$ и $P_2 \approx mg\alpha$. Тогда, подставляя значение скорости, определенной соотношением (2), в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение для функции $\alpha(t)$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha \qquad (3)$$

Прямой подстановкой легко проверить, что данному уравнению удовлетворяет решения вида $\alpha = C\sin(2\pi\frac{t}{T})$, где используется обозначение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

Так как тригонометрические функции синус и косинус являются периодическими (т.е. не изменяют своего значения при изменении аргумента на величину 2π), то легко заметить, что величина T является периодом колебаний. За время, равное одному периоду, шарик будет возвращаться в исходную точку, а формула (4), связывающая период с длинной нити и ускорением силы тяжести, называется формулой Томсона.

Если обозначить отклонение маятника от положения равновесия через x, то можно записать $x = l\sin a \approx la = l\sin(2p\frac{t}{T})$, т.е. отклонение также меняется по периодическому закону.

Приборы и принадлежности: 1) Математический маятник, 2) Рулетка, 3) Секундомер.
Цель работы: Познакомиться с колебательным движением; исходя из данных опыта сформулировать законы маятника; пользуясь формулой Томсона, определить ускорения свободного падения в данной точке Земли.

Порядок выполнения работы

1) Исследовать зависимость периода колебаний T от длины маятника l. Для этого измерять время t двадцати полных колебаний маятника ($N = 20$) и вычислить период колебаний. Угловая амплитуда (максимальное отклонение) не должна превышать $10^0 - 15^0$. Опыты проделать для 10-ти различных длин маятника. Данные занести в таблицу 1.

Таблица 1.

Номер опыта	l, м	t, с	$T = \frac{t}{N}$,с	$\sqrt{l}$, м$^{1/2}$	g, м/с^2	$g - \bar{g}$ м/с^2	$(g - \bar{g})^2$ м/с^2
1							
2							
...							
10							

Построить график зависимости $T = f(\sqrt{l})$ по данным опыта, откладывая по оси абсцисс $\sqrt{l}$, по оси ординат - период T. Объяснить вид полученной зависимости.
2) Используя формулу (4), получить формулу для расчета g. Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения и занести эти значения в таблицу 1. Вычислить среднее значение $\bar{g}$.
3) Провести статистическую обработку результатов измерений (используя таблицу 1). Найти стандартное отклонение s и погрешность среднего значения $S_{\bar{g}} = s/\sqrt{n}$ (где n - число измерений).
4) Определить, зависит ли период колебаний маятника от амплитуды. Для этого зафиксировать постоянную максимальную длину $l = const$ и

тщательно определить периоды T при разных угловых амплитудах через 10^0, начиная от 10^0 до 60^0. Данные занести в таблицу 2.

Таблица 2.

Номер измерения	l, м	α^0	N	t, с	$T = \frac{t}{N}$,с
1					
...					
6					

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим маятником?
2. Как выводится формула периода колебаний маятника?
3. От чего зависит период колебаний математического маятника?
4. При любых ли амплитудах маятника справедлива формула Томсона?
5. Чему должен быть равен тангенс угла наклона графика $T = f\left(\sqrt{l}\right)$ к оси абсцисс?
6. Что называется ускорением свободного падения и от чего оно зависит?