Лабораторная работа № 1-3

Изучение основного закона динамики вращательного движения с помощью махового колеса

<u>Цель работы</u>: ознакомиться с основными характеристиками вращательного движения твердых тел, методом измерения моментов инерции, теоремой Штейнера-Гюйгенса, убедиться в справедливости основного закона динамики вращательного движения.

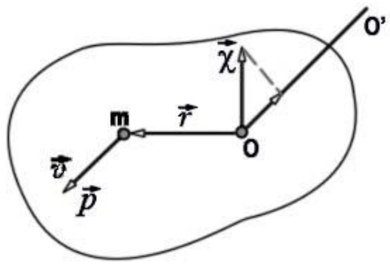

Рис. 1

Если частица массой m движется со скоростью $\vec{v},$ то её импульс, по определению, равен $\vec{p} = m\vec{v}$. Момент импульса $\vec{L}$ отдельной частицы (рис. 1) относительно произвольно выбранной фиксированной точки *O*, находящейся от частицы на расстоянии $\vec{r}$, определяется векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}$ на вектор импульса частицы $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}]. \qquad (1)$$

Импульс частицы в системе СИ измеряется в $\frac{кг \cdot м}{с}$, а момент импульса в *Дж·с*.

Компоненту момента импульса $\vec{L}$ вдоль любой линии (или оси *OO΄),* проходящей через фиксированную точку отсчета, называют моментом импульса частицы относительно этой оси.

При вращательном движении частицы относительно фиксированной точки *O* динамической характеристикой является момент силы $\vec{M}$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$, действующей на частицу:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \qquad (2)$$

Момент вращения измеряется в *н·м*.

Дифференцируя уравнение (1) по времени, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m\vec{v}\right] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Принимая во внимание, что $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m\vec{v}\right] = [\vec{v} \cdot m\vec{v}] = 0$, и $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \vec{M}, \qquad (3)$$

что скорость изменения момента импульса равна моменту силы. В отсутствии внешних моментов сил ($\vec{M} = 0$) момент импульса остается постоянным ($\vec{L} = const$).

Внешний момент вращения создается внешней силой, действующей на тело.

При движении системы частиц (твердого тела) уравнение (3) остается справедливым, если $\vec{L}$ и $\vec{M}$ отнесены к центру масс тела.

Тогда

$$\vec{M}=\sum_{n=1}^{k}\left[\vec{r}_n\cdot\vec{F}_n\right]=\sum_{n}\left[\vec{r}_n\cdot\left(m\vec{a}_n\right)\right], \qquad (4)$$

где $\vec{a}_n$ - линейное ускорение *n*-ой точки.

При вращении твердого тела все его точки приобретают одинаковое угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$.

Учитывая, что $\vec{a}_n=\left[\vec{r}_n\cdot\vec{\varepsilon}\right]$, из уравнения (4) получим

$$\vec{M}=\sum_{n} m_n r_n^2\cdot\vec{\varepsilon}, \qquad (5)$$

где $\sum\limits_{n} m_n r_n^2$ есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции характеризует инерциальные свойства тел при вращательном движении и определяется не только их массой, но и распределением массы и её частей относительно оси вращения. Моменты инерции тел правильной геометрической формы рассчитываются путем интегрирования (ниже приводится пример расчета момента инерции сплошного цилиндра относительноXx продольной оси симметрии).

Соотношение, устанавливающее прямо пропорциональную связь между угловым ускорением и геометрической суммой моментов сил, действующих на твердое тело, $\vec{\varepsilon}=\dfrac{\sum\limits_{i}\vec{M}_i}{I}$, называют основным законом динамики вращательного движения.

Момент инерции *dI* материальной точки массой *dm*, отстоящей от оси вращения на расстоянии *r*, равен

$$dI=r^2dm. \qquad (6)$$

Для вычисления момента инерции всего вращающегося тела относительно оси вращения тело разбивают на элементарные объемы dV с массой *dm*, принимая их за материальные точки, и алгебраически их суммируют по всему объему, т. е.

$$I=\int r^2dm=\int_V r^2\rho\ dV,$$

где $\rho=\dfrac{dm}{dV}$ - плотность вещества тела.

Для примера рассчитаем момент инерции сплошного однородного диска радиуса *R* и толщины *h* (при плотности вещества ρ) относительно продольной оси симметрии. Для этого выделим элементарный объем dV в виде тонкого слоя шириной *dr*, отстоящего от оси вращения на расстоянии *r* (рис. 2). Его объём $dV=2\pi r\,h\,dr,$ а масса $dm=2\pi\rho h r\,dr.$ Тогда момент инерции этого элемента равен $dI=2\pi\rho h r^3dr.$

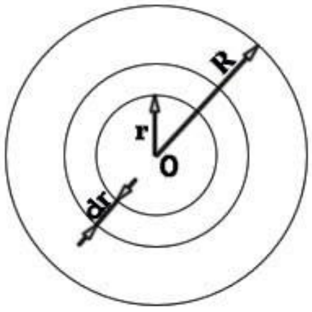

Рис. 2

Интегрируя по радиусу r в пределах от 0 до R, получаем:

$$I = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \frac{2\pi \rho h r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\rho \pi R^2 h}{2} \cdot R^2 = \frac{mR^2}{2},$$

где $m = \rho \pi R^2 h$.

Так как радиус-вектор $\vec{r}$ является функцией координат точек, составляющих тело, то формулы для расчета момента инерции тел различной формы, имеющих одинаковые массы, будут различны. Так, момент инерции полого тонкостенного цилиндра относительно продольной оси симметрии равен mR^2, а у шара той же массы относительно оси, проходящей через его центр, момент инерции равен $\frac{2}{5}mR^2$. Момент инерции данного тела относительно оси, не проходящей через центр масс, связан не только с массой, формой и размерами тела, но также с положением этой оси по отношению к оси, проходящей через центр масс.

Согласно теореме о переносе осей инерции (теорема Штейнера-Гюйгенса), моменты инерции относительно параллельных осей связаны соотношением

$$I = I_0 + m d^2, \tag{7}$$

где I_0 - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр симметрии тела, m – масса этого тела, d – расстояние между осями.

Моменты инерции тел сложной конфигурации обычно определяются экспериментальным путем.

Методика измерений

Для экспериментальной проверки закономерностей вращательного движения в данной работе используется маховое колесо, приводимое во вращение грузами m, подвешенными к нити (рис. 3). Маховое колесо насажено на ось, закрепленную в подшипниках C_1 и C_2. На вал радиусом r наматывается нить, к концу которой прикрепляется груз массой m. Колесо при опускании груза приходит в равноускоренное вращательное движение. На колесе имеются отверстия для четырех цилиндрических грузиков, ввинчиваемых с противоположной стороны. Пусть маховое колесо с осью и валом в отсутствии грузиков имеет момент инерции I_0.

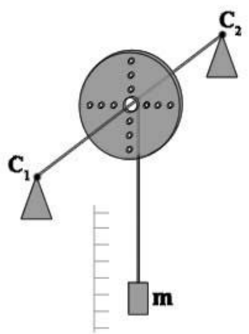

Рис. 3

Для его определения, согласно формуле (2), надо знать суммарный момент сил $\vec{M}$, приложенных к колесу, и угловое ускорение ε. Угловое ускорение ε определяется через линейное ускорение a движущегося поступательно вниз груза m. Если движение груза происходит с высоты h_1 за время t, то линейное ускорение a можно определить из выражения $h_1 = \frac{at^2}{2}$, т. е. $a = \frac{2h_1}{t^2}$. Угловое ускорение точек обода связано с их линейным ускорением следующим образом: $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Здесь r – радиус вала, на который наматывается нить. Итак,

$$\varepsilon = \frac{2h_1}{rt^2}. \tag{8}$$

Силой, раскручивающей колесо, является сила натяжения нити $\vec{T}$. Момент этой силы равен $M=r\cdot T$. Для определения силы T рассмотрим поступательное движение груза m (рис. 4). На груз m действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Груз движется вниз с ускорением $\vec{a}$. Уравнение поступательного движения груза, согласно второму закону Ньютона, запишется:

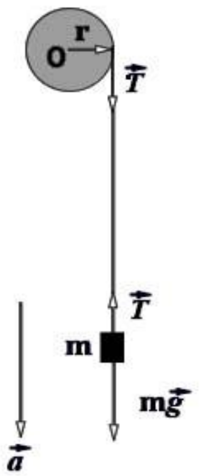

Рис.4

$$ma = mg - T.$$

Откуда $$T = m(g-a), \tag{9}$$

а момент этой силы $$M = mr(g-a), \tag{10}$$

На вращающуюся систему, кроме момента силы, вызывающего ускорение, действует момент силы трения. С учетом сил трения основной закон динамики вращательного движения запишется так:

$$\varepsilon = \frac{M - M_{тр}}{I}. \tag{11}$$

Момент сил трения можно определить из следующих соображений. Груз m, падая с высоты h_1, приводит колесо во вращательное движение. Потенциальная энергия $E_1 = mgh_1$ груза превращается в кинетическую энергию вращательного движения махового колеса $\frac{I\omega^2}{2}$ и в тепло, выделяемое в результате трения. После достижения грузом нижней точки колесо, вращаясь по инерции, поднимает груз m на высоту h_2 (меньшую h_1) за счет кинетической энергии. Часть кинетической энергии при подъеме груза превращается в потенциальную энергию груза $E_2 = mgh_2$, а часть опять идет на работу против сил трения $A_{тр}$. В конечном итоге

$$A_{тр} = F_{тр}(h_1 - h_2) = E_1 - E_2 = mg(h_1 - h_2). \tag{12}$$

При вращательном движении работа определяется формулой

$$A_{тр} = M_{тр}(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{13}$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ - угол поворота колеса за время действия сил трения. Угол поворота (в радианах) равен длине дуги, деленной на радиус вала (при подъеме груза нить должна наматываться на тот же вал, с которого сматывается), т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{h_1 + h_2}{r}. \qquad (14)$$

Подставляя выражения (12) и (14) в равенство (13), получим

$$M_{тр} = \frac{m\,g\,r\,(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2}.$$

Получим окончательную формулу для расчета момента инерции системы

$$I = \frac{m\,r\,(g-a) - m\,g\,r\,\dfrac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}}{\varepsilon} = \frac{m\,r^2}{a}\left[\frac{2gh_2}{h_1 + h_2} - a\right],$$

$$I = \frac{mD^2}{4a}\left(\frac{2gh_2}{h_1 + h_2} - a\right). \qquad (15)$$

Порядок выполнения работы

1. Взвешиванием на технических весах определить массу 4 цилиндриков, закрепляемых на колесе (4 m_0).
2. Измерить штангенциркулем диаметр вала D и диаметр оси D_0.
3. Измерить на маховом колесе расстояния центров малых отверстий от оси вращения l_1, l_2, l_3. Цилиндрики закреплять с противоположной стороны от вала. Расстояния центров цилиндриков от оси вращения будут равны, соответственно,

$$d_1 = l_1 + \frac{D_0}{2}; \qquad d_2 = l_2 + \frac{D_0}{2}; \qquad d_3 = l_3 + \frac{D_0}{2}.$$

4. Высота падения груза h_1 и высота его подъема h_2 отсчитываются по вертикальной шкале.
5. Время падения груза с высоты h_1 измеряется секундомером с точностью ±0,1 с.

<u>*Задание 1*</u>. Определить момент инерции махового колеса без цилиндриков по формуле (15), для чего, меняя массу груза *m* три раза (100, 200, 300 г), произвести измерения h_1 и h_2 и времени падения груза *t*. Результаты измерений занести в таблицу.

m, г	см				с				$a,\ \frac{см}{c^2}$	$\varepsilon,\ \frac{1}{c}$	I_0, г·см^2
	h_1	h_2	D_0	D	t_1	t_2	t_3	t_{cp}			

Вычислить три значения I_0 по формуле (15) по среднему значению времени падения груза $t_{ср}$. Из трех измерений найти среднее значение момента инерции I_0 маховика без дополнительных грузов.

<u>*Задание 2*</u>. Помещая симметрично цилиндрики на расстоянии l_1 при постоянном m (200 г), произвести измерения h_1, h_2 и t (из трех раз падения груза).

Такие же измерения проделать при размещении цилиндриков на расстоянии от оси l_2 и l_3. Результаты занести в таблицу.

m, г	см				с				a, $\frac{см}{c^2}$	$I_{эксп}$, г·см^2
	h_1	h_2	l	d	t_1	t_2	t_3	$t_{ср}$		

По формуле (15) вычислить моменты инерции колеса с добавочными грузами $I_{эксп}$.

Сопоставить $I_{эксп}$ с вычисленными по теореме Штейнера-Гюйгенса:

$$I_{выч} = I_0 + 4m_0 d^2.$$

Полагая вращение маховика равноускоренным, вычислить его момент импульса

$$L = I_0\,\omega = I_0\,\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Назовите и дайте определения кинематических характеристик вращательного движения тел $(\varphi, \omega, \varepsilon)$.
2. Выведите связь характеристик вращательного движения $(\varphi, \omega, \varepsilon)$ с подобными характеристиками поступательного движения (S, v, a).
3. Что называется вектором импульса частицы, вектором момента импульса частицы?
4. Что называется моментом силы? Что такое момент инерции тела?
5. Пользуясь формулой расчета момента инерции, показать, что момент инерции однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню, равен $I = \frac{1}{3} m l^2$.
6. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса и поясните её применение.
7. Как изменить момент инерции махового колеса?
8. Как изменить момент силы, действующей на маховое колесо?