

На практике исследователь всегда располагает ограниченным набором значений измеряемой величины, называемой *выборкой*. Выборка является случайным набором измерений. Поэтому любое суждение об измеряемой величине, сделанное по выборке, будет иметь вероятностный смысл. Методы математической статистики позволяют рассчитать только *границы интервала*, в котором с некоторой выбираемой заранее самим экспериментатором вероятностью α , находится истинное значение определяемой величины. Параметр α называют *доверительной вероятностью* и обычно его значение выбирают равным 0.95, а сам такой интервал называют *доверительным интервалом*. Чем с большей вероятностью нужно гарантировать нахождение истинного значения внутри доверительного интервала, тем большая ширина интервала будет получена при том же числе измерений. Полуширину доверительного интервала называют *абсолютной погрешностью измерений*.

Пусть проведено N прямых измерений некоторой величины x . Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_N$ результаты отдельных измерений. Для анализа результатов измерений и вычисления абсолютной погрешности необходимо предварительно вычислить *среднее значение* измеряемой величины - $\bar{x}$ и *дисперсию* выборки, обозначаемую обычно через D .

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5.1)$$

$$D = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.2)$$

где x_i - результат i -го измерения.

Корень квадратный из дисперсии называют *среднеквадратичным* или *стандартным отклонением* и обозначают через S .

Анализ начинают с проверки выборки на наличие *выброса*. Среди совокупности умеренно различающихся измерений одно может резко отличаться, т.е. быть либо очень большим, либо очень маленьким. Наличие его сильно изменяет как среднее значение измеряемой величины, так и границы доверительного интервала. Такое экстремальное значение иногда можно отбросить, и в этом случае его называют *выбросом*.

Для проверки на выброс находим среди измерений максимальное и минимальное значения, которые обозначим $x_{\max}$ и $x_{\min}$. Вычисляем абсолютные отклонения их от среднего $|\bar{x} - x_{\max}|$ и $|\bar{x} - x_{\min}|$. Если первая разность больше второй, то будем считать ее *экстремальной* и наоборот. Обозначим экстремальное значение X_{ext} и для него вычисляем величину R :

$$R = \frac{X_{ext}}{\sqrt{D(N-1)/N}} \quad (5.3)$$

Полученное значение R сравниваем с табличным значением $r(a, N)$ (критерий Диксона), которое зависит от доверительной вероятности α и количества измерений N .

Если вычисленное значение R меньше или равно табличному, то X_{ext} не является выбросом. Если же вычисленное значение R больше табличного, то X_{ext} является выбросом. Его следует исключить и для оставшейся выборки с количеством членов $(N - 1)$ вновь вычислить $\bar{x}$ и D и опять проверить на наличие выбросов. Такую проверку проводим до тех пор, пока оставшаяся выборка не будет иметь выбросов.

В табл. 5.1 приведены значения величины $r(a, N)$ для первых десяти значений N при доверительной вероятности 0.95.

Таблица 5.1

N	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(\alpha=0.95, N)$	1.41	1.69	1.87	2.00	2.09	2.17	2.24	2.29

Пусть M - количество выбросов в исследуемой выборке. Тогда, $k=N-M$ количество измерений, оставшихся в выборке после проверки на выбросы.

Как правило, в эксперименте *a priori* известно в каких пределах должно изменяться значение x_i . В этом случае программным путем можно отсеять выбросы. Величины $\bar{x}$ и D вычисляются для оставшихся k значений.

Для полученной выборки размерности k вычисляем абсолютную погрешность измерения Dx :

$$\Delta x = t(a, k) \sqrt{D/k} \quad (5.4)$$

где $t(a, k)$ - табличный коэффициент (коэффициент Стьюдента), зависящий от доверительной вероятности a и количества элементов выборки k . Значения $t(a, k)$ при доверительной вероятности 0.95 для первых десяти значений k приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(a = 0.95, k)$	12.7 2	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26

При большом ($k \geq 500$) числе измерений $t(a = 0.95, k) \cong 1.96$. Окончательный результат обработки результатов измерений записываем в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (5.5)$$

С точки зрения статистической теории такой вид записи указывает на то, что истинное значение измеряемой величины с вероятностью a находится в интервале от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$.

Отношение абсолютной погрешности (или среднеквадратичного отклонения) к среднему значению измеряемой величины называют *относительной погрешностью* измерений. Обычно относительная погрешность выражается в процентах.

Современные программные пакеты электронных таблиц (например, MS Excel) включают в себя математический аппарат, позволяющий проводить некоторую статистическую обработку выборки, в том числе и вычислять среднеквадратичное отклонение. Для этого необходимо данные измерений сохранить в текстовом файле, который можно вставлять в электронные таблицы.

Приведенные выше правила применимы для вычисления случайной погрешности измерений. Иногда же все результаты измерений имеют одно и то же значение. Такой случай реализуется, если случайная погрешность становится много меньше *инструментальной*. Тогда за меру погрешности принимают абсолютную величину инструментальной погрешности. Она определяется классом точности прибора и, обычно, равна половине цены деления шкалы прибора. Поэтому и считывание результата надо проводить только с точностью до половины деления.

При наличии инструментальной (систематической) Δx_u и случайной Δx_c погрешности полная погрешность измерения определяется по формуле

$$\Delta x^2 = \Delta x_u^2 + \Delta x_c^2 \quad (5.6)$$

В результате измерения получается число, которое представляется совокупностью цифр. Результат соответствующих вычислений ограничивается *значащими цифрами*. Подсчет количества значащих цифр в числе различен для чисел больше и меньше единицы.

Если число больше единицы, то значащими цифрами считаются все написанные цифры, включая и последний ноль. Цифра ноль несет такую же информацию, как и все остальные. Так в числе 4.97 три значащие цифры, а в числе 4.970 – четыре, т.е. эти числа имеют разную точность.

Если число меньше единицы, то значащими считаются все цифры, следующие за начальными нулями. В числе 0.004970 те же четыре значащие цифры, что и в числе 4.970.

При записи окончательного результата измерений величину погрешности следует округлять до двух значащих цифр, при этом в записи среднего значения последней удерживается цифра последнего десятичного разряда в записи погрешности. Например, один и тот же результат в зависимости от погрешности, запишется в виде: 1.20 ± 0.21 ; 1.241 ± 0.035 и т.д. Таким образом, две последние из указанных цифр являются сомнительными, а остальные – достоверными.

Пусть невозможно прямое измерение величины $w = F(x, y, z)$, зависящей от переменных x , y и z . Для косвенного определения величины w проведем по N прямым измерениям величин x , y и z . Среднее значение определяемой величины вычисляется по формуле $\bar{w} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Для того, чтобы вычислить абсолютную погрешность Δw косвенного измерения величины w , вначале вычисляются абсолютные погрешности прямых измерений величин x , y и z , т.е. Δx , Δy и Δz . Тогда:

$$(\Delta w)^2 = (\partial w / \partial x)^2 (\Delta x)^2 + (\partial w / \partial y)^2 (\Delta y)^2 + (\partial w / \partial z)^2 (\Delta z)^2 \quad (5.7)$$

где значения частных производных $(\partial w / \partial x)$, $(\partial w / \partial y)$ и $(\partial w / \partial z)$ вычисляются также при $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ и $z = \bar{z}$. Окончательный результат косвенного измерения величины w представляется, как и в случае прямых измерений, формулой (5.5).

Сравнение средних значений двух выборок

Зная величины D и k , можно сравнивать результаты различных измерений. Пусть после одного измерения величины x и последующей статистической обработки получена выборка из k_1 элементов со средним значением измеряемой величины $\bar{x}_1$ и дисперсией D_1 . В другом случае после таких же измерений получены величины: k_2 , $\bar{x}_2$, D_2 , соответственно. В общем случае, результаты измерений не равны друг другу. Возникает вопрос: значимо ли отличаются средние значения двух измерений?

Для ответа на этот вопрос следует вычислить величину T :

$$T = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \quad (5.8)$$

где: $d_1 = D_1/k_1$, $d_2 = D_2/k_2$.

Вычисленное значение T сравнивается с табличным значением коэффициента Стьюдента $t(a = 0.95, k)$, где k вычисляется по формуле:

$$k = \frac{(d_1 + d_2)^2}{\frac{d_1^2}{k_1 + 1} + \frac{d_2^2}{k_2 + 1}} - 2 \quad (5.9)$$

Вычисленное по формуле (5.9) значение k надо округлить до целого числа.

Если вычисленное значение $T \leq t(a = 0.95, k)$, то средние значения 2-х измерений с вероятностью 95% отличаются *незначимо*.

5.2. Корреляция и регрессия

Между случайными величинами обычно существует связь, при которой с изменением одной величины изменяется другая. При анализе зависимости случайных величин друг от друга различают *корреляцию* (существует ли взаимосвязь между величинами и как она сильна) и *регрессию* (какой вид имеет зависимость).

При обработке эксперимента находят уравнение *приближённой* регрессии. Замена точной математической связи между измеряемыми величинами приближённой называют *аппроксимацией*. При этом предполагается, что погрешность измерения одной величины много меньше погрешности измерения другой, т.е. одна величина измеряется *точно*. Уравнение приближённой регрессии существенно зависит от выбираемого метода приближения. В качестве такого метода обычно выбирают *метод наименьших квадратов*. Пусть в результате n измерений получены ряд значений величины: $y_1, y_2, \dots, y_n$, соответствующих значениям аргумента: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти результаты измерений могут быть представлены на графике в виде точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Суть метода сводится к определению параметров такой зависимости, при которой сумма квадратов разностей d_i между экспериментальными и расчетными значениями y_i должна быть минимальной. Для примера, на Рис. 5.1 приведён результат аппроксимации экспериментальных данных полиномом третьей степени.

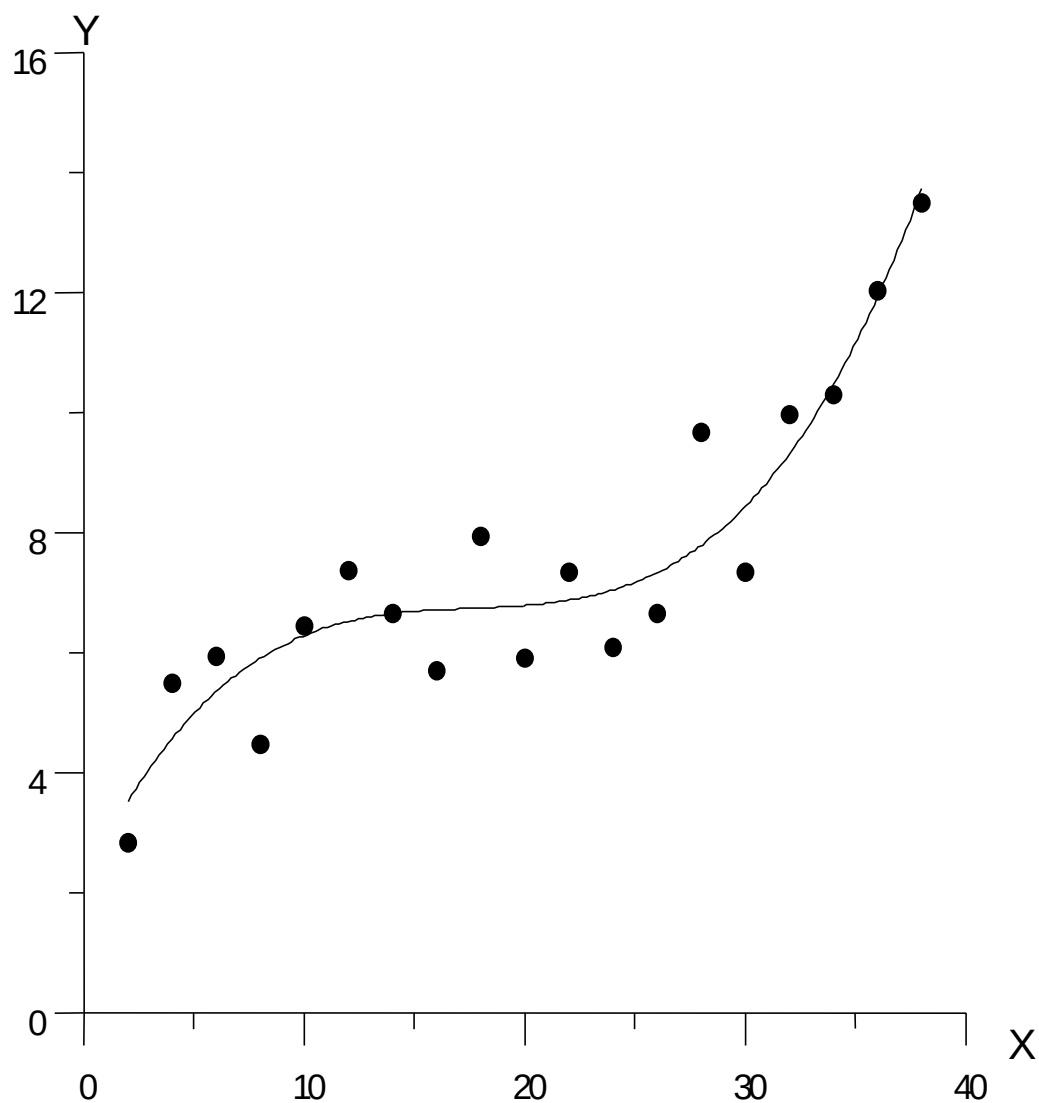


Рис. 5.1. Набор экспериментальных точек и аппроксимирующая кривая.

Линейная регрессия

Предположим, что x_j измеряется *точно* и искомая зависимость выражается *линейной* функцией:

$$y(x) = a_0 + a_1 x \quad (5.10)$$

В этом случае определение коэффициентов зависимости сводится к минимизации выражения:

$$\sum_j (y_j - a_0 - a_1 x_j)^2 \quad (5.11)$$

Решение задачи на минимум сводится к отысканию частных производных от выражения (5.11) по искомым коэффициентам $\partial/\partial a_0$ и $\partial/\partial a_1$ и приравниванию их к нулю. Решая такую систему из 2-х уравнений, получим:

$$a_0 = \frac{\sum x_j^2 \sum y_j - \sum x_j \sum x_j y_j}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \quad (5.12)$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \quad (5.13)$$

Для определения степени взаимосвязи (корреляции) между измеряемыми величинами вычисляют *коэффициент корреляции* R .

$$R = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{\sqrt{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \sqrt{n \sum y_j^2 - (\sum y_j)^2}} \quad (5.14)$$

Значение R изменяется в интервале $[-1,1]$. Если $a_1 > 0$, то и $R > 0$. При отсутствии взаимосвязи между измеряемыми величинами $R = 0$. При точном выполнении равенства (5.10) $|R| = 1$. Если $|R| \geq 0.99$, то на практике можно считать, что связь между измеряемыми величинами близка к линейной.

Большинство современных программных пакетов электронных таблиц включают в себя математический аппарат, позволяющий вычислять a_0 , a_1 и R .

Нелинейная регрессия

Во многих случаях графическое представление данных показывает, что найденная экспериментально зависимость не может быть описана прямой линией. Когда вид нелинейной зависимости между двумя переменными x и y известен *a priori*, можно с помощью преобразования одной или обеих переменных $w=w(y)$, $z=z(x)$ можно получить линейную зависимость:

$$w(z) = a_0 + a_1 z, \quad (5.15)$$

которая оценивается рассмотренным выше методом.

Очень часто в опытах наблюдается экспоненциальная или гиперболическая зависимость. Таблица 5.3 показывает необходимые преобразования и формулы перехода к линейной зависимости. Преобразование первых двух зависимостей легко получить, если их прологарифмировать. Преобразование двух последних легко получить, если зависимости возвести в степень «-1».

Таблица 5.3

Форма исходной зависимости	Преобразование переменных		Выражение для величин	
	w	z	a_0	a_1
$y = a \exp(b \cdot x)$	$\ln(y)$	x	$\ln(a)$	b
$y = a \exp(b / x)$	$\ln(y)$	$1/x$	$\ln(a)$	b
$y = a + b / x$	y	$1/x$	a	b
$y = a / (1 + b \cdot x)$	$1/y$	x	$1/a$	b/a
$y = a \cdot x / (1 + b \cdot x)$	$1/y$	$1/x$	b/a	$1/a$

Библиографический список

1. Ступин Ю.В. Методы автоматизации физических экспериментов и установок на основе ЭВМ. М.: Энергоатомиздат, 1983, 288 с.
2. Задков В.Н., Пономарев Ю.В. Компьютер в эксперименте: архитектура и программные средства систем автоматизации. Учебное руководство. М.: Наука, 1988, 376 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. VI, Гидродинамика, М.: «Наука», Физматгиз, 1986, 712 с.
4. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики, М.: Наука, Физматгиз, 1973, 352 с.
5. Ахманов С.В., Никитин С.Н. Физическая оптика. Учебное пособие для ВУЗов. М.: Изд-во Московского Университета, 1998, 565 с.
6. Закс Л. Статистическое оценивание. М.: Мир, 1976, 276 с.

Максим Федорович Артамонов
Олег Олегович Глазунов
Виктор Иванович Красов
Игорь Августович Кринберг
Виктор Львович Паперный
Вера Васильевна Чумак

ЭКСПЕРИМЕНТ С КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКОЙ
Учебное пособие

Редакционно-издательский отдел
Иркутского государственного университета.
Лицензия ЛР 020592 от 9.07.97 г.
664000, Иркутск, бульвар Гагарина, 36

Подписано в печать 27.03.2000.
Формат бумаги 60 × 84. Объем 3,5 п.л.
План 2000 г. Заказ . Тираж 100 экз.