

Задание по квантовой теории излучения.

- 1 (а) Определить коэффициент затухания пучка света частоты ω в среде (газе) двухуровневых атомов, $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, имеющей фиксированную температуру T , считая, что происходят только резонансные процессы поглощения и (индуцированного) излучения. Найти мощность, отдаваемую термостату. (КС, ГКК, Злв, Бете)
 (б) Найти среднее число фотонов в пучке при условии, что газ этих атомов находится в тепловом равновесии с излучением при температуре T (в отсутствие термостата) (Бете, КС, ЛВМ-II).
- 2 Найти правило сумм для флуктуаций плотности Z электронов в атоме с зарядом ядра $Z|e|$, если действующие на них силы не зависят от скоростей (НГУ-74, КитТ, ЛЛ-III, ГКК, ГКК-Ч.2, Злв):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_0) \left| \langle n | \left(\sum_{a=1}^Z e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_a)} \right) | 0 \rangle \right|^2 = ?, \quad \text{где: } U_{a0}(\mathbf{X}_a) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{X}_a|}, \quad \text{и т.д.} \quad (1)$$

$$\hat{H}_Z |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad \hat{H}_Z = \sum_{a=1}^Z \left(\frac{\mathbf{P}_a^2}{2m} + U_{a0}(\mathbf{X}_a) \right) + \frac{1}{2} \sum_{1=a}^Z \sum_{\neq b=1}^Z U_{ab}(\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b). \quad (2)$$

- 3 (а) Найти время жизни $2P$ состояния атома водорода с $m = 0, \pm 1$, относительно однофотонных переходов в состояние $1S$ (ЛЛ-IV, ГКК, ГКК-Ч.2, Злв), если: $\Psi_{nlm}(\mathbf{x}) = Y_l^m(\mathbf{n}) \otimes R_{nl}(r)$, где:

$$\Psi_{210}(\mathbf{x}) = i \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \cos \vartheta \otimes \frac{re^{-r/2a}}{2a\sqrt{6a^3}}, \quad \text{и т.д.,} \quad \Psi_{100}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{1/2} \otimes \frac{2e^{-r/a}}{\sqrt{a^3}}, \quad a_Z = \frac{\hbar^2}{m\epsilon^2 Z}.$$

- (б) Уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ расщеплены лишь за счет лэмбовского сдвига $\Delta E_L \sim mc^2 \alpha^5 \ln(1/\alpha)$. Найти (ГКК-Ч.2) или оценить вероятность однофотонного перехода между ними (ГКК, Злв).

- 4 Выписать плотность состояний (на единичный интервал энергии) для:

(а) однофотонного состояния; (б) одночастичного состояния с полным моментом J ; (в) комптон-эффекта; г) $e\bar{e}$ -рассеяния в с.ц.м.; (д) тормозного излучения в поле ядра; е) рождения e^+e^- в поле ядра; ж) e^+e^- аннигиляции в 2γ (ЛЛ-IV, Злв, ГКК).

- 5 π^- мезон захватывается ядром (вместо электрона) на уровень $|n, l = n - 1\rangle$, а затем совершает радиационные переходы на более низкие уровни.

(а) Для $n = 2$ оценить заряд ядра Z , при котором захват π^- мезона ядром станет вероятнее радиационного перехода (НГУ-74, Злв);

(б) При данном Z из (а) для $n \gg 1$ оценить, начиная с какого n захват станет вероятнее радиационного перехода. Считать, что ядро для π^- мезона является "черным шариком" радиуса $R = Z^{1/3} \hbar / (m_{\pi} c)$ (НГУ-74, Злв).

- 6 Полный гамильтониан взаимодействия заряда e массой m , со спином s , с ЭМП имеет вид:

$$\hat{V}(\mathbf{X}, t) = -\frac{e}{mc} (\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{P}) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{X}, t) - \frac{\mu_s}{s} (\mathbf{s} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{X}, t)), \quad \mu_s = \frac{e\hbar}{mc} s, \quad \text{и для электрона:}$$

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad e \Rightarrow -|e|; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega L^3} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\omega t - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}; \quad \omega = kc; \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)).$$

Найти вероятность однофотонного перехода $2S_{1/2} \rightarrow 1S_{1/2}$ в атоме водорода в длинноволновом приближении. Какое слагаемое в \hat{V} дает такой переход между этими состояниями:

$$\langle \mathbf{x} | 2S_{1/2} \rangle \equiv \Psi_{200}(\mathbf{x}) \chi_{1/2, 1/2} = \frac{e^{-r/(2a)}}{\sqrt{\pi(2a)^3}} \left(1 - \frac{r}{2a} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = |\mathbf{x}|,$$

$$\langle \mathbf{x} | 1S_{1/2} \rangle \equiv \Psi_{100}(\mathbf{x}) \tilde{\chi}_{1/2} = \frac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Сравнить полученное время жизни с оценкой в задаче 3 и с оценкой для двухфотонного перехода (ГКК, ЛЛ-III-IV, ГКК-Ч.2).

7 Атом водорода в состоянии $2S_{1/2}$ влетает со скоростью $v = 10^{-4}c$ в перпендикулярное ей однородное магнитное поле $\mathcal{H} = 400$ эрстед. Найти его время жизни в этом состоянии и объяснить причину его изменения по сравнению с случаем отсутствия поля (НГУ-74, Бете, Злв, ГКК-Ч.2).

8 Для произвольного представления оператора момента \mathbf{J} найти выражения для

(а) следов: $Tr(J_\alpha)$; $Tr(J_\alpha J_\beta)$; $Tr(J_\alpha J_\beta J_\gamma)$; $Tr(J_\alpha J_\beta J_\gamma J_\lambda)$; (ГКК-Ч.1)

(б) результата поворота: $\exp\{-i\vartheta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})\} \mathbf{J} \exp\{i\vartheta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})\} = ?$ (ЛЛ-III, Мессиа, Кис)

9 Найти поляризуемость атома водорода в основном состоянии (ЛЛ-III, Злв, ГКК).

10 Вывести правила сумм ТРК для "сил осцилляторов" $F_{fi}^{(x,y,z)}$ в атоме с Z электронами:

$$F_{fi}^{(x)} = \frac{2m(E_f - E_i)}{\hbar^2} \left| \left\langle f \left| \sum_{a=1}^Z x_a \right| i \right\rangle \right|^2, \quad \sum_{f=1}^{\infty} F_{fi}^{(x)} = ? \quad (3)$$

Справедливы ли они для любой системы, где силы зависят только от относительных расстояний между зарядами и не зависят от их относительных скоростей (см. зад. 2)? Как изменятся эти правила сумм ТРК для электронов в атоме или нуклонов в ядре при учете принципа Паули (КС, НГУ-74, Злв, ГКК-Ч.2)?

11 Между Z протонами и N нейтронами в ядре с $A = Z + N$ нуклонами, благодаря обмену заряженным пи- мезоном, существуют, кроме обычных, еще пространственно обменные силы, переводящие нейтрон ν в протон π и обратно действием соответствующего обменивающего оператора $\hat{P}_{\nu\pi}$. Найти обобщение правил сумм ТРК (3) для нуклонов в ядре с учетом соответствующей добавки к Гамильтониану их взаимодействия \hat{H}_A вида (2), при $Z \mapsto A = Z + N$, и:

$$\Delta H_{\text{обм}} = - \sum_{\nu=1}^N \sum_{\pi=1}^Z U(r_{\nu\pi}) \hat{P}_{\nu\pi}, \quad r_{\nu\pi}^2 = (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\pi)^2. \text{ И, если } \mathbf{R} = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \mathbf{x}_a, \text{ - оператор}$$

радиус-вектора центра масс, который не может вызывать внутренние возбуждения ядра, например, в его системе покоя, найти оператор эффективного дипольного момента ядра (НГУ-74, Злв).

12 Найти квазиклассический спектр энергий E_n и спектральную плотность $\varrho(E) = dn(E)/dE$ связанных состояний при $n \gg 1$ для потенциала $U(x) = gx^\nu$ (Мгд-Кр).

13 Используя модель Томаса-Ферми, найти, значение атомного номера Z , при котором начинают заполняться состояния с данным значением орбитального момента l (ЛЛ-III, ЛВМ-II, Бете).

14 Используя квазиклассическое представление волновых функций связанных состояний электронов найти квазиклассическое выражение плотности электронов в данной точке нейтрального многоэлектронного атома через потенциал самосогласованного поля в этой точке. Как связано это выражение со статистикой ферми? Чему равно ε_F ? (Мгд, Мгд-Кр, КС).

15 Вывести формулу Крамера для диагональных матричных элементов оператора r (ГКК, ГКК-Ч.2, Кис), $(r^k)_{nl} = \langle n, l | r^k | n, l \rangle$:

$$\frac{(k+1)}{n^2} (r^k)_{nl} = (2k+1)a (r^{k-1})_{nl} + \frac{k}{4} [k^2 - (2l+1)^2] a^2 (r^{k-2})_{nl},$$

по кулоновским состояниям $|n, l\rangle$, где: $a = \hbar^2 / (MZe^2)$ - боровский радиус.

Задание по квантовой теории рассеяния.

1 В борновском приближении вычислить амплитуду и сечение рассеяния на потенциалах:

$$(a) U_1(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}; \quad (b) U_2(r) = \frac{g}{r} e^{-\kappa^2 r^2}; \quad (c) U_3(r) = \frac{\alpha}{r^2},$$

и сравнить найденные сечения с их полуклассической оценкой (как суммы "классического" и "волнового") (Мигдал).

2 Найти детерминант **Йоста-Фредгольма**, **T-матрицу**, **сечение**, **в.ф. рассеяния** и **связанных состояний** для сепарабельного потенциала первого ранга: (какому моменту l он соответствует?) (Ситенко, Ньютон)

$$\langle \mathbf{p} | U | \mathbf{q} \rangle = \chi(\mathbf{p}) \chi^*(\mathbf{q}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}), \quad \text{где: } \chi(\mathbf{p}) - \text{ скалярная функция;}$$

3 **Тоже** для сепарабельного потенциала второго ранга с эрмитовой матрицей λ_{lj} :

$$\langle \mathbf{p} | \hat{U} | \mathbf{q} \rangle = \chi_l(\mathbf{p}) \lambda_{lj} \chi_j^*(\mathbf{q}); \quad l, j = 1, 2.$$

4 **Тоже** для сепарабельного потенциала ранга n , то есть при $l, j = 1, 2, \dots, n$ (Ситенко, Ньютон).

5 Разделив переменные, получить радиальное Ур. Шр. в пространстве произвольной размерности N . (Бейтмен-Эрдейи, Градштейн-Рыжик, Виленкин, К-Т).

6 Вычислить функции Грина оператора свободного Ур. Шр. в пространстве произвольной размерности N и найти связь между ними при разных значениях N (Бейтмен-Эрдейи, Градштейн-Рыжик, Виленкин, К-Т):

$$\langle \mathbf{x} | \frac{1}{-\nabla^2 - k^2 \mp i0} | \mathbf{y} \rangle, \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x})}}{(2\pi)^{N/2}},$$

что получится для $N=1,2,3,4$? Найти ее асимптотику при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

7 Исходя из решений предыдущей задачи построить теорию рассеяния в пространстве 1-го (Липкин) и 2-х (ГКК) измерений.

8 Для сингулярного дельта-потенциала в двухмерном пространстве: $U(\mathbf{x}) = \gamma_0 \delta_2(\mathbf{x})$, найти "перенормированные" T-матрицу, в.ф. рассеяния и связанных состояний, "сечение" рассеяния, используя как процедуру "вычитания", так и считая его пределом при $\Lambda \rightarrow \infty$ сепарабельного потенциала (в импульсном представлении):

$$\langle \mathbf{p} | U_\Lambda | \mathbf{q} \rangle = \Upsilon(\Lambda) \chi_\Lambda(\mathbf{p}) \chi_\Lambda^*(\mathbf{q}), \quad \chi_\Lambda(\mathbf{p}) = \Theta(\Lambda - |\mathbf{p}|),$$

при подходящей зависимости $\gamma_0 \rightarrow \Upsilon(\Lambda)$ и найти ее (Хуанг, S.A. Coon and B.R. Holstein, Am. J. Phys., Vol.70, No.5, 2002, pp. 513-519).

9 Проверить выполнение оптической теоремы для амплитуды рассеяния в приближении эйконала, полагая, что при рассеянии почти вперед (Сунакава, Киселев):

$$d\Omega(\mathbf{k}) \simeq \frac{d^2 k_\perp}{k^2}.$$

10 Доказать теорему Левинсона исходя из известных аналитических свойств функции Йоста $F_l(-ik)$ в верхней полуплоскости k . Пояснить различие случаев $l = 0$ и $l \neq 0$ (Ньютон, Сунакава, Альфаро-Редже, Ситенко).

- 11 В борновском приближении вычислить фазовые сдвиги $\delta_l(k)$ на потенциалах и проверить их основные свойства при $k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$:

$$(a) U(r) = U_0 \exp\left[-\frac{r^2}{a^2}\right], \quad (b) U(r) = U_0 \frac{a^2}{r^2 + a^2}, \quad (c) U(r) = U_0 \frac{a}{r} e^{-r/a}.$$

- 12 Найти точное выражение для $S_{l=0}(k)$ для потенциалов (Флюгге, Ситенко, ГКК):

$$(a) U(r) = U_0 e^{-r/a}, \quad (b) U(r) = U_0 (e^{r/a} - 1)^{-1}.$$

- 13 Найти точные фазы рассеяния $\delta_l(k)$ на потенциале $U(r) = g/r^2$. При каких l и g гамильтониан будет самосопряженным оператором (S.A. Coon and B.R. Holstein, Am. J. Phys., Vol.70, No.5, 2002, pp. 513-519; Бейтмен-Эрдейи, Елютин-Кривченко, ГКК)?

- 14 Проверить, что функция Грина парциального оператора Ур.Шр. (Ньютон):

$$\hat{h}_l^r = -\partial_r^2 + l(l+1)r^{-2} + U(r); \quad (\hat{h}_l^r - k^2) G_l^\pm(r,y;k^2) = \delta(r-y),$$

в терминах физического решения $\Psi_l^\pm(k,r)$ и решения Йоста $f_l(\mp ik, r)$ имеет вид:

$$G_l^\pm(r,y;k^2) = \Theta(r-y) \frac{i^{\mp l}}{k} f_l(\mp ik, r) \Psi_l^\pm(k, y) + (r \rightleftharpoons y), \quad \text{где: } (f_l(\mp ik, r) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_r \Psi_l^\pm(k, r)) = i^{\pm l} k.$$

- 15 Исходя из представления парциальной S_l -матрицы, получить представление для фазы рассеяния через решения Йоста при вещественных k (Ньютон – не повторять!):

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{i\pi l} \frac{f_l(ik, r)}{f_l(-ik, r)}, \quad \delta_l(k) = \frac{\pi l}{2} - k \int_0^\infty dr r \frac{d}{dr} \frac{1}{|f_l(ik, r)|^2}.$$

- 16 Используя свойства вронскианов, получить непосредственно из Ур. Шр. выражение для парциальной амплитуды и функции Йоста (Ньютон, Сунакава, Альфаро-Редже):

$$k\eta_l(k) = e^{\pm i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) = -\frac{1}{k} \int_0^\infty dr \Psi_l^0(k, r) U(r) \Psi_l^\pm(k, r),$$

$$f_l(\kappa) \implies (f_l(\kappa, r) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_r \varphi_l(0, r)) \Big|_{r=0} = \kappa^2 \int_0^\infty dr \varphi_l(0, r) f_l(\kappa, r).$$

- 17 Исследовать поведение фазы s-рассеяния $\delta_{l=0}(k)$ при $k \rightarrow 0$, при появлении связанных состояний или же "резонансов" с нулевой энергией для прямоугольной потенциальной ямы $U(r)$, глубины $-U_0$ и ширины R . Найти длину рассеяния и эффективный радиус (Ньютон, Сунакава, Ситенко, Киселев, ЛЛ-III).

- 18 Найти спектр и точную фазу рассеяния $\delta_{l=0}(k)$ и проверить выполнение теоремы Левинсона с изменением U_0 на потенциале (ГКК- **2.12**, **2.52**; Флюгге v.I- **39**; ГК §1- **11**, §2- **5**, §8- **11**):

$$U(r) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha r}, \quad r > 0,$$

- 19 Доказать неравенство Баргмана для числа N_l связанных состояний с данным значением l углового момента: $N_l(2l+1) \leq \int_0^\infty dr r |V(r)|$ (Ситенко, Альфаро-Редже, Елютин-Кривченко).

- 20 Найти амплитуду радужного рассеяния (Ньютон, §§5.5, 18.2; Сыщенко)

- 21 Найти амплитуду рассеяния в случае глории (Ньютон, §§5.5, 18.2)