ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 81, № 1
октябрь, 1989

ПАРЦИАЛЬНЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ ЙОСТА И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПО ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСА

Коренблит С. Э.

Получены интегральные представления парциальных детерминантов Йоста и оператора Йоста на единичной сфере через спектральную плотность по передаче импульса резольвенты эллиптического оператора в R_N. Найдена связь между спектральными плотностями для одного и того же потенциала $V(r)$ и различных размерностей r_N, $N\geqslant 2$. Даны новые интегральные представления для решений кулоновской задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

В лекциях [1] Фубини и Строффолини в поисках уравнения на реджевскую траекторию $\alpha(\varepsilon)$ исследовали уравнения для спектральной плотности резольвенты (или T-матрицы) по передаче импульса t, возникающие при вычислении скачка по t от уравнений Липпмана – Швингера (ЛШ) и Бете – Солпитера (БС) с локальным потенциалом, обладающим спектральной зависимостью от t в импульсном представлении. Они показали, что эти уравнения допускают решения с асимптотикой вида $t^{\alpha(\varepsilon)}R_\alpha(\varepsilon, \mathbf{p}^2)$ при $t\to\infty$, а уравнения на «вычет» $R_\alpha(\varepsilon, \mathbf{p}^2)$ тождественны однородным парциальным уравнениям Шредингера (УШ) и БС, соответственно, с угловым моментом $l=\alpha(\varepsilon)$. Таким образом, информация о дискретном спектре, отвечающем вычитаниям в спектральном представлении T-матрицы, не теряется и в самом скачке по t, но включена в спектральную плотность иначе, чем в резольвенту.

Основная цель этой работы – показать, что существует простой способ извлечь всю информацию как о дискретном, так и о непрерывном спектре шредингеровского гамильтониана $\hat{H}_V=\hat{\mathbf{p}}^2+\hat{V}(\mathbf{x})$ непосредственно из полувнеэнергетической спектральной плотности, T-матрицы, не нуждающийся ни в решении каких-либо дополнительных уравнений (типа N/D), ни в процедуре восстановления функций дисперсионным интегралом, ни в аналитическом продолжении по l. Возникающая система уравнений занимает промежуточное положение между техникой ЛШ и подходом Мандельстама [2] и, объединяя их достоинства: линейность, с одной стороны, и вольтерров характер уравнений – с другой, освобождает от проблем неоднозначности решений и вычитаний. Другой ее привлекательной чертой является отсутствие необходимости обращаться к полной системе волновых функций гамильтониана $\hat{H}_V$, в том числе и в задаче о сдвигах энергетических уровней под действием малого возмущения $\hat{v}$ того же вида. Все вопросы единственности при этом легко решаются линейностью и вольтерровостью динамических уравнений.

Их интересной особенностью является также простая связь между решениями для одного и того же потенциала $V(|\mathbf{x}_N|)$ в пространствах различной размерности N_1 и N_2. Эта связь фактически сводит изучение резольвенты $\hat{G}_V{}^{(N)}(b^2)$ в пространстве R_N

(1) $$[\hat{G}_V{}^{(N)}(b^2)]^{-1}=\nabla_N{}^2-b^2-V(|\mathbf{x}_N|)$$

для потенциала вида $(m\geqslant 0,\ |\mathbf{x}_N|=(x_1{}^2+\ldots+x_N{}^2)^{1/2},\ \Omega_N=2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2))$

(2) $$V(|\mathbf{x}_N|)=\int d^N\mathbf{q}\, e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}\frac{2}{\pi\Omega_N}\int_m^\infty d\gamma\frac{\Sigma^{(N)}(\gamma)}{(\gamma^2+\mathbf{q}^2)}$$

к изучению резольвенты в двух измерениях $\hat{G}_V{}^{(2)}(b^2)$ для того же потенциала $V(|\mathbf{x}_2|)$, уравнение для которой проще. Возможность такого сведения для центрально-симметричных операторов выглядит совершенно естественной, если обратиться к формальному выражению[1] для детерминанта оператора (1)

(3) $$\det\{\hat{G}_0{}^{(N)}(b^2)[\hat{G}_V^{(N)}(b^2)]^{-1}\}=\prod_{l=0}^{\infty}[F_l^{(N)}(b)]^{h(N,l)},$$

где детерминант Йоста[2] $F_l{}^{(N)}(b)$ является таким же детерминантом для парциальной резольвенты $\hat{G}_{lV}^{(N)}(b^2)$ [4]: $r=r_N=|\mathbf{x}_N|$,

(4) $$[\hat{G}_{lV}^{(N)}(b^2)]^{-1}=\partial_r{}^2-j(j+1)r^{-2}-b^2-V(r),$$

(5) $$F_l^{(N)}(b)=\det[1-\hat{G}_{l0}^{(N)}(b^2)\hat{V}],$$

вырожденной с кратностью $h(N,\ l)=(2l+N-2)(l+N-3)![l!(N-2)!]^{-1}$. Действительно, поскольку размерность пространства N присутствует в операторе (4) только в комбинации $j=l-a_N$, $a_N=(3-N)/2$, его детерминанты (как и собственные функции) для одного и того же $V(r)$ и разных размерностей r_N и r_K связаны между собой очевидным соотношением

(6) $$F_{l_{(N)}}^{(N)}(b)=F_{l_{(K)}}^{(K)}(b),$$

где $l_{(N)}=j+a_N$; $l_{(K)}=j+a_K=l_{(N)}-a_N+a_K$.

Основным результатом этой работы являются интегральное представление (16) парциального детерминанта Йоста $F_l{}^{(N)}(b)$ через спектральную плотность T-матрицы по передаче импульса t и аналогичное представление для решений УШ с оператором (4). Соотношение (6) оказывается тогда отражением связи между соответствующими спектральными плотностями (12), вытекающей непосредственно из основного динамического уравнения (11).

---

[1] Расходимость этого бесконечного произведения для дальнейшего не существенна.

[2] Детерминанты вида (3) возникают, например, при вычислении эффективного действия, вероятностей распада метастабильного вакуума [3] и других квантовых эффектов.

В силу известного представления [2]

$$(7)\qquad F_l^{(N)}(b)=\prod_{n=1}^{\bar n_l}\left(1-\frac{b_{nl}^2}{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk^2\eta_l(k)}{k^2+b^2}\right\}$$

фазы упругого рассеяния $\eta_l(k)$ и энергии связанных состояний $\varepsilon=-b_{nl}^2$ однозначно определяются соответственно аргументом и нулями функции $F_l^{(N)}(b)$.

Структура работы такова. В следующем разделе получено основное уравнение (11) на спектральную плотность T-матрицы в R_N и изучены его свойства. В третьем разделе введением дополнительной степени свободы с помощью внеэнергетической функции Йоста [5—10] выводится представление для $F_l^{(N)}(b)$ и решений УШ. В четвертом разделе они иллюстрируются на точно решаемом кулоновском примере. В заключении обсуждаются их возможные приложения. В приложении собраны основные технические формулы.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ T-МАТРИЦЫ ПО ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСА

В полной аналогии с юкавскими потенциалами в трех измерениях [1, 2] матричные элементы T-матрицы в импульсном представлении

$$(8)\qquad \hat G_V^{(N)}(b^2)=\hat G_0^{(N)}(b^2)+\hat G_0^{(N)}(b^2)\hat T^{(N)}(b^2)\hat G_0^{(N)}(b^2),$$

для потенциалов вида (2) допускают спектральное представление по передаче импульса $t=-(\mathbf{q}-\mathbf{p})^2$, $\mathbf{p}=p\mathbf{n}$, $\mathbf{q}=q\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^2=\mathbf{n}^2=1$,

$$(9)\qquad \langle\mathbf{q}|\hat T^{(N)}(b^2)|\mathbf{p}\rangle=\frac{2}{\pi\Omega_N}\int_m^\infty\frac{d\nu}{(\nu^2-t)}D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)+$$
$$+\,(\textit{вычитания}).$$

Пользуясь (2), (9) и интегральным представлением (П.3), можно вычислить скачок по t от уравнения ЛШ:

$$(10)\qquad \hat T^{(N)}(b^2)=\hat V+\hat V\hat G_0^{(N)}(b^2)\hat T^{(N)}(b^2),$$

в обкладках $\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle=\delta_N(\mathbf{p}-\mathbf{q})$; $\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle=e^{-i\pi a_N/2}e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}(2\pi)^{-N/2}$ и получить следующее обобщение уравнения [1] для спектральной плотности $D^{(N)}$:

$$(11)\qquad D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)=\Sigma^{(N)}(\nu)-4^a\pi^{-1}(N-2)\int_m^{\nu-m}d\gamma\,\Sigma^{(N)}(\gamma)\times$$
$$\times\int_m^{\nu-\gamma}d\mu[\nu^2/\Delta_{\nu\mu\gamma}]^a\int_{-1}^{1}d\eta(1-\eta^2)^{-a-1/2}[\varkappa^2(\eta)+b^2]^{-1}\times$$
$$\times D^{(N)}(\mu;-ip,b^2,-i\varkappa(\eta)),$$

где $a=a_N$; $\Delta_{\nu\mu\gamma}=\Delta(\nu^2,\ \mu^2,\ \gamma^2)$; $\Delta(x,\ y,\ z)=(x+y-z)^2-4xy$; $2\nu^2\varkappa^2(\eta)=$ $=\nu^2(\nu^2+q^2+p^2-\mu^2-\gamma^2)+(q^2-p^2)(\mu^2-\gamma^2)+\eta\,[\Delta_{\nu\mu\gamma}\Delta(q^2,\ p^2,\ -\nu^2)]^{1/2}$.

Для одной и той же функции потенциала $V(r)$ и разных размерностей r_N и r_K решения этого уравнения оказываются связанными интегральным преобразованием Вейля

$$D^{(K)}(\nu;\ldots)=\frac{\pi^{a_K}\Omega_K}{\pi^{a_N}\Omega_N}2\nu\left[\frac{d}{d\nu^2}\right]^n\times \tag{12}$$

$$\times\int_m^\nu \frac{d\gamma(\nu^2-\gamma^2)^{\delta a+n-1}}{\Gamma(\delta a+n)}D^{(N)}(\gamma;\ldots),$$

где выбор целого числа n ограничен только условием сходимости интеграла, $\delta a=a_K-a_N$.

Для борновского члена $D^{(N)}(\nu;\ldots)\to\Sigma^{(N)}(\nu)$ это преобразование генерируется представлением для потенциала (2), записанным в виде [11] $(r=r_N,\ a=a_N)$

$$V(r)=\frac{4\pi}{\pi^a\Omega_N}\int_m^\infty d\nu\,\Sigma^{(N)}(\nu)\frac{r^{a-1}}{(2\nu)^a}\chi_{-a}(\nu r) \tag{2a}$$

с учетом выражений 7.12(19) и 7.11(21) из [12] для функции Макдональда $K_\lambda(z)$, где $\chi_l(z)=(2z/\pi)^{1/2}K_{l+1/2}(z)$; $\chi_0(z)=e^{-z}$. Воспроизведение этого преобразования ядром уравнения (11) проверяется непосредственно с помощью интегрального соотношения (П.7). При $K=N+2n$, например, (12) сводится к равенству

$$D^{(N+2n)}(\nu;\ldots)=\frac{\Omega_{N+2n}}{\Omega_N\pi^n}2\nu\left[\frac{d}{d\nu^2}\right]^n\frac{D^{(N)}(\nu;\ldots)}{2\nu}.$$

Ядро двумерного варианта уравнения (11) содержит дельта-функцию [11]

$$D^{(2)}(\nu;-ip,b^2,-iq)=\Sigma^{(2)}(\nu)-\frac{2}{\pi\nu}\times \tag{13}$$

$$\times\Delta^{1/2}(q^2,p^2,-\nu^2)\int_m^{\nu-m}d\gamma\,\Sigma^{(2)}(\gamma)\int_m^{\nu-\gamma}d\mu\int_{\omega_-}^{\omega_+}d\varkappa^2\times$$

$$\times\delta[(\omega_+-\varkappa^2)(\varkappa^2-\omega_-)]\frac{D^{(2)}(\mu;-ip,b^2,-i\varkappa)}{(\varkappa^2+b^2)},$$

где $\omega_\pm(\nu;\ \mu,\ \gamma;\ q,\ p)=\varkappa^2(\eta=\pm1)$; см. (11). Она позволяет снять любой из трех интегралов, однако, как видно из (12), никакой потери информации при этом не происходит.

Аналог соотношения (12) для полных T-матриц можно получить восстановлением их из (9) лишь в отсутствие вычитаний:

$$\langle\mathbf{q}|\hat{T}^{(N)}(b^2)|\mathbf{p}\rangle=T^{(N)}(t;\ q^2,\ p^2,\ b^2),\qquad \delta a=a_K-a_N;$$

$$T^{(K)}(t;\ldots)=\pi^{\delta a}\left[\frac{d}{dt}\right]^n\int_{-\infty}^t\frac{d\tau(t-\tau)^{\delta a+n-1}}{\Gamma(\delta a+n)}T^{(N)}(\tau;\ldots).$$

Это равенство можно проверить на точном решении для кулоновского потенциала $V(r)=g/r$, приведенном в [13].

Парциальные $T_l^{(N)}$-матрицы определяются разложением

$$(14)\qquad \langle \mathbf{q}|\hat{T}^{(N)}(b^2)|\mathbf{p}\rangle = -\frac{(qp)^{a_N}}{\pi q\lambda\Omega_N}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+2\lambda)C_l^{\lambda}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})T_l^{(N)}(q,p;b^2),$$

где $C_l^\lambda(z)$ — полиномы Гегенбауэра [12], $\lambda=(N-2)/2$. С учетом (9) и обобщенной формулы Гейне (П.4) лишь при достаточно больших l их можно выразить через $D^{(N)}$: $j=l-a_N$,

$$(15)\qquad T_l^{(N)}(q,p;b^2) = -\frac{4\pi e^{-i\pi a}}{\pi^a\Omega_N 2p}\times$$
$$\times\int_m^{\infty}\frac{d\nu\, D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)}{[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)]^{a/2}}Q_j^a\left[\frac{q^2+p^2+\nu^2}{2qp}\right].$$

Привлекая представление для функций Лежандра 3.7(31) из [12], можно убедиться, что соотношение (12) для $D^{(N)}$ влечет выполнение равенства (6) и для $T_l^{(N)}$. Сходимость полученных в следующем разделе представлений для $F_l^{(N)}(b)$ и решений УШ в отличие от (15) не зависит от l.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА ЙОСТА

Основным результатом этого раздела является выражение детерминанта Йоста через квадратуры от полувнеэнергетической спектральной плотности $D_{\text{h.s.}}^{(N)}=D^{(N)}(\nu;\,-ip,\,b^2,\,-iq)|_{p=ib}$: $a=a_N$,

$$(16)\qquad F_l^{(N)}(b)-1=\frac{4\pi^{1-a}}{\Omega_N}\int_m^{\infty}d\nu\int_{b+\nu}^{\infty}\frac{d\alpha(b/\alpha)^j D^{(N)}(\nu;b,b^2,\alpha)}{(\alpha^2-b^2)[\Delta(\alpha^2,b^2,\nu^2)]^{a/2}}\times$$
$$\times P_j^a\left[\frac{\alpha^2+b^2-\nu^2}{2\alpha b}\right].$$

Аналогичным образом выражаются волновые функции дискретного и непрерывного спектра и сдвиги уровней дискретного спектра [10]. Вывод как этого соотношения, так и выражения для сдвига уровня можно элегантно провести путем увеличения числа переменных у $F_l^{(N)}(b)$, что приводит к понятию внеэнергетической функции Йоста (ВФЙ) [5—9]. Увеличение числа переменных у детерминанта Йоста [7] инспирировано прежде всего стремлением получить для него замкнутое динамическое уравнение [6, 8]. Однако заметных его упрощений удалось достичь только для локальных потенциалов вида (2), сначала для $l=0$ [9], а затем для произвольных l [5, 6]. Введение ВФЙ на основе операторной теории рассеяния проведено в [6—7], а на основе неоднородного радиального УШ с потенциалом (2) — в [5]. Здесь же используются интуитивные, но более наглядные соображения, основанные на соотношении

$$(17)\qquad \frac{1}{F_l^{(N)}(b)}\bigg|_{b=\mp ik}=1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\varkappa^2(\varkappa/k)^j T_l^{(N)(\pm)}(\varkappa,k)}{\varkappa^2-k^2\mp i0}$$

которое для локальных несингулярных потенциалов $(\lim\limits_{r\to 0}r^2V(r)=0)$, немедленно следует из определения левой части как «коэффициента усиления» $\lim\limits_{r\to 0}\psi_{lV}^{(\pm)}(k,r)/\psi_{l0}(k,r)$ [4], где $\psi_{lV}^{(\pm)}(k, r)$ — физическое решение, отвечающее функции Грина (4) при $b=\mp ik$. Стоит, однако, отметить, что (17) формально вытекает непосредственно из абстрактного определения (5) без привлечения локальности $\hat{V}$ и граничного условия при $r\to 0$ [4]. Для нелокального потенциала в левой части (17) возникает отношение детерминантов:

$$M_l^{(N)}(k^2)/F_l^{(N)}(\mp ik); \qquad M_l^{(N)}(k^2)=\det[1-\hat{B}_{l0}^{(N)}(k^2)\hat{V}],$$

где $\hat{B}_{l0}^{(N)}(k^2)$ отвечает вольтерровой части $\hat{G}_{l0}^{(N)}(-k^2\mp i0)$ в координатном представлении [4, 6].

Определим ВФЙ $F_l^{(N)}(\rho, -ik)$ как аналитическую функцию обеих переменных, регулярную в $\operatorname{Re}\rho>0$ при фиксированном $|\operatorname{Im} k|<m$ и наоборот, и такую, что

(18а) $$\lim_{|\rho|\to\infty} F_l^{(N)}(\rho,-ik)=1,$$

(18б) $$F_l^{(N)}(-ik, -ik)=F_l^{(N)}(-ik)/M_l^{(N)}(k^2).$$

В силу (17) этим условиям удовлетворяет функция

(19) $$F_l^{(N)}(\rho,-ik)=1-\frac{F_l^{(N)}(\mp ik)}{M_l^{(N)}(k^2)}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{d\varkappa^2(\varkappa/k)^j}{\varkappa^2+\rho^2}T_l^{(N)(\pm)}(\varkappa,k).$$

Отсюда легко найти выражение для $T_l^{(N)(\pm)}$ через ВФЙ [7]. Подставляя в (19) парциальное уравнение ЛШ для $T_l^{(N)(\pm)}(q, k)=T_l^{(N)}(q, k; -k^2\mp i0)$:

(20) $$T_l^{(N)(\pm)}(q,k)=T_{l0}^{(N)}(q,k)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{d\varkappa^2 T_{l0}^{(N)}(q,\varkappa)}{\varkappa^2-k^2\mp i0}T_l^{(N)(\pm)}(\varkappa,k),$$

в общем случае можно получить следующее уравнение Фредгольма [6, 8]:

(21) $$Z_l^{(N)}(\rho,-ik)=H_l^{(N)}(\rho,k)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds\, sZ_l^{(N)}(-is,-ik)}{i\pi(s^2-k^2)}\times$$
$$\times[H_l^{(N)}(\rho,s)-(s\to k)],$$

где $Z_l^{(N)}(\rho, -ik)=F_l^{(N)}(\rho, -ik)-1$;

(22) $$H_l^{(N)}(\rho,k)=-\pi^{-1}\int\limits_0^\infty d\varkappa^2\, T_{l0}^{(N)}(\varkappa,k)\,(\varkappa/k)^j(\varkappa^2+\rho^2)^{-1}.$$

Весь дальнейший прогресс связан с локальностью потенциала (2). В этом случае $T_{l0}^{(N)}$ дается (15) с заменой $D^{(N)}(\nu;\ldots)\to\Sigma^{(N)}(\nu)$, и формула (П.13), справедливая в отличие от использованной в [6] при произвольных $\mathrm{Re}\, j > -1$, приводит к представлению ($j=l-a_N$)

$$(23)\qquad H_l^{(N)}(\rho,k)=\int\limits_{\rho+m}^{\infty} d\alpha(\rho/\alpha)^j K_l^{(N)}(\alpha,\rho)(\alpha^2+k^2)^{-1},$$

где явный вид ядра $K_l^{(N)}(\alpha,\rho)$ указан ниже.

Нелокальность вида $\Sigma(\nu)\to(q^2+p^2)\Sigma(\nu)$ в (2) оставляет подобное представление лишь для ядра (21), и только в локальном случае из (21) легко получить для ВФЙ линейное уравнение Вольтерра с ядром $K_l^{(N)}$, которое при $k=ib$ имеет вид [5, 6]

$$(24)\qquad F_l^{(N)}(\rho,b)=1+\int\limits_{\rho+m}^{\infty} K_l^{N)}(u,\rho)F_l^{N)}(u,b)(\rho/u)^j(u^2-b^2)^{-1}\,du.$$

Наше основное нетривиальное наблюдение состоит в том, что **уравнение (24) является своеобразной парциальной проекцией аналитического продолжения уравнения (11) для спектральной плотности** $D^{(N)}$. Действительно, определив вольтеррово ядро преобразования $d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$:

$$(25)\qquad F_l^{(N)}(\rho,b)=1+\int\limits_{\rho+m}^{\infty} d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)(\rho/u)^j(u^2-b^2)^{-1}\,du,$$

нетрудно получить из (24), что оно подчиняется уравнению [5, 6]

$$(26)\qquad d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)=K_l^{(N)}(u,\rho)+\int\limits_{\rho+m}^{u-m} K_l^{(N)}(u,\alpha)\times$$
$$\times d_l^{(N)}(\alpha,\rho;b^2)(\alpha^2-b^2)^{-1}\,d\alpha,$$

причем $d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)=d_l^{(N)}(-\rho,-u;b^2)$.

Будем искать решение (26) в виде ($a=a_N$)

$$(27)\qquad d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)=\frac{4\pi}{\pi^a\Omega_N}\int\limits_{m}^{u-\rho}\frac{\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u)}{[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)]^{a/2}}\times$$
$$\times P_j^a\left[\frac{u^2+\rho^2-\nu^2}{2u\rho}\right]d\nu.$$

Ядро $K_l^{(N)}(u,\rho)$ дается заменой здесь $\tilde{D}^{(N)}(\nu;\ldots)\to\Sigma^{(N)}(\nu)$. Подставляя (27) в (26), с помощью формулы (П.8) можно увидеть, что это его единственное решение, если $\tilde{D}^{(N)}$ подчиняется уравнению, которое тождественно уравнению (11), аналитически продолженному при $\nu^2<(u\pm\rho)^2$ в область

$$(28)\qquad p=i\rho;\quad q=iu;\quad \varkappa(\eta)=i\alpha(\eta);$$
$$\Delta^{1/2}(q^2,p^2,-\nu^2)=-\Delta^{1/2}(u^2,\rho^2,\nu^2).$$

Другими словами, $\tilde{D}^{(N)}$ **является аналитическим продолжением спектральной плотности** $D^{(N)}$ T-матрицы (9) по энергиям обкладок:

$$(29)\qquad \tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u)=D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)\Big|_{\substack{p=i\rho,\\ q=iu}}.$$

Причем в силу условий сохранения четности и микрообратимости $\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho, b^2, u)=\tilde{D}^{(N)}(\nu; u, b^2, \rho)$. Искомое представление (16) следует немедленно при $\rho\to b$ из (29), (27), (25) и (18) с $M_l^{(N)}(k^2)=1$.

Стандартные оценки сходимости итерационных решений для уравнений Вольтерра вида (24), (26), (11) [2, 4—5] показывают, что класс функций $\Sigma^{(N)}(\nu)$, для которых эти решения существуют, достаточно широк. Он содержит, например, функции, допускающие непрерывную неубывающую мажоранту $M(\nu)$: $|\Sigma^{(N)}(\nu)|d\nu\leqslant dM(\nu)$, для которой $\int\limits_0^\infty dM(\nu)/\nu<\infty$.

Таким образом, цепочка операций disc (9) $\to$ (28) $\to$ (27) $\to$ (25) связывает

$$\hat{T}^{(N)}\to D^{(N)}\to \tilde{D}^{(N)}\to d_l^{(N)}\to F_l^{(N)}, \tag{30}$$

устанавливая прямые соотношения между динамическими уравнениями (10) $\to$ (11) $\to$ (26) $\to$ (24). Обнаруженная логическая связь (30) допускает ряд интересных обобщений. Например, стартуя с двухпотенциального аналога уравнения ЛШ, определяющего оператор $\hat{T}_{(2)}$ для $\hat{V}+\hat{v}$ по оператору $\hat{T}_{(1)}$ для $\hat{V}$, где $\hat{v}$ тоже имеет вид (2) с плотностью $\sigma(\nu)$: $\hat{T}_{(2)}-\hat{T}_{(1)}=[1+\hat{T}_{(1)}\hat{G}_0]\hat{v}[1+\hat{G}_0\hat{T}_{(2)}]$, после несложных выкладок по этой цепочке (30) можно прийти к двухпотенциальному обобщению уравнения (24) для ВФЙ. Последнее может быть использовано для вычисления сдвигов уровней дискретного спектра через вариацию функции Йоста $\delta F_l=F_{l(2)}-F_{l(1)}$ [10].

Иррегулярное решение УШ, заданное своим поведением при $r\to\infty$: $f_l^{(N)}(b, r)\to\chi_j(b\,r)\to e^{-br}$, допускает представление

$$f_l^{(N)}(b,r)=\chi_j(br)+\int\limits_{b+m}^{\infty}\Phi_l^{(N)}(u,b)\,(u^2-b^2)^{-1}\chi_j(ur)\,du, \tag{31}$$

где $\chi_j(z)$ определено в (2а), а функция $\Phi_l^{(N)}$, задаваемая здесь равенством

$$\Phi_l^{(N)}(u, b)=d_l^{(N)}(u, \rho; b^2)\,|_{\rho=b}, \tag{32}$$

была введена де Альфаро и Редже [2] для $N=3$.

Проверка равенства (31) осуществляется непосредственным действием на него оператора (4) с учетом (2а), уравнения (26) и представления (П.11). Аналогичные (31) представления имеют место для волновых функций дискретного и непрерывного спектров [10].

Интегральные уравнения (24), (26) позволяют провести исчерпывающий анализ аналитических свойств их решений. В частности, возможно прямое вычисление скачков на всех имеющихся разрезах [5], что дает следующее спектральное представление:

$$d_l^{(N)}(u,\rho;b^2)=K_l^{(N)}(u,\rho)+$$
$$+\int\limits_{\rho+m}^{u-m}\Phi_l^{(N)}(u,\alpha)\,\Phi_l^{(N)}(-\rho,-\alpha)\,(\alpha^2-b^2)^{-1}\,d\alpha.$$

С точки зрения указанной выше логической цепочки (30) оно является образом уравнения Лоу [4].

Предельный переход на энергетическую поверхность в соотношениях (18) и (32) требует осторожности для дальнодействующих потенциалов ($m=0$), что иллюстрируется точным решением следующего раздела.

4. КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ($N = 3$)

Кулоновский потенциал $m=0$, $\Sigma(\mu)=g\delta(\mu)$ является дальнодействующим, и формулы предыдущего раздела нуждаются для него в некоторой модификации. Ее проще всего усмотреть, исходя из явного решения. Решение (11) имеет вид ($a=g(2b)^{-1}$ (индекс N опускаем), $w=(q^2+b^2)(p^2+b^2)/b^2$)

$$D^c(\nu; -ip, b^2, -iq)=g\delta(\nu)+g(\partial/\partial\nu)\,[\xi(w/\nu^2)]^a. \tag{33}$$

Решение продолженного уравнения с $\widetilde{w}=(u^2-b^2)(\rho^2-b^2)/b^2$, имеет вид

$$\widetilde{D}^c(\nu; \rho, b^2, u)=g\delta(\nu)+g(\partial/\partial\nu)\,[\xi(\widetilde{w}/\nu^2)]^{-a}, \tag{34}$$

где $\xi(y)=[1+(2/y)\pm(2/y)\sqrt{1+y}]^{\mp 1}$ и фиксирована положительная при $y>0$ ветвь корня $|\xi|<1$. Аналитическое продолжение (28) от (33) к (34) можно проследить явно: $w\Rightarrow e^{2i\pi}\widetilde{w}$, $\xi(e^{2i\pi}y)\Rightarrow[\xi(y)]^{-1}$ при $|y|>1$. Для ВФЙ из (34), (27) и (25) получается громоздкое выражение, содержащее сингулярность вида $[(\rho+b)/(\rho-b)]^a$. Таким образом, в импульсном представлении кулоновское дальнодействие проявляется сингулярностями на энергетической поверхности в (33), (34) и ВФЙ. Физический смысл имеют лишь коэффициенты при этих сингулярностях. Если, следуя [14], определить полувнеэнергетические величины равенствами

$$\widetilde{D}^c_{\text{h.s.}}(\nu; b^2; u)=\lim_{\rho\to b}\left(\frac{\rho-b}{2bi}\right)^a\frac{\widetilde{D}^c(\nu;\rho,b^2,u)}{\Gamma(1+a)}= \tag{35}$$

$$=\frac{2g(-i\nu^2)^a}{\nu\Gamma(a)\,(u^2-b^2)^a},$$

$$D^{c(+)}_{\text{h.s.}}(\nu; -k^2; -iq)=\lim_{\substack{p^2\to k^2\\ \delta\to 0+}}\left[\frac{k^2+i\delta-p^2}{4k^2i}\right]^{-a}\times \tag{36}$$

$$\times\frac{D^c(\nu; -ip, -k^2-i\delta, -iq)}{\Gamma(1-a)}=\frac{2g(-i\nu^2)^{-a}}{\nu\Gamma(-a)\,(q^2-k^2-i0)^{-a}},$$

$$a=\frac{g}{2b}=\frac{ig}{2k},$$

где формально считается, что при предельном переходе $g=g_1+ig_2$, $g_{1,2}>0$, то не сложно найти обобщение предыдущих результатов. Вместо (18) и (16) из (35) получается выражение

$$F_l^c(b)=\lim_{\rho\to b}\left(\frac{\rho-b}{2bi}\right)^a\frac{F_l^c(\rho,b)}{\Gamma(1+a)}= \tag{37}$$

$$=\int_b^\infty\frac{du\,(b/u)^l}{u^2-b^2}\,\Phi_l^c(u,b).$$

где $\Phi_l^c(u, b)$ дается (27) при $N=3$, $\rho=b$ с заменой

$$\tilde{D}^{(N)}(\nu; b, b^2, u) \to \tilde{D}^c_{\mathrm{h.s.}}(\nu; b^2; u).$$

Взамен (31) возникает новое интегральное представление

$$f_l^c(b,r) = \int_b^\infty du\, \Phi_l^c(u, b)\,(u^2-b^2)^{-1}\chi_l(ur). \tag{38}$$

Его прямая проверка осуществлена в приложении — (П.12). Следует подчеркнуть, что первые равенства (35), (36) и соотношения (37), (38) справедливы и при наличии короткодействующей добавки вида (2а). Для чисто кулоновского потенциала из (35) и (27) можно получить [10]

$$\Phi_l^c(u, b) = e^{-i\pi a/2} g P_l^{-a}\left(\frac{u^2+b^2}{2ub}\right), \tag{39}$$

что дает в (37) с учетом 3.2(28) и 2.1(10) из [12] известную формулу [4]

$$F_l^c(b) = \exp\left[-\frac{i}{2}\pi a\right]\Gamma(l+1)/\Gamma(l+1+a).$$

Интегральные представления для $F_l^c(\rho, -ik)$ и $T_l^{c(+)}(q, k)$ приведены в [10].

Стоит отметить, что процедура аналитического продолжения (28), (29) не коммутирует с операцией предельного перехода в (35), (36) [10]. Аналогичный факт для кулоновской задачи отмечен в [13].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было доказано существование прямой связи (16) между парциальным детерминантом (5) N-мерного сферически-симметричного эллиптического оператора (1), (2) и спектральной плотностью (9) по передаче импульса его резольвенты (8). Возникающая система динамических уравнений при $N=3$ проиллюстрирована на примере потенциала Кулона, где она дает ряд новых интегральных представлений для решений этой задачи.

В работе [10] была также показана ее эффективность при вычислении радиационных смещений атомных уровней. Помимо уменьшения числа диаграмм и отсутствия явно расходящихся выражений, нуждающихся в промежуточной перенормировке, в предлагаемом подходе удается придать физический смысл разбиению сдвига на высоко- и низкочастотный вклады и получить их хорошее приближенное описание в терминах локальных потенциалов типа Юкавы.

Можно показать, что в основных чертах полученные выше соотношения переносятся на квазипотенциальный подход [15], хотя известный произвол в решениях конечно-разностных уравнений приводит здесь к определенным техническим трудностям.

Представления, найденные в разделе 3, могут быть полезными при исследовании связи между одномерной (радиальной) и трехмерной обратными задачами рассеяния для локальных потенциалов [16, 17]. Внеэнергетический вариант введенного в [17] оператора Йоста на единичной сфере в пространстве N измерений имеет вид $\langle\boldsymbol{\omega}|\hat{J}^{(N)}(\rho, b)|\mathbf{v}\rangle = J^{(N)}(\rho, b; c)$,

$$J^{(N)}(\rho, b; \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}) = (\Omega_N\lambda)^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(l+\lambda)C_l^{\lambda}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})F_l^{(N)}(\rho, b), \tag{40}$$

где $\lambda = {}^1/_2N-1$. Представления (27), (25) и формула 19.12(5) из [18] позволяют найти эту сумму по l в замкнутом виде: $c = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})$,

$$J^{(N)}(\rho, b; c) - \delta_{\Omega_N}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \tag{41}$$

$$= \int_m^{\infty} d\nu \int_{\rho+\nu}^{\infty} \frac{\tilde{D}^{(N)}(\nu; \rho, b^2, \alpha)}{(\alpha^2 - b^2)} S^{(N)}(c; \nu, \rho, \alpha)\, d\alpha,$$

где ядро $S^{(N)}$ приведено в (П.14). Необходимый для решения трехмерной обратной задачи оператор Йоста [17] получится здесь при $\rho = b = -ik$, $N = 3$. Представляя полиномы Гегенбауэра в виде суммы N-мерных сферических гармоник [12, 19], нетрудно заметить, что формальный детерминант оператора (40) при $\rho = b$ совпадает с (3). Уравнение (24) приводит к следующему линейному уравнению для оператора (40):

$$\mathbf{R} = \rho\boldsymbol{\omega};\ \mathbf{B} = b\mathbf{v};\ \mathbf{U} = u\mathbf{n};\ \langle\boldsymbol{\omega}|\hat{J}^{(N)}(\rho, b)|\mathbf{v} = I^{(N)}(\mathbf{R}; \mathbf{B}),$$

$$I^{(N)}(\mathbf{R}; \mathbf{B}) = \delta_{\Omega_N}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + \int_{\mathbf{U}^2 > \mathbf{R}^2} \frac{E^{(N)}(\mathbf{U}; \mathbf{R})}{(\mathbf{U}^2 - \mathbf{B}^2)} I^{(N)}(\mathbf{U}; \mathbf{B})\, d^N\mathbf{U}, \tag{42}$$

ядро которого имеет вид

$$E^{(N)}(\mathbf{U}; \mathbf{R}) = u^{1-N}\int_m^{u-\rho} \Sigma^{(N)}(\gamma)\, S^{(N)}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}; \gamma, \rho, u)\, d\gamma. \tag{43}$$

Формулы (41) и (42), (43) позволяют непосредственно исследовать существенное в трехмерной обратной задаче поведение по $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ [17].

Автору приятно поблагодарить Ю. В. Парфенова за внимание к работе и полезные обсуждения, Д. А. Киржница за поддержку и обсуждение результатов и В. М. Музафарова за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вывода (11) необходимо представление интеграла по единичной сфере Ω_N в R_N: $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ – единичные N-мерные векторы, $c = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})$,

$$I^{(N)}(X, Y, c) = \int d\Omega_N(\mathbf{n})\,[X - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]^{-1}[Y - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})]^{-1} \tag{П.1}$$

в спектральном виде относительно c. Его легко найти, выразив $I^{(N)}$ через $I^{(3)}$ при $N \geqslant 3$ [10]. В результате, полагая $a = a_N = (3-N)/2$, $\lambda = {}^1/_2 - a_N = (N-2)/2$,

$$W(X, Y, T) = X^2 + Y^2 + T^2 - 2XYT - 1 = (T - T^+(X, Y))\times \tag{П.2}$$

$$\times(T - T^-(X, Y)), \quad T^{\pm}(X, Y) = XY \pm [(X^2-1)(Y^2-1)]^{1/2},$$

имеем $a = a_N$

$$I^{(N)}(X, Y, c) = \frac{4\pi^{N/2}}{\Gamma(\lambda)}\int_{T^+(X,Y)}^{\infty} \frac{(T^2-1)^a[W(X, Y, T)]^{\lambda-1}}{(T-c)}\, dT. \tag{П.3}$$

Неопределенность при $N = 2$ раскрывается дельта-функцией [11] и дает правильный ответ. Привлекая теоремы сложения и умножения для полиномов Гегенбауэра $C_l^{\lambda}(z)$

из [19],

$$(\text{П.4})\qquad \frac{1}{(T-z)}=\frac{\Gamma(\lambda)e^{-i\pi a}}{(T^2-1)^{a/2}\sqrt{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+2\lambda)C_l^{\lambda}(z)Q_{l-a}^{a}(T),$$

$$(\text{П.5})\qquad \int d\Omega_N(\mathbf{n})C_l^{\lambda}(\omega\cdot\mathbf{n})C_j^{\lambda}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})=\frac{\lambda\Omega_N}{l+\lambda}C_l^{\lambda}(\omega\cdot\mathbf{v})\delta_{l,j},$$

из (П.3) можно получить обобщение формулы умножения для функций Q_j^a

$$(\text{П.6})\qquad \frac{e^{-i\pi a}Q_j^a(X)}{(X^2-1)^{a/2}}\frac{e^{-i\pi a}Q_j^a(Y)}{(Y^2-1)^{a/2}}=\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\int_{T^+(X,Y)}^{\infty}\frac{(T^2-1)^{a/2}e^{-i\pi a}Q_j^a(T)}{[W(X,Y,T)]^{1-\lambda}}dT.$$

Доказанное здесь для дискретных значений $j=l-a$; $l=0, 1, 2,\ldots$, оно продолжается по теореме Карлсона на всю область $\operatorname{Re}(j+a)>-1$. Комбинируя (П.6) с представлением 3.7(31) из [12] и (известным) вариантом (П.6) при $a=0$, можно получить интегральное соотношение, необходимое для прямой проверки равенства (12): $\varphi_a(x,y)=(x-y)^{-a-1}/\Gamma(-a)$,

$$(\text{П.7})\qquad \frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-a)}\int_{T^+(X,Y)}^{\tau}\varphi_a(\tau,T)(T^2-1)^a[W(X,Y,T)]^{-1/2-a}\,dT=$$
$$=\int_{X}^{\xi^-(\tau,Y)}\varphi_a(\xi,X)d\xi\int_{Y}^{\eta^-(\tau,\xi)}\varphi_a(\eta,Y)[W(\xi,\eta,\tau)]^{-1/2}\,d\eta.$$

В другой форме его можно найти в работе [20].

В тексте использованы некоторые следствия формулы умножения функций Лежандра: X.3.6(1) из книги [19] и ее обобщения из статьи [19] (детали см. в [10]). Для произвольных j, l, $G(\alpha)$, $\operatorname{Re} a<1/2$

$$(\text{П.8})\qquad \int_{\rho+\mu}^{u-\gamma}d\alpha P_j^a\left[\frac{u^2+\alpha^2-\gamma^2}{2u\alpha}\right]P_j^a\left[\frac{\rho^2+\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\rho}\right][\Delta(u^2,\alpha^2,\gamma^2)\Delta(\alpha^2,\rho^2,\mu^2)]^{-a/2}G(\alpha)=$$
$$=\int_{\gamma+\mu}^{u-\rho}d\nu P_j^a\left[\frac{u^2+\rho^2-\nu^2}{2u\rho}\right]\frac{2^{2a}\nu^{2a}[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)]^{-a/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-a)\,[\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)]^a}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta G(\alpha(\eta))}{(1-\eta^2)^{a+1/2}},$$
$$2\nu^2\alpha^2(\eta)=\nu^2(u^2+\rho^2+\mu^2+\gamma^2-\nu^2)+(u^2-\rho^2)(\mu^2-\gamma^2)+$$
$$+\eta[\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)]^{1/2},$$
$$\Delta(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz,$$

$$(\text{П.9})\qquad \int_{\rho+\mu}^{u}d\alpha P_l^a\left(\frac{u}{\alpha}\right)P_l^a\left[\frac{\alpha^2+\rho^2-\mu^2}{2\alpha\rho}\right][(u^2-\alpha^2)\Delta(\alpha^2,\rho^2,\mu^2)]^{-a/2}=$$
$$=\int_{\rho}^{u-\mu}d\gamma P_l^a\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)(\gamma^2-\rho^2)^{-a/2}[(u-\gamma)^2-\mu^2]^{-a}\frac{1}{\Gamma(1-a)}.$$

При $\operatorname{Re} a>-1/2$ имеем

$$(\text{П.10})\qquad \int_{b}^{\nu}\frac{du\,(\nu^2-u^2)^{a/2}}{(u^2-b^2)}P_l^{-a}\left(\frac{\nu}{u}\right)P_l^{-a}\left(\frac{u^2+b^2}{2ub}\right)=$$

$$=\int\limits_b^\nu d\gamma\left[\frac{\gamma-b}{\gamma+b}\right]^{a/2}\frac{(\nu-\gamma)^{a-1}}{2b\Gamma(1+a)}P_l^{-a}\left(\frac{\gamma}{b}\right).$$

Комбинируя (П.9) и (П.10) с интегральными представлениями 7.143(1), (2) из [21] для функций Уиттекера $W_{k,\lambda}(z)$, придем соответственно к соотношению (т. к. $\chi_l(z)=W_{0,\,l+1/2}(2z)$), $\operatorname{Re} a<1$,

$$\text{(П.11)}\qquad \frac{\chi_l(\rho r)}{\Gamma(1-a)}\int\limits_\mu^\infty\frac{d\gamma e^{-\gamma r}}{(\gamma^2-\mu^2)^a}=\int\limits_{\rho+\mu}^\infty\frac{du\chi_l(ur)}{[\Delta(u^2,\rho^2,\mu^2)]^{a/2}}P_l^a\left[\frac{u^2+\rho^2-\mu^2}{2u\rho}\right]$$

и представлению (37) для кулоновского решения Йоста

$$\text{(П.12)}\qquad f_l^c(b,r)=e^{-i\pi a/2}W_{-a,l+1/2}(2br)=$$

$$=e^{-i\pi a/2}2ab\int\limits_b^\infty\frac{du\chi_l(ur)}{(u^2-b^2)}P_l^{-a}\left(\frac{u^2+b^2}{2ub}\right),\quad a=\frac{g}{2b}.$$

Соотношение (23) (для локальных V вида (2)) следует из равенства, справедливого при $\operatorname{Re} a<2$, $\operatorname{Re} j>-1$,

$$\text{(П.13)}\qquad \int\limits_{u+\nu}^\infty\frac{d\alpha\left(\dfrac{u}{\alpha}\right)^j}{(\alpha^2+k^2)}\frac{P_j^a\left[\dfrac{u^2+\alpha^2-\nu^2}{2u\alpha}\right]}{[\Delta(\alpha^2,u^2,\nu^2)]^{a/2}}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{d\varkappa^2e^{-i\pi a}\left(\dfrac{\varkappa}{k}\right)^jQ_j^a\left[\dfrac{\varkappa^2+k^2+\nu^2}{2\varkappa k}\right]}{2\pi k(\varkappa^2+u^2)[\Delta(\varkappa^2,k^2,-\nu^2)]^{a/2}}$$

где $j=l-a$. Имея в виду формулы 3.7(29), (31) из [12], его достаточно доказать при $a=0$. Это можно сделать сначала при $|\operatorname{Re} l|<1$, последовательно используя в правой части интегралы от функций Бесселя: 6.612(3), 6.565(4), 6.521(2) из [21], формулу (П.11) при $a=0$, и продолжая затем аналитически по l. Независимая проверка для целых l проведена в [10].

Сумма по l, возникающая в (40), в силу 19.12(5) из [18] сводится к функции $\lambda=(N-2)/2$,

$$\text{(П.14)}\qquad S^{(N)}(c;\gamma,\rho,\alpha)=\frac{\Gamma(\lambda+1)\alpha(\alpha^2-\rho^2)(\alpha\rho)^{\lambda-2}(T_\gamma^2-1)^{\lambda-1/2}}{2^\lambda\pi\Omega_N\Gamma(\lambda+1/2)[W(T_0,T_\gamma,c)]^{(\lambda+1)/2}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda-1}{2};\lambda+\frac{1}{2};\frac{(T_\gamma^2-1)(1-c^2)}{W(T_0,T_\gamma,c)}\right),$$

где F – гипергеометрическая функция [12]. $T_\gamma=(\alpha^2+\rho^2-\gamma^2)/(2\alpha\rho)$; $T_0\Rightarrow T_\nu$ при $\gamma=0$, $c=(\omega\cdot\nu)$. Для всех четных N она вычисляется явно, например

$$S^{(4)}(c;\gamma,\rho,\alpha)=\frac{\alpha(\alpha^2-\rho^2)(T_\gamma^2-1)^{1/2}}{2\pi^3\alpha\rho W(T_0,T_\gamma,c)}.$$

Для нечетных N она выражается через эллиптические интегралы [18].

Литература

[1] *Fubini S., Stroffolini R.* Lecture Trieste, 1962. Theoretical Physics. Vienna: Int. Atom Ener. Agency, 1963. P. 365, 379.
[2] *Де Альфаро В., Редже Т.* Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966.
[3] *t'Hooft G.* // Phys. Rev. 1976. V. D14. P. 3432–3450. *Callan C., Coleman S.* // Phys. Rev. 1977. V. D16. P. 176–178.

[4] *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. *Brown, Fivel, Lee, Sawyer.* // Ann. Phys. 1963. V. 23. P. 187.
[5] *Коренблит С. Э., Парфенов Ю. В.* Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. Вып. 57. Теоретическая физика. М.: Наука, 1981. С. 83–94; 117–122.
[6] *Pasquier J., Pasquier R.* // Nucl. Phys. 1977. V. A277. P. 202–220; Ann. of Phys. 1978. V. 111. P. 269–303.
[7] *Fuda M. G., Whiting J. S.* // Phys. Rev. 1973. V. C8. P. 1225.
[8] *Fuda M. G.* // Phys. Rev. 1976. V. C14. P. 37.
[9] *Орлов И. И., Парфенов Ю. В.* // ТМФ. 1970. Т. 4. № 1. С. 18–21.
[10] *Коренблит С. Э.* Задача о сдвиге уровней в методе внеэнергетических детерминантов Йоста: Препринт 87-16. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР; ЯФ. 1989. Т. 49. Вып. 1. С. 197–204.
[11] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.
[12] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973.
[13] *Переломов А. М., Попов В. С.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 179.
[14] *Van Haeringen H., van Wageningen R.* // J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1441. *Van Haeringen H.* // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1379; 1976. V. 17. P. 997. ***Dusek J.*** // Czech. J. Phys. 1981. V. B31. P. 941–968.
[15] *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2. Вып. 3. С. 635–690.
[16] *Фаддеев Л. Д.* В кн. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 3. С. 93–180.
[17] *Newton R. C.* // J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 594–604.
[18] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
[19] *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. *Durand L., Fishbane P. M., Simmons L. M.* // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 1933.
[20] *Mandelstam S.* // Ann. Phys. 1963. V. 21. P. 302–343.
[21] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Научно-исследовательский институт
прикладной физики
при Иркутском государственном
университете

Поступила в редакцию
21.IV.1988 г.

PARTIAL IOST DETERMINANTS AND SPECTRAL DENSITY OF THE RESOLVENT IN MOMENTUM TRANSFER

Korenblit S. E.

Integral representations for partial Iost determinants and Iost operator on the unit sphere are derived in terms of the spectral density in the momentum transfer of the elliptic operator resolvent in R_N. The connection is found between the spectral densities for the potential $V(r)$ in different dimensions r_N, $N\geqslant 2$. New integral representations for the solutions of the Coulomb problem are obtained.