Введение в тензоры в теории поля

М. Г. Иванов*

10 марта 2011 г.

Аннотация

Данное пособие призвано дать студентам, начинающим изучать стандартный курс теории поля (специальная теория относительности и электродинамика) минимальное введение в тензоры. При этом специальное внимание уделено «переводу» с тензорного языка на матрично-векторный и обратно.

Содержание

* e-mail:mgi@mi.ras.ru

1 Скаляр, (ко)вектор, тензор

Тензор — некоторый объект, несущий верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы, пробегающие D различных значений каждый, и преобразующийся при замене координат определённого класса определённым *линейным* способом (см. формулу (6)), при котором нулевой тензор (все компоненты которого равны нулю) остаётся нулевым в любых координатах. Здесь D — размерность пространства.

Для 4-мерного тензора в 4-мерном пространстве-времени:

$$T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots}, \qquad i,j,\dots,m,n,\dots \in \{0,1,2,3\}. \tag{1}$$

Для 3-мерного тензора в 3-мерном пространстве:

$$T^{\alpha\beta\cdots}{}_{\mu\nu\cdots}, \qquad \alpha,\beta\dots,\mu,\nu,\dots \in \{1,2,3\}. \tag{2}$$

Здесь и далее маленькие латинские индексы будут пробегать значения от 0 до 3, а греческие — от 1 до 3.

Валентность тензора или **ранг тензора** — общее число индексов. Не следует путать *ранг тензора* (число индексов) и *ранг матрицы* (число линейно независимых столбцов/строк). Это разные понятия. Если тензор имеет два индекса, то он имеет ранг (валентность) тензора 2, а ранг соответствующей матрицы может быть любым целым числом от нуля до размерности пространства.

Тензор обобщает понятия скаляра, вектора и матрицы. При этом правила преобразования компонент тензора устроены так, что мы можем конструировать новые тензоры из имеющихся по некоторым простым правилам. Могут использоваться и иные объекты, которые несут индексы, но преобразуются по другим правилам и тензорами не являются.

Общее определение тензора будет дано далее, а пока рассмотрим простейшие частные случаи скаляра, вектора и ковектора.

Заметим, что векторами в разных областях математики называют разные объекты. Как правило, вектором называется элемент линейного пространства, т.е. векторы можно умножать на число и складывать. Наши векторы тоже будут допускать эти операции, т.е. будут элементами некоторого линейного пространства. Элементами некоторого линейного пространства будут и ковекторы, а также любые тензоры определённого типа (с определённым число верхних и нижних индексов). Однако, слово «вектор» далее будет означать не только принадлежность линейному пространству, но и определённый закон преобразования.

Сразу оговорим, что **координаты** будут нести верхний индекс (x^i, или x^α), но набор координат («радиус-вектор») может считаться вектором только если мы ограничиваемся линейными преобразованиями, оставляющими неподвижным начало координат.

радиус-вектор вектором может не быть

Скаляр — тензор без индексов. Он имеет одну компоненту. При замене координат скаляр не преобразуется, т.е. является инвариантом

инвариант $\equiv$ **скаляр**.

Если мы имеем не просто скаляр, а *скалярную функцию* (*скалярное поле*), то при замене координат в каждой точке пространства значение скалярной функции остаётся прежним, но функция может меняться, т.к. изменяются значения координат, которые нумеруют прежние точки:

$$\varphi'(x') = \varphi(x(x')). \tag{3}$$

Здесь $x(x')$ — старые («нештрихованные») координаты, выраженные через новые («штрихованные»). Часто *штрихи удобно ставить не над самими координатами и тензорами, а над индексами.*

Вектор — тензор с одним верхним (контравариантным) индексом. При замене координат вектор преобразуется так же как разность координат между двумя (бесконечноблизкими) точками dx^i. Если мы рассматриваем линейную замену координат, то так же преобразуется и разность координат двух произвольных точек, но в общем случае произвольной замены (переход к криволинейным координатам) разность координат двух точек преобразуется нелинейным образом, а значит не является вектором (который, как частный случай тензора, должен иметь линейный закон преобразования). Вектор можно представить в виде стрелки, соединяющей две бесконечноблизкие точки.

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, dx^i = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, dx^i \quad \text{аналогично для любого вектора} \quad v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, v^i \tag{4}$$

По повторяющимся индексам (в одном члене) подразумевается суммирование («свёртка»)

Ковектор (ковариантный вектор) — тензор с одним нижним (ковариантным) индексом. При замене координат ковектор преобразуется по тем же правилам, что и компоненты градиента. Число компонент ковектора совпадает с число компонент вектора и между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, но ковектор при замене координат преобразуется по-другому.

градиент — ковектор, а не вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{i'}} = \nabla_{i'}\varphi = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \nabla_i\varphi \quad \text{аналогично для любого ковектора} \quad u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, u_i \tag{5}$$

Индекс у производной по координате считается нижним $\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_i$

Из пары повторяющихся в одном члене индексов один должен быть верхним, а другой нижним.

Чтобы убедиться в том, что градиент (а значит и любой ковектор) не является вектором можно сослаться на то, что в случае вектора преобразование записывается через прямую матрицу Якоби, а для ковектора — через обратную. Это можно объяснить и «на пальцах». Вектор можно представить как стрелку. Градиент — стрелка, направленная в направлении скорейшего роста функции и имеющая длину равную производной вдоль этого направления. Для того, чтобы выбрать направление наискорейшего роста, нам необходимо сравнивать расстояния в разных направлениях (чтобы определить где «следующая» поверхность уровня ближе подходит к рассматриваемой точке). Однако, правила вычисления расстояния в различных системах координат могут быть различны. Таким образом, для представления градиента (ковектора) в виде стрелки (вектора) нам нужно знать правила вычисления расстояний (метрику). Немного другими словами: вектор градиента должен быть перпендикулярен поверхности уровня, а для определения перпендикулярности нам нужно скалярное произведение (метрика).

Тензор при замене координат преобразуется так же как произведение векторов и ковекторов с соответствующим набором индексов. Например тензор $T^i{}_{jk}$ преобразуется как произведение одного вектора и двух ковекторов $v^i\, u_j\, w_k$:

$$T^{i'}{}_{j'k'} = T^i{}_{jk}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}. \tag{6}$$

Правило для преобразования тензоров произвольного ранга легко записать, если помнить, что все старые индексы тензора должны быть свёрнуты с индексами прямых и обратных матриц Якоби, причём верхние индексы должны сворачиваться с нижними.

Правила преобразования тензоров устроены таким образом, что произведение компонент нескольких тензоров (тензорное умножение) даёт компоненты нового тензора, а любая правильная свёртка (верхнего индекса с нижним) превращает тензор в новый тензор (с меньшим числом индексов).

$$T^{ij\cdots}{}_{kl\cdots}S^{mn\cdots}{}_{op\cdots} = R^{ij\cdots}{}_{kl\cdots}{}^{mn\cdots}{}_{op\cdots} \qquad \text{— тензорное умножение} \tag{7}$$

$$R^{\cdots imj\cdots}{}_{\cdots kml\cdots} = \sum_{m=0}^{3} R^{\cdots imj\cdots}{}_{\cdots kml\cdots} = P^{\cdots ij\cdots}{}_{\cdots kl\cdots} \qquad \text{— свёртка} \tag{8}$$

Можно легко установить следующий **признак тензора**: *если при сворачивании некоторого объекта с произвольным вектором (ковектором) получается тензор с соответствующим набором индексов, то и исходный объект тоже был тензором.*

Для доказательса признака тензора можно использовать то, что свёртка вектора и ковектора даёт тензор без индексов, т.е. скаляром. Это легко увидеть на примере свёртки бесконечно-малого приращения координат между двумя фиксированными точками (вектора) и градиента (ковектора)

$$dx^i\,\nabla_i\varphi = dx^i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = d\varphi. \tag{9}$$

Поскольку дифференциал скалярной функции (разность значений φ для двух близких точек) не зависит от системы координат, данная свёртка оказывается инвариантом (скаляром). Поскольку все другие векторы и ковекторы преобразуются аналогично dx^i и $\nabla_i\varphi$, то и свёртка произвольного вектора с произвольным ковектором окажется скаляром.

Покажем, что δ-символ (символ Кронекера) с одним верхним и одним нижним индексом является тензором. Символ Кронекера определяется через компоненты единичной матрицы:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{10}$$

Если свернуть δ-символ с произвольным вектором, то в сумме выживает только член с $i = j$:

$$v^j\,\delta^i_j = \sum_{j=0}^{3} v^j\,\delta^i_j = v^j\,\delta^i_j\big|_{i=j} = v^i. \tag{11}$$

Таким образом, для произвольного вектора v^j свёртка с δ-символом снова дала тензор (вектор v^i), а значит, по признаку тензора, δ-символ — тензор (это можно проверить и напрямую, убедившись, что правило преобразования тензора с одним верхним и одним нижним символом показывают, что δ-символ переходит в себя при любых преобразованиях координат).

Воспользовавшись δ-символом и правилами дифференцирования сложных функций ещё раз продемонстрируем, что свёртка вектора и ковектора является инвариантом (скаляром):

$$u_{i'}v^{i'} = u_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i = u_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} v^i = u_j \, \delta^j_i \, v^i = u_i \, v^i. \tag{12}$$

2 Баланс индексов

При работе с тензорными индексами следует соблюдать **баланс индексов**:

- в каждом слагаемом индекс может встречаться один или два раза;
- если индекс встречается в слагаемом один раз (свободный индекс), то
  - слагаемое зависит от значения этого индекса,
  - мы можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - все члены, с которыми слагаемое складывается, вычитается или приравнивается, должны содержать этот индекс тоже один раз в том же (верхнем или нижнем) положении,
  - мы можем переименовать этот индекс, если одновременно таким же образом переименуем этот индекс во всех членах, с которыми данное слагаемое складывается, вычитается или приравнивается;
- если индекс встречается в слагаемом два раза (немой индекс), то
  - один раз он должен быть верхним, а другой раз — нижним,
  - по нему проводится свёртка,
  - мы не можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - мы можем переименовать этот индекс произвольным образом, но так, чтобы новое имя индекса не совпадало с именами других индексов того же слагаемого;
- мы можем не различать верхние и нижние индексы, *только если* ограничиваем себя рассмотрением преобразований, для которых матрица Якоби $(\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k})$ ортогональна, т.е.

$$\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k}\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}\delta_{k'm'} = \delta_{km} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial X'}{\partial X} \in \mathrm{O}(n);$$

- мы должны различать индексы, относящиеся к разным системам координат (штрихованные и нештрихованные);
- если вы подставляете какое-то выражение с индексами в формулу, то часто бывает *необходимо* переименовать некоторые индексы:
  - индексы, встречающиеся один раз, бывает нужно переименовать, чтобы они соответствовали индексам в формуле, в которую вы подставляете выражение;
  - индексы, встречающиеся два раза, бывает нужно переименовать, чтобы они не совпадали с индексами, уже имеющимися в члене, в который вы подставляете выражение.

Приведённые выше правила обращения с индексами тривиальны, но часто недостаточно чётко осознаются начинающими, что приводит к ошибкам, которых можно было бы легко избежать. Проиллюстрируем это конкретным примером. Повторим доказательство того, что свёртка $u_i v^i$ ковектора u и вектора v является скаляром, обращая при этом внимание на применение правил баланса индексов и возможные ошибки. При замене координат компоненты u и v преобразуются следующим образом:

$$u_{k'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{k'}}, \qquad v^{m'} = \frac{\partial X^{m'}}{\partial X^j} v^j.$$

Чтобы подставить компоненты u и v в штрихованных координатах в выражение $u_{i'} v^{i'}$, сначала следует переименовать в исходных выражениях свободные индексы k' и m' в i':

$$u_{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}}, \qquad v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^j} v^j.$$

Если мы подставим в свёртку эти выражения, то индекс j войдёт в один член четыре раза (*эту ошибку поначалу допускает большинство студентов*), поэтому перед подстановкой надо переименовать индекс j в одном из выражений, например, в выражении для $v^{i'}$ заменим j на k и получим $v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k$.
Теперь подставим $u_{i'}$ и $v^{i'}$ в исходное выражение:

$$u_{i'} v^{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}} \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k = u_j \delta^j_k v^k = u_j v^j = u_i v^i.$$

(В самом конце цепочки равенств мы переименовали немой индекс j в i просто «для красоты».)

3 Матрицы и тензоры

Тензор с одним индексом может быть представлен в виде строки или столбца. Тензор с двумя индексами может быть представлен в виде квадратной матрицы. При такой записи мы должны помнить, какие индексы тензора были сверху, а какие снизу. Т.е. столбцы, строки и квадратные матрицы могут быть «разных сортов». Мы можем, например, считать, что строка — ковектор, а столбец — вектор, но для матриц надо различать по крайней мере три случая: два верхних индекса, два нижних индекса, один верхний индекс и один нижний. На самом деле такое различие по сортам имело место уже в обычной линейной алгебре, где мы различали матрицы линейных преобразований (один верхний индекс и один нижний) и матрицы квадратичных форм (оба индекса нижние).

3.1 Правила перевода

Для перевода с матричного на тензорный язык и обратно будем считать, что

- **первый индекс нумерует строки, а второй индекс нумерует столбцы**,
- если есть верхний и нижний индексы, то верхний, как правило, — первый.

Из этого следует, что

- транспонирование — перестановка индексов,

- умножение матриц — свёртка второго индекса первой матрица со первым индексом второй,
- след матрицы — свёртка первого индекса со вторым.
- столбец — тензор у которого есть первый индекс, но нет второго,
- строка — тензор у которого есть второй индекс, но нет первого,

В качестве примеров приведём следующие формулы (не различая верхние и нижние индексы)

$$\begin{aligned}
&(A^T)_{ij} = A_{ji},\\
&(AB)_{ik} = A_{ij}B_{jk},\\
&(ABCD)_{im} = A_{ij}B_{jk}C_{kl}D_{lm},\\
&\mathrm{tr}A = A_{ii},\\
&\mathrm{tr}(ABCD) = A_{ij}B_{jk}C_{kl}D_{li},\\
&(A\mathbf{a})_{i\bullet} = A_{ij}a_{j\bullet},\\
&(\mathbf{a}^T A)_{\bullet j} = a_{\bullet i}A_{ij}.
\end{aligned}$$

Здесь у столбца/строки второй/первый отсутствующий индекс обозначен точкой. Вектор считается столбцом, транспонированный вектор — строкой. Мы не различали верхние и нижние индексы, но это различие может быть существенно, т.к. если мы будем сворачивать верхние индексы или нижние с нижними, то получившийся объект может не быть тензором. Также переставлять (транспонировать) можно только индексы одного типа.

Следует обратить внимание, что **при тензорной записи порядок сомножителей не играет никакой роли**. Та информация, которая на матричном языке «шифровалась» в порядке сомножителей, транспонировании и взятии следов на тензорном языке «шифруется» тем, какие индексы с какими сворачиваются.

Тензорный язык предоставляет большие возможности чем матричный т.к. на матричном языке запись тензоров несущих три и более индексов оказывается затруднённой. При этом тензорный язык предохраняет от некоторых ошибок, например, бессмысленно умножать друг на друга матрицы двух квадратичных форм, поскольку результат будет зависеть от системы координат. В тензорных обозначениях этот запрет выполняется автоматически, т.к. при таком умножении пришлось бы сворачивать два нижних индекса, что недопустимо.

3.2 Некоторые правила преобразований

Запишем теперь правила преобразования для некоторых типов тензоров на матричном языке (эти правила уже известны нам из линейной алгебры). Введём обозначения для прямой и обратной матриц Якоби:

$$\Lambda^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad (\Lambda^{-1})^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

При этом **будем считать верхний индекс первым**. Законы преобразования для вектора и ковектора в тензорных и матричных обозначениях имеют вид (мы считаем вектор столбцом, а ковектор строкой)

$$
\begin{array}{llll}
v^{i'\bullet} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, v^{i\bullet} & \Leftrightarrow & \mathbf{v}' = \Lambda \mathbf{v}, & \\
u_{\bullet i'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\, u_{\bullet i} & \Leftrightarrow & (\mathbf{u}')^T = (\Lambda^{-1})^T \mathbf{u}^T, & \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}\Lambda^{-1}.
\end{array}
$$

Для удобства сравнения матричный закон преобразования ковектора мы выписали в двух эквивалентных формах: для строки $\mathbf{u}$ и для столбца $\mathbf{u}^T$. Мы видим, что закон преобразования для векторов и ковекторов (т.е. для столбцов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}^T$) совпадает тогда и только тогда, когда

$$(\Lambda^{-1})^T = \Lambda,$$

т.е. когда матрица преобразования ортогональна.

Матрицы линейного преобразования векторов имеет один нижний индекс (он сворачивается с верхним индексом вектора) и один верхний. Преобразование действует на вектор следующим образом: $A^i_j v^j$. Закон преобразования такой матрицы имеет вид:

$$A^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, A^i_j\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \qquad \Leftrightarrow \qquad A' = \Lambda A \Lambda^{-1}. \tag{13}$$

Матрицы квадратичной формы на векторах имеет два нижних индекса (они сворачивается с верхними индексами векторов). Форма действует на векторах следующим образом: $G_{ij} v^i u^j = \mathbf{v}^T G \mathbf{u}$. Закон преобразования такой матрицы имеет вид:

$$G_{i'j'} = G_{ij}\, \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = G_{ij}\, (\Lambda^{-1})^i_{i'}\, (\Lambda^{-1})^j_{j'} \qquad \Leftrightarrow \qquad G' = (\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1}. \tag{14}$$

Правило преобразования переписывается на матричном языке путём следующих рассуждений:

1. i' — 1-й индекс матрицы G', значит он должен быть 1-м индексом первого множителя в правой части равенства. В правой части индекс i' встречается в качестве нижнего (второго) индекса обратной матрицы Якоби Λ^{-1}. Чтобы поменять порядок индексов матрицу надо транспонировать. Значит первый множитель — $(\Lambda^{-1})^T$.

2. 2-й индекс 1-го множителя — i, значит i должен быть первым индексом второго множителя. Вторым множителем оказывается G.

3. 2-й индекс 2-го множителя — j, значит j должен быть первым индексом третьего множителя. Третьим множителем оказывается Λ^{-1}.

4 Метрика

Если мы хотим определить способ превращать вектора в ковектора с помощью свёртки нам нужен **метрический тензор** g_{ij} (*метрика*) с двумя нижними индексами: один нижний индекс будет сворачиваться с верхним индексом вектора, а второй другой остаётся свободным

$$v_i = g_{ij}\, v^j. \tag{15}$$

Ковектор, полученный из вектора принято обозначать той же буквой, которой обозначен исходный вектор, поскольку тем самым определяется взаимно-однозначное соответствие между векторами и ковекторами. Таким образом вектор и соответствующий ему ковектор можно рассматривать как различные представления одного объекта.

На метрический тензор g_{ij} накладываются условия симметричности

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{16}$$

(чтобы определённое с его помощью скалярное произведение было симметричным) и невырожденности

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \tag{17}$$

(чтобы можно было производить не только опускание, но и поднимание индексов).

Обратная метрика задаётся матрицей обратной к метрике, она несёт два верхних индекса, т.е.

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k. \tag{18}$$

То, что обратная метрика действительно является тензором с двумя верхними индексами легко проверить с помощью определения тензора или признака тензора.

С помощью метрики (и соответствующей ей обратной метрики) мы можем определить скалярное произведение вектора на вектора на вектор, или ковектора на ковектор. (Для определения произведения вектора на ковектор метрика не нужна, достаточно обычной свёртки.)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^i b_i = a_i b^i = a^i b^j g_{ij} = a_i b_j g^{ij}. \tag{19}$$

Скалярный квадрат вектора dx^i задаёт квадрат расстояния (интервала) между двумя бесконечноблизкими точками

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{20}$$

задавая тем самым первую квадратичную форму. Запись метрики через расстояние между двумя точками, которое является инвариантом (скаляром) часто оказывается очень удобной.

4.1 Метрика Минковского

Рассмотрим важный для теории поля случай метрики Минковского. Прямая и обратная метрика Минковского может быть записана как матрица

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

или как квадратичная форма

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{22}$$

(Здесь и далее скорость света — единичная скорость $c = 1$.) В координатах (t, x, y, z) опускание индекса у вектора $A^i = (A^t, A^x, A^y, A^z)$ даёт ковектор $A_i = (A_t, A_x, A_y, A_z) = (A^t, -A^x, -A^y, -A^z)$.

Скалярное произведение двух 4-векторов при использовании стандартной формы метрики Минковского может быть представлено как

$$\begin{aligned}(\underline{A},\underline{B}) &= A^i B_i = A_i B^i = A^i B^j g_{ij} = A_i B_j g^{ij} = \\ &= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.\end{aligned}$$

Обратите внимание, что минусы возникают не во всех формах записи, а только там, где надо поднимать/опускать индекс с помощью метрики. При записи, когда один вектор с верхним индексом, а другой с нижним надо просто просуммировать произведения компонент. (*Лишние минусу в таком случае представляют собой достаточно распространённую ошибку.*)

Мы легко можем переписать метрику в новых координатах выразив в них интервал, например:

$$\begin{aligned}&u = t + x, \qquad v = t - v, \\ &ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dt + dx)(dt - dx) - dy^2 - dz^2 = du\,dv - dy^2 - dz^2.\end{aligned}$$

Таким образом, прямая и обратная метрика Минковского в координатах (u, v, y, z) представляются как

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g^{i'j'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В новых координатах опускание индекса у вектора $A^{i'} = (A^u, A^v, A^y, A^z)$ даёт ковектор $A_{i'} = (A_u, A_v, A_y, A_z) = (\frac{1}{2}A^v, \frac{1}{2}A^u, -A^y, -A^z)$.

4.2 Евклидова метрика

В случае, если метрика задаётся единичной матрицей

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{24}$$

поднимание/опускание индекса не приводит к изменению компонент тензора. Это соответствует декартовым координатам. Переход между различными декартовыми координатами осуществляется с помощью линейных ортогональных преобразований. В таком случае мы можем не различать верхние и нижние индексы. В физике этот случай встречается нам при рассмотрении трёхмерного евклидового пространства (сечения $t = \text{const}$ 4-мерного пространства-времени Минковского).

5 Антисимметричные тензоры

5.1 3-мерный полностью антисимметричный символ

5.1.1 Определитель и объём

Попробуем записать в виде свёртки определитель матрицы, составленной из компонент векторов (каждая строка — вектор). Для начала рассмотрим трёхмерный случай.

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\det A = \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha} e_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma \tag{26}$$

Здесь $e_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1$, $+1$ соответствует тому, что α, β, γ образуют чётную перестановку $1, 2, 3$, а -1 соответствует нечётным перестановкам. Доопределим $e_{\alpha\beta\gamma}$ нулём на случай повторяющихся индексов. Это позволяет распространить сумму (26) на все возможные комбинации индексов и записать её в виде свёртки:

$$\det A = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} e_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma \tag{27}$$

Данный определитель задаёт объём параллелепипеда натянутого на три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Как мы знаем из математического анализа, объём остаётся инвариантным для преобразований координат с единичным якобианом. Если мы ограничиваемся такими преобразованиями, то $\det A$ — инвариант (скаляр) для любой тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Воспользовавшись признаком тензора мы можем заключить, что $e_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор, относительно преобразований, с единичным якобианом. Заметим, что в число таких преобразований попадают повороты и преобразования Лоренца.

Объём натянутого на 3 вектора параллелепипеда соответствует смешанному произведению

$$\det A = e_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}\times\mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}\times\mathbf{b}], \mathbf{c}). \tag{28}$$

Мы можем определить векторное произведение так, чтобы оно давало смешанное произведение при скалярном умножении на третий множитель:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}^\alpha\, e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta b^\gamma, \tag{29}$$

или

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta b^\gamma. \tag{30}$$

5.1.2 Произведение двух антисимметричных символов

«Легко видеть», что произведение двух антисимметричных символов может быть записано следующим образом:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\lambda} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\lambda} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\lambda} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\lambda} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Чтобы увидеть, что эта формула и в самом деле очевидна рассмотрим, что она даёт при каких-то фиксированных значениях $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \lambda$. Левая часть выражения, в силу антисимметрии символов e, отлична от нуля тогда и только тогда, когда тройки α, β, γ и μ, ν, λ состоят из трёх разных индексов. Правая часть обладает той же антисимметрией, т.к. перестановка пары индексов из набора α, β, γ соответствует перестановке строк определителя, а перестановке пары индексов из набора μ, ν, λ соответствует перестановке столбцов. При этом левая часть даёт $+1$, когда тройка μ, ν, λ получается из тройки α, β, γ чётной перестановкой, и -1 — для нечётных перестановок. Таким образом, достаточно проверить равенство для одного набора индексов (без повторений в тройках), например

$$e_{123}e_{123} = \det \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$
$$e_{321}e_{312} = \det \begin{pmatrix} \delta_{33} & \delta_{31} & \delta_{32} \\ \delta_{23} & \delta_{21} & \delta_{22} \\ \delta_{13} & \delta_{11} & \delta_{12} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Мы видим, что при раскрытии такого определителя получается не $3! = 6$ членов, а только один, равный ± 1, в зависимости от чётности перестановки.

Рассмотрим также свёртки следующего вида:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}, \qquad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma}, \qquad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}.$$

Поскольку мы сворачиваем пары нижних индексов предполагается, что тензоры записаны в декартовых координатах. Однако, выкладки легко обобщаются на случай произвольной метрики путём замены $\delta_{\alpha\beta}$ на g_{ij}.

Понятно, что данные свёртки можно легко получить раскрыв определитель, через который записано произведение $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\lambda}$, однако для больших размерностей пространства D этот способ оказывается затруднён тем, что определитель содержит $D!$ членов.

Первая свёртка легко вычисляется если учесть, что она соответствует сумме квадратов всех элементов тензора:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} (e_{\alpha\beta\gamma})^2 = \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha} (\pm 1)^2 = 3! = 6. \tag{32}$$

Вторая свёртка задаёт тензор с двумя свободными индексами α и μ. Поскольку псевдотензор $e_{\alpha\beta\gamma}$ инвариантен относительно поворотов свёртка $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma}$ также должна быть тензором инвариантным при поворотах. Однако, единственный тензор с двумя индексами (матрица) инвариантный при поворотах — единичная матрица умноженная на скаляр:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = c\delta_{\alpha\mu}.$$

Чтобы определить константу c свернём пару индексов α, μ, сведя задачу к предыдущей:

$$6 = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = c\delta_{\alpha\alpha} = 3c \qquad \Rightarrow \qquad c = 2$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}. \tag{33}$$

Третья свёртка задаёт тензор с четырьмя свободными индексами α, β, μ, ν. Этот тензор также инвариантен при поворотах, он меняет знак при перестановке индексов α, β и при перестановке индексов μ, ν. При перестановке пары индексов α, β

с парой μ, ν тензор переходит в себя. При этом тензор должен конструироваться из δ-символов (это можно доказать из симметрии относительно поворотов, но проще сослаться на то, что произведение $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\lambda}$ расписывается через δ-символы, а проводимая с этим произведением свёртка не может породить ничего кроме комбинации δ-символов и числовых множителей). Это позволяет записать ответ с точностью до числового множителя:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = c'(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}).$$

Чтобы опередить константу c' свернём индексы β и ν, сведя задачу к предыдущей:

$$2\delta_{\alpha\mu} = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = c'(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\mu}) = c'(\delta_{\alpha\mu}3 - \delta_{\alpha\mu}) = c'\,2\delta_{\alpha\mu} \qquad \Rightarrow \qquad c' = 1.$$

Таким образом,

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}. \tag{34}$$

Данная формула полезна при многих вычислениях использующих векторные произведения и роторы. По существу она соответствует формуле «бац-минус-цаб» для двойного векторного произведения:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta e_{\gamma\mu\nu}b_\mu c_\nu = \\
&= e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}a_\beta b_\mu c_\nu = (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})a_\beta b_\mu c_\nu = \\
&= a_\nu b_\alpha c_\nu - a_\mu b_\mu c_\alpha = b_\alpha(\mathbf{a},\mathbf{c}) - c_\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}))_\alpha.
\end{aligned}$$

5.2 Антисимметричные тензоры и определители

Выше мы рассмотрели определитель матрицы составленной из 3-х векторов. Он оказался инвариантом для преобразований с единичным якобианом. Если записать формулу для определителя через компоненты матрицы, то получившаяся формула будет соответствовать не скаляру, а компоненту 1,2,3 некоторого тензора

$$\begin{aligned}
&\det A = e_{\alpha\beta\gamma}A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma} = T_{123}, \\
&T_{\mu\nu\lambda} = e_{\alpha\beta\gamma}A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}A_{\lambda\gamma}.
\end{aligned}$$

Тензор $T_{\mu\nu\lambda}$ полностью антисимметричен, т.е. он меняет знак при перестановки любых двух индексов. Из-за антисимметрии $T_{\mu\nu\lambda}$ полностью определяется одной своей компонентой T_{123}. Все остальные компоненты или равны нулю, или получаются из этой перестановкой индексов. Таким образом,

$$T_{\mu\nu\lambda} = e_{\alpha\beta\gamma}A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}A_{\lambda\gamma} = e_{\mu\nu\lambda}\,T_{123} = e_{\mu\nu\lambda}\,\det A. \tag{35}$$

Свернув тензор $T_{\mu\nu\lambda}$ с $e_{\mu\nu\lambda}$ мы можем, воспользовавшись формулой (32) выписать определитель через свёртки

$$\det A = \frac{1}{6}T_{\mu\nu\lambda}e_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3!}\,e_{\mu\nu\lambda}e_{\alpha\beta\gamma}\,A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}A_{\lambda\gamma}. \tag{36}$$

5.3 4-мерный полностью антисимметричный символ

4-мерный полностью антисимметричный символ несёт 4 индекса и полностью определяется компонентой e_{0123}. Принято выбирать $e_{0123} = -1$. (Тогда в метрике Минковского $e^{0123} = +1$.) Аналогично 3-мерному случаю мы можем записать произведение и свёртки двух антисимметричных символов через δ-символы:

$$e^{ijkl}e_{mnop} = -\det\begin{pmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_o & \delta^i_p \\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_o & \delta^j_p \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_o & \delta^k_p \\ \delta^l_m & \delta^l_n & \delta^l_o & \delta^l_p \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$e^{ijkl}e_{ijkl} = -4!, \quad e^{ijkl}e_{mjkl} = -3!\,\delta^i_m, \quad e^{ijkl}e_{mnkl} = -2!(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m), \tag{38}$$

$$e^{ijkl}e_{mnol} = -(\delta^i_m\delta^j_n\delta^k_o + \delta^i_n\delta^j_o\delta^k_m + \delta^i_o\delta^j_m\delta^k_n - \delta^i_m\delta^j_o\delta^k_n - \delta^i_n\delta^j_m\delta^k_o - \delta^i_o\delta^j_n\delta^k_m). \tag{39}$$

5.4 Дуальность антисимметричных тензоров

Из данного раздела минимально необходимым для изучения курса теории поля является определение дуальности для антисимметричного тензора с двумя индексами в 4-мерном пространстве.

Полностью антисимметричный тензор (меняющий знак при перестановки любых двух индексов) с q индексами в D-мерном пространстве может иметь не более чем $\frac{D!}{(D-q)!}$ ненулевых компонент (все компоненты с повторяющимися индексами равны нулю в силу антисимметрии, если $q > D$, то все компоненты антисимметричного тензора равны нулю). Из этих компонент не более чем $C^q_D = \frac{D!}{q!\,(D-q)!}$, т.к. компоненты нумеруемые одинаковыми наборами индексов, расположенных в разном порядке совпадают с точностью до знака. C^q_D — число способов, которыми можно выбрать q разных индексов из D возможных значений (без учёта порядка следования индексов). Поскольку $C^q_D = C^{D-q}_D = \frac{D!}{q!\,(D-q)!}$ оказывается, что число независимых компонент для антисимметричного тензора с q индексами и антисимметричного тензора с $D-q$ индексами совпадает. Это позволяет установить между такими тензорами взаимнооднозначное соответствие. При этом соответствии компонента нумеруемая определённым набором из q индексов отображается в компоненту, нумеруемую $D-q$ индексами, которые в первоначальный набор не входили. Например, дуальность устанавливает взаимнооднозначное соответствие между антисимметричными матрицами 3×3 и 3-мерными векторами (это соответствие хорошо известно из механики).

Дуальность определяется с помощью свёртки всех индексов исходного тензора с индексами полностью антисимметричного тензора.

В 3-мерном случае:

$$(\tilde{\varphi})_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{0!}\,\varphi\, e_{\alpha\beta\gamma}, \tag{40}$$

$$(\tilde{\mathbf{a}})_{\beta\gamma} = \frac{1}{1!}\,a_\alpha\, e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$(\tilde{M})_\gamma = \frac{1}{2!}\,M_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\alpha<\beta} M_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta\gamma}, \tag{42}$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{3!}\,T_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} = T_{123}\, e_{123} = T_{123}. \tag{43}$$

В случае, когда сворачивается q пар индексов антисимметричных тензоров, каждый член суммы повторяется $q!$ раз (с разным упорядочением индексов), поэтому для тех случаев, когда сворачивается более одной пары индексов, мы привели более удобные для расчётов формулы, в которых суммирование ведётся только по упорядоченным наборам индексов, в результате чего исчезает повтор одинаковых членов в сумме.

В трёхмерном случае (евклидова метрика) дважды дуальный антисимметричный тензор совпадает с исходным $\tilde{\tilde{A}} = A$.

В 4-мерном случае аналогично:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{f})_{ijkl} &= \frac{1}{0!}\, f\, e_{ijkl}, && (44)\\
(\tilde{A})_{jkl} &= \frac{1}{1!}\, A^i\, e_{ijkl}, && (45)\\
(\tilde{F})_{kl} &= \frac{1}{2!}\, F^{ij}\, e_{ijkl} = \sum_{i<j} F^{ij}\, e_{ijkl}, && (46)\\
(\tilde{T})_{k} &= \frac{1}{3!}\, T^{ijk}\, e_{ijkl} = \sum_{i<j<k} T^{ijk}\, e_{ijkl}, && (47)\\
\tilde{K} &= \frac{1}{4!}\, K^{ijkl}\, e_{ijkl} = K^{0123}\, e_{0123} = -K^{0123} = K_{0123}. && (48)
\end{aligned}
$$

В 4-мерном случае (метрика Минковского) дважды дуальный антисимметричный тензор совпадает с исходным с точностью до знака $\tilde{\tilde{B}} = -(-1)^{q(D-q)}B$.

6 Набла

Остановимся подробнее на дифференциальном операторе набла. Формула

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{49}$$

справедлива для случая, когда оператор действует на скаляр, либо когда метрика не зависит от координат, т.е. когда координаты не являются криволинейными (хотя могут быть косоугольными). Для криволинейный координат эта формула справедлива только для скаляров, т.к. для тензоров других типов в криволинейных координатах базис зависит от точки и дифференцировать надо не только компоненты тензора, но и базис.

Оператор набла несёт нижний (ковариантный) индекс, однако этот индекс можно поднять

$$\nabla^i = g^{ij}\nabla_j. \tag{50}$$

Для метрического тензора не зависящего от координат можно ввести координаты с нижним (ковариантным) индексом и определить через них оператор набла с верхним (контравариантным) индексом

$$\nabla^i = g^{ij}\nabla_j = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x_i = g_{ij}x^j, \qquad g_{ij} = \text{const}. \tag{51}$$

Однако, введения координат с ковариантными индексами лучше избегать.

Для декартовых координат в евклидовом пространстве мы можем, как уже упоминалось ранее, не различать верхние и нижние индексы.

6.1 3-мерный оператор набла

Рассмотрим некоторые примеры использования оператора набла в декартовых координатах 3-мерном евклидовом пространстве, т.е. в случае, когда метрический тензор задаётся δ-символом $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, и мы можем не различать верхние и нижние индексы.

Заметим, что, поскольку, вся та информация, которая ранее «шифровалась» в порядке сомножителей теперь «шифруется» в индексах мы можем располагать множители в произвольном порядке. Это, в частности, позволяет располагать операторы набла так, чтобы все функции, на которые действует данный оператор были справа от него (тем самым отпадает необходимость в стрелочках, указывающих на какие функции действует данный оператор).

С использованием оператора ∇ мы можем легко записать стандартные дифференциальные операторы векторного анализа:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\alpha = \nabla_\alpha\varphi, \tag{52}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{a} = (\vec{\nabla}, \mathbf{a}) = \nabla_\alpha a_\alpha, \tag{53}$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_\alpha = [\vec{\nabla}\times\mathbf{a}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma, \tag{54}$$
$$\triangle\varphi = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi = \nabla_\alpha\nabla_\alpha\varphi \tag{55}$$

Основными для нас будут формулы дифференцирования сложных функций и следующие очевидные формулы:

$$\begin{array}{cc} \nabla_\alpha x_\beta = \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, & \nabla_\alpha r = n_\alpha = \dfrac{x_\alpha}{r}, \qquad \delta_{\alpha\alpha} = 3, \\ \delta_{\alpha\beta} T_{\dots\mu\beta\nu\dots} = T_{\dots\mu\alpha\nu\dots}, & e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_\alpha b_\alpha = \delta_{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta, & [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma. \end{array}$$

Из приведённого набора, докажем формулу для $\nabla_\alpha r$ (остальные формулы либо уже доказаны, либо очевидны без доказательства).

$$(\operatorname{grad} r)_\alpha = \nabla_\alpha r = \nabla_\alpha\sqrt{x_\beta x_\beta} = \frac{1}{2\sqrt{x_\beta x_\beta}}\,\nabla_\alpha(x_\beta x_\beta) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x_\beta x_\beta}}\,2x_\beta\,\nabla_\alpha x_\beta = \frac{1}{\sqrt{x_\beta x_\beta}}\,x_\beta\,\delta_{\alpha\beta} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{x_\beta x_\beta}} = \frac{x_\alpha}{r} = n_\alpha.$$

Ту же формулу можно доказать устно, если вспомнить, что градиент — вектор в направлении наискорейшего роста функции, длина которого соответствует производной в этом направлении. Очевидно, для r направление насикорейшего роста — наружу по радиусу. При этом произвольная от r по радиусу равна 1, следовательно $\operatorname{grad} r$ — единичный вектор направленный по радиусу $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

В качестве примера докажем магнитостатическую формулу для энергии системы токов (через плотность тока и вектор-потенциал). В магнитостатике все величины не зависят от времени. Магнитная энергия может быть записана

$$\mathcal{E}_{magn.} = \int\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\,d^3x = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{H}, \mathbf{H})\,d^3x = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{A})\,d^3x$$

Далее надо извлечь вектор-потенциал A из под ротора

$$(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{A}) = H_\alpha\,(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\alpha = H_\alpha\,e_{\alpha\beta\gamma}\,\nabla_\beta A_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}\,(\nabla_\beta A_\gamma H_\alpha - A_\gamma\,\nabla_\beta H_\alpha) =$$
$$= \nabla_\beta(e_{\beta\gamma\alpha}A_\gamma H_\alpha) + A_\gamma\,(e_{\gamma\beta\alpha}\,\nabla_\beta H_\alpha) = \operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{H}] + (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

$\operatorname{rot}\mathbf{H}$ распишем через соответствующее уравнение Максвелла (напомним, $c = 1$, поля от времени не зависят)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j} = 4\pi\mathbf{j}.$$

Таким образом

$$\mathcal{E}_{magn.} = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{H}]\,d^3x + \frac{1}{2}\int(\mathbf{A},\mathbf{j})\,d^3x = \frac{1}{8\pi}\int[\mathbf{A}\times\mathbf{H}]\,d\mathbf{s} + \frac{1}{2}\int(\mathbf{A},\mathbf{j})\,d^3x.$$

Интеграл от дивергенции переписывается через поток сквозь границу области интегрирования, когда область интегрирования расширяется на всё пространство этот интеграл стремится к нулю (в предположении, что все поля создаются токами, текущими в ограниченной области пространства). Окончательно получаем аналог широко известной электростатической формулы $\mathcal{E}_{el.} = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,d^3x$

$$\mathcal{E}_{magn.} = \frac{1}{2}\int(\mathbf{A},\mathbf{j})\,d^3x.$$

В качестве другого примера получим поле магнитного диполя из известного вектор-потенциала[1] $A = \frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]}{r^2}$.

$$\begin{aligned}
H_\alpha = (\operatorname{rot}\mathbf{A})_\alpha &= \left(\operatorname{rot}\frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{r}]}{r^3}\right)_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}e_{\gamma\mu\nu}m_\mu x_\nu\right) = \\
&= e_{\alpha\beta\gamma}e_{\gamma\mu\nu}m_\mu\,\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\nu\right) = (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})m_\mu\,\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\nu\right) = \\
&= m_\alpha\,\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\beta\right) - m_\beta\,\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\alpha\right) = \\
&= m_\alpha\,\left(\frac{1}{r^3}\nabla_\beta x_\beta + x_\beta\nabla_\beta\frac{1}{r^3}\right) - m_\beta\,\left(\frac{1}{r^3}\nabla_\beta x_\alpha + x_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{r^3}\right) = \\
&= m_\alpha\,\left(\frac{\delta_{\beta\beta}}{r^3} - 3\frac{x_\beta x_\beta}{r^5}\right) - m_\beta\,\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} - 3\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\right) = \\
&= m_\alpha\,\left(\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right) - \frac{m_\alpha}{r^3} + 3\frac{m_\beta x_\alpha x_\beta}{r^5} = \left(\frac{3(\mathbf{m},\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}\right)_\alpha.
\end{aligned}$$

[1] Внимательный читатель может обратить внимание на то, что электрический и магнитный диполи устроены по-разному. Электрический диполь можно представить как пару зарядов $-Q$ и Q, которые разделяется вектором $\mathbf{R}$, в пределе, когда $Q\to\infty$, $|\mathbf{R}|\to 0$, $\mathbf{d} = Q\mathbf{R} = \mathrm{const}$. При этом всюду в плоскости разделяющей заряды электрическое поле направлено в одну сторону (от Q к $-Q$), что даёт суммарный поток в $4\pi Q$. Магнитный диполь можно представить себе как виток с током I, площадью S и нормалью к площади витка $\mathbf{n}$ в пределе, когда $I\to\infty$, $S\to 0$, $\mathbf{m} = IS\mathbf{n} = \mathrm{const}$. При этом в плоскости витка магнитное поле внутри и снаружи витка направлено в противоположные стороны, причём суммарный поток через плоскость равен нулю. Полученное нами выше выражение не описывает магнитного потока сквозь виток потому, что мы не рассматривали поведение поля в особой точке $\mathbf{r} = 0$. В процессе расчётов мы получили, что $\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\beta\right) = 0$ (см. первый член начиная с 3-й строчки выкладок), однако, $\nabla_\beta\frac{x_\beta}{r^3} = \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta^3(\mathbf{r})$, что соответствует дивергенции поля единичного точечного заряда. Таким образом мы получаем добавку $4\pi\mathbf{m}\,\delta^3(\mathbf{r})$. Также δ-функция потеряна и в выражении для $\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\alpha\right) = \nabla_\beta\nabla_\alpha\frac{1}{r}$ (см. второй член начиная с 3-й строчки). След этого члена должен давать $\triangle\frac{1}{r} = \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta^3(\mathbf{r})$. Поскольку выражение несёт два индекса, симметрично и инвариантно относительно поворотов (при $r = 0$), добавка должна быть пропорциональна единичной матрице (т.е. $\delta_{\alpha\beta}$): $\nabla_\beta\left(\frac{1}{r^3}\,x_\alpha\right) = \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} - 3\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\right) + \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\mathbf{r})$. Окончательно получаем: $\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{m},\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\mathbf{m}\,\delta^3(\mathbf{r})$. Членом с δ-функцией можно пренебречь в классической теории, но он оказывается важен в квантовой теории, где приводит к *контактному спин-спиновому взаимодействию.*

6.2 4-мерный оператор набла

В четырёхмерном случае мы можем легко обобщить градиент и дивергенцию

$$(\mathrm{grad}_4 f)_i = \nabla_i f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \vec{\nabla} f\right), \tag{56}$$

$$\mathrm{div}_4 A = \nabla_i A^i = \frac{\partial A^0}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{A}. \tag{57}$$

Вместо лапласиана мы получаем волновой оператор со знаком минус

$$\Box f = -\mathrm{div}_4(\mathrm{grad}_4 f) = -\nabla_i \nabla^i f = \triangle f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{58}$$

Ротор в 4-мерном случае не может быть определён как псевдовектор, но мы можем определить 4-мерное обобщение ротора как антисимметричный тензор

$$(\mathrm{rot}_4 A)_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i. \tag{59}$$

Именно так из 4-потенциала получается тензор электромагнитного поля (а из вектор-потенциала — магнитное поле). В трёхмерном случае мы можем превратить эту матрицу в псевдовектор с помощью операции дуальности, но в 4-мерном случае дуальность снова даст матрицу.

7 Переход от 4-мерных тензоров к 3-мерным

Рассмотрим как ведут себя 4-мерные тензоры при обычных 3-мерных поворотах. При этом нам надо задать семейство гиперповерхностей $t = \mathrm{const}$, в которых будут осуществляться 3-мерные повороты. Выделяя такие поверхности мы отказываемся от Лоренц-инвариантности выделяя некоторое всеобщее время, которое будет оставаться неизменным при рассматриваемых преобразованиях. Тем самым, из группы Лоренца, которая включает преобразования Лоренца, повороты, отражения и их комбинации мы можем выделить подгруппу преобразований, которые не только сохраняют интервал, но и переводят гиперповерхности $t = \mathrm{const}$ в себя. Эта подгруппа оказывается группой поворотов $O(3) \subset O(1,3)$.

Матрицы поворотов, записанные как матрицы преобразований 4-мерного пространства-времени имеют вид

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & r & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad \Leftrightarrow \qquad R^{0'}_0 = 1, \quad R^{0'}_\alpha = R^{\alpha'}_0 = 0, \quad R^{\alpha'}_\alpha = r^{\alpha'}_\alpha, \tag{60}$$

где $r \in O(3)$ — 3-мерная матрица поворота (ортогональная матрица).

Правило преобразования для тензора $T^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ распадаются на 2^n случаев

$$\begin{aligned} & T^{i'_1 i'_2 \cdots i'_n} = T^{i_1 i_2 \cdots i_n} R^{i'_1}_{i_1} R^{i'_2}_{i_2} \cdots R^{i'_n}_{i_n}, \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & T^{0'0'\cdots 0'} = T^{00\cdots 0}, \\ & T^{\alpha'_1 0'\cdots 0'} = T^{\alpha_1 0\cdots 0} r^{\alpha'_1}_{\alpha_1}, \\ & T^{\alpha'_1 \alpha'_2\cdots 0'} = T^{\alpha_1 \alpha_2\cdots 0} r^{\alpha'_1}_{\alpha_1} r^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \cdots \\ & T^{0'\alpha'_2\cdots 0'} = T^{0\alpha_2\cdots 0} r^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \cdots \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

Т.е. с 3-мерной точки зрения индекс равный нулю «не считается», например, компонента для которой все индексы нули при поворотах ведёт себя как скаляр (тензор без индексов), компонента, у которой один пространственный индекс, а остальные нули, ведёт себя как тензор с одним индексом (вектор) и т.д. Таким образом тензор с n индексов в общем случае распадается на 2^n блоков (за счёт симметрии/анти симметрии число индексов может быть меньше).

4-вектор a^i относительно поворотов представляет собой совокупность 3-мерного скаляра a^0 и 3-мерного вектора a^α. Поэтому 4-вектор часто записывают как совокупность 3-скаляра и 3-вектора: $a^i = (a^0, \mathbf{a})$. Так, в частности[2]

- 4-потенциал — совокупность скалярного и векторного потенциалов $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$,
- 4-мерная плотность тока — совокупность плотности заряда и 3-мерной плотности тока $j^i = (\rho, \mathbf{j})$,
- 4-импульс — совокупность энергии и 3-мерного импульса $p^i = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$,
- 4-скорость — совокупность гамма-фактора и 3-мерной скорости, умноженной на гамма-фактор $u^i = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$.

4-мерный тензор 2-го ранга t^{ij} распадается на скаляр a, два вектора $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ 3-мерный тензор второго ранга D:

$$t^{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{B}^T \\ \hline \mathbf{C} & D \end{array}\right).$$

Например, тензор энергии импульса T^{ij} распадается на скаляр W (плотность энергии), 3-мерный вектор Умова-Поинтинга $\mathbf{S}$, и тензор напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$

$$T^{ij} = \left(\begin{array}{c|c} W & \mathbf{S}^T \\ \hline \mathbf{S} & \sigma_{\alpha\beta} \end{array}\right).$$

Поскольку тензор энергии-импульса симметричен вектор получился только один: вектор Умова-Поинтинга выступает одновременно как плотность потока энергии и как плотность импульса.

Тензор электромагнитного поля, в силу антисимметрии, распадается на 2 блока:

$$F_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{E}^T \\ \hline -\mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{H}} \end{array}\right), \qquad (\tilde{\mathbf{H}})_{\alpha\beta} = e_{\gamma\alpha\beta} H_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y \\ -H_z & 0 & H_x \\ H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $(\tilde{\mathbf{H}})_{\alpha\beta}$ — псевдовектор магнитного поля записанный в виде антисимметричной матрицы 3×3. Поэтому антисимметричный 4-мерный тензор 2-го ранга часто представляют как совокупность 3-мерных вектора и псевдовектора:

$$F_{ij} = (\mathbf{E}; \mathbf{H}), \qquad \tilde{F}_{ij} = (\mathbf{H}; -\mathbf{E})$$

[2] Напоминаем, что в данном пособии скорость света считается равной 1.

8 Криволинейные координаты*

При записи тензоров в криволинейных координатах необходимо учитывать, что векторы, ковекторы и другие тензоры (кроме скаляров) в криволинейных координатах разлагаются по разным базисам в разных точках пространства. Это затрудняет не только дифференцирование тензоров (кроме скаляров), но и их параллельный перенос. Также важно отметить, что ***в литературе для одних и тех же систем координат могут использоваться разные базисы***.

Данный раздел пособия не является последовательным изложением использования тензоров в криволинейных координатах. Здесь лишь даётся некоторое представление о существенных особенностях криволинейных координат и даются некоторые полезные идеи и формулы.

8.1 Метрика в криволинейных координатах

Проще всего убедиться в этом на примере векторов. Легко видеть, что компоненты метрического тензора представляют собой матрицу скалярных произведений базисных векторов. Действительно, базисный вектор номер i имеет одну единичную i-ю компоненту, а все остальные компоненты равны нулю, т.е.

$$(\mathbf{e}_i)^j = \delta_i^j \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{mn}(\mathbf{e}_i)^m(\mathbf{e}_j)^n = g_{mn}\delta_i^m\delta_j^n = g_{ij}.$$

Рассмотрим, в качестве примера, сферические координаты в евклидовом пространстве. Сферические координаты (r, θ, φ) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) следующими соотношениями:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ z = r\,\cos\theta \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} dx = dr\,\sin\theta\,\cos\varphi + d\theta\,r\,\cos\theta\,\cos\varphi - d\varphi\,r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ dy = dr\,\sin\theta\,\sin\varphi + d\theta\,r\,\cos\theta\,\sin\varphi + d\varphi\,r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ dz = dr\,\cos\theta - d\theta\,r\,\sin\theta \end{array}\right.$$

Обратная матрица Якоби имеет вид (штрихованные координаты — сферические)

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi & r\,\cos\theta\,\cos\varphi & -r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi & r\,\cos\theta\,\sin\varphi & r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\,\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы получить метрику в сферических координатах (1-й способ) мы можем вычислить свёртку

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}},$$

(обратите внимание, декартовы (нештрихованные) верхние и нижние индексы можно не различать, а сферические (штрихованные) верхние и нижние индексы различать необходимо) на матричном языке

$$g' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^T g\frac{\partial x}{\partial x'} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^T E\frac{\partial x}{\partial x'} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^T \frac{\partial x}{\partial x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Вместо этого (2-й способ) можно подставить вышеприведённые выражения для dx, dy, dz в формулу для элемента длины и получить ту же самую метрику в виде квадратичной формы

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

Иногда бывает удобно сразу записать метрику в виде элемента длины исходя из геометрических соображений (3-й способ). Для сферических координат

- смещение по r на dr — смещение по радиусу на расстояние dr,
- смещение по θ на $d\theta$ — смещение вдоль меридиана сферы радиуса r на угол $d\theta$ и на расстояние $r\,d\theta$,
- смещение по φ на $d\varphi$ — смещение вдоль параллели сферы радиуса r (радиус параллели $r\,\sin\theta$) на угол $d\varphi$ и на расстояние $r\,\sin\theta\,d\varphi$.

Смещения вдоль радиуса, вдоль параллели и вдоль меридиана взаимно перпендикулярны, поэтому мы можем написать квадрат полного смещения dl как сумму квадратов смещения по этим трём направлениям

$$dl^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\,\sin\theta\,d\varphi)^2.$$

Таким образом, в сферических координатах базисные векторы взаимно ортогональны и имеют длины

$$|\mathbf{e}_r| = 1, \qquad |\mathbf{e}_\theta| = r, \qquad |\mathbf{e}_\varphi| = r\,\sin\theta.$$

Рассматривавшиеся выше смещения осуществлялись как раз на расстояния пропорциональные длинам базисных векторов. Компоненты этих векторов в координатах (x, y, z) — столбцы выписанной выше обратной матрицы Якоби.

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} r\,\cos\theta\,\cos\varphi \\ r\,\cos\theta\,\sin\varphi \\ -r\,\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однако, если вам даны компоненты вектора в сферических координатах, это не означает, что вектор разложен по данному базису («координатному базису»). Вместо этого может использоваться базис из векторов, нормированных на единицу, т.е. $\check{\mathbf{e}}_\alpha = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|}$. Различие в базисах скажется и на формулах для градиента, дивергенции, ротора. Все приведённые в этом пособии формулы предполагают использование координатного базиса.

Для ортогональных метрик (описываемых диагональными метрическими тензорами) часто вводятся *коэффициенты Ламе* L_α — квадратные корни из диагональных элементов метрики, т.е. длины базисных векторов координатного базиса. Элемент длины записывается через коэффициенты Ламе как $dl^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(L_\alpha dx^\alpha)^2$.

8.2 Полностью антисимметричный тензор

Определённые ранее полностью антисимметричные символы $e_{\alpha\beta\gamma}$ и e_{ijkl} вели себя как тензоры при преобразованиях координат с единичным якобианом. В криволинейных координатах они уже не будут псевдотензорами. Чтобы снова получить из них псевдотензоры их надо домножить на корень из определителя метрического тензора

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{|g|}\,e_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \Omega_{ijkl}\sqrt{|g|}\,e_{ijkl}. \tag{61}$$

Для трёхмерного случая проверим это правило. Тензорный закон преобразования компонент должен дать (см. раздел 5.2)

$$\omega_{\alpha'\beta'\gamma'} = \sqrt{|g'|}\,e_{\alpha'\beta'\gamma'} = \sqrt{|g|}\,e_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} = \sqrt{|g|}\,\det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right)\,e_{\alpha'\beta'\gamma'} \tag{62}$$

При этом зная как преобразуется метрический тензор ($g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}$) мы (т.к. определитель произведения равен произведению определителей) получаем

$$g' = g\det{}^2\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right). \tag{63}$$

Таким образом, тензорный закон преобразования компонент действительно выполняется для положительного якобиана, а для отрицательного закон преобразования отличается от тензорного знаком, т.е. $\sqrt{|g|}\,e_{\alpha\beta\gamma}$ (и, аналогично $\sqrt{|g|}\,e_{ijkl}$) действительно является псевдотензором. *Именно такие псевдотензоры должны использоваться для определения дуальных тензоров в криволинейных координатах.*

Также легко видеть, что полностью антисимметричный тензор при поднимании индексов умножается на определитель метрики, таким образом

$$\omega^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,e_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \Omega^{ijkl} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,e_{ijkl}.$$

(Мы предполагаем, что определитель метрики в 3-мерном пространстве положителен, а в 4-мерном пространстве-времени отрицателен.)

8.3 Дифференцирование в криволинейных координатах*

При дифференцировании тензора (кроме скаляра) необходимо учитывать зависимость компонент базиса от координат, так производная от вектора v вдоль вектора u приобретает дополнительный член

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}}(v^i\mathbf{e}_i) = (u^j\nabla_j v^i)\mathbf{e}_i + (u^j\nabla_j\mathbf{e}_i)v^i. \tag{64}$$

Такая производная называется *ковариантной производной.*

Однако полностью антисимметричные ковариантные тензоры можно дифференцировать в криволинейных координатах точно так же, как и обычно, если строить из производных антисимметричную комбинацию («внешнюю поизводную»). В электродинамике нам потребуются следующие внешние производные (*владение понятием внешней производной в стандартном курсе теории поля не требуется*)

$$(df)_i = \nabla_i f, \tag{65}$$
$$(dA)_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i, \tag{66}$$
$$(dF)_{ijk} = \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij}. \tag{67}$$

Здесь $F_{ij} = -F_{ji}$, скаляр f и ковекторы df и A также могут рассматриваться как полностью антисимметричные тензоры. Если переставить у скаляра или ковектора любые два индекса, то скаляр, или ковектор, изменят знак (утверждение, очевидно, верное, т.к. для того, чтобы его опровергнуть понадобилось бы найти у скаляра или ковектора два индекса, которых у них нет).

Желающие могут легко проверить, что величины, задаваемые формулами (65),(66),(67) действительно преобразуются как тензоры при произвольных заменах координат (в предположении, что f, A_i и $F_{ij} = -F_{ji}$ — тензоры).

Эти формулы работают в произвольных криволинейных координатах и задают градиент (используется в электродинамике для задания градиентных преобразований 4-потенциала), обобщённый ротор (задаёт выражение для тензора электромагнитного поля через 4-потенциал). Последняя формула используется для записи 1-й пары уравнений Максвелла через тензор электромагнитного поля ($\nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0$).

Повторное применение внешней производной всегда даёт нуль

$$(ddf)_{ij} = \nabla_i(\nabla_j f) - \nabla_j(\nabla_i f) = 0, \tag{68}$$

$$(ddA)_{ijk} = \nabla_i(\nabla_j A_k - \nabla_k A_j) + \nabla_j(\nabla_k A_i - \nabla_i A_k) + \nabla_k(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) = 0 \tag{69}$$

Эти тождества также играют важную роль в электродинамике: одно из них используется для доказательства градиентной инвариантности тензора электромагнитного поля (4-потенциал $A_i + \nabla_i f$ даёт тот же тензор электромагнитного поля, что исходный 4-потенциал A_i), а другое используется для того, чтобы вывести 1-ю пару уравнений Максвелла из выражения для тензора поля через 4-потенциал.

Для полностью антисимметричных ковариантных тензоров удобно вводить операцию дифференцирования (внешняя производная), которая увеличивает число индексов на 1 (при сохранении антисимметричности). Для полностью антисимметричных контравариантных тензоров удобно вводить операцию дифференцирования (дивергенция), которая уменьшает число индексов на 1 (при сохранении антисимметричности).

В электродинамике нам потребуется дивергенция от контравариантных антисимметричных тензоров с одним и двумя индексами

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{|g|}A^j), \tag{70}$$

$$(\operatorname{div}F)^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{|g|}F^{ij}). \tag{71}$$

Здесь g — определитель матрицы метрического тензора. Доказательство того, что выражения (70) и (71) действительно преобразуются как тензоры при произвольных заменах координат (в предположении, что A^j и $F^{ij} = -F^{ji}$ — тензоры) мы снова оставляем читателю в качестве упражнения (дивергенцию от антисимметричного тензора можно получить путём комбинации дуальность-внешняя производная-дуальность: $\operatorname{div}F = \pm\widetilde{d\widetilde{F}}$).

Лапласиан в криволинейных координатах (*оператор Бельтрами-Лапласа*) может быть получен путём комбинации градиента, поднимания индекса и дивергенции. Для скалярной функции

$$\triangle\varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right). \tag{72}$$

Например, для сферических координат $g_{ij} = \operatorname{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$, $g^{ij} = \operatorname{diag}(1, r^{-2}, r^{-2}\sin^{-2}\theta)$, $\sqrt{|g|} = r^2\sin\theta$ и мы получаем (поскольку метрика диагональна, в сумме выживают только 3 члена)

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)f \tag{73}$$

Аналогично для криволинейных координат может быть определён волновой оператор (со знаком минус). Однако, для криволинейных координат существуют разные обобщения операторов Лапласа и Даламбера, и приведённый выше оператор не пригоден, например, для дифференцирования векторного поля.