

Конспект установочных лекций к государственному экзамену по математике по направлению “Прикладные математика и физика”

Студенты физического факультета СПбГУ изучают Математику в течение семи семестров. В 2005/06 учебном году в Учебный План был введен Государственный Экзамен по Математике, который студенты должны сдавать по завершении седьмого семестра. Теоретический материал для экзамена был сгруппирован в 70 вопросов, охватывающих все математические дисциплины, входящие в Учебный План. Эти вопросы сформулированы вполне конкретно, но чтобы сознательно ответить на них, студент должен ориентироваться в гораздо более обширном материале. Стремясь помочь студентам подготовиться к Экзамену, кафедра организовала семестровый курс Установочных Лекций. В настоящем Пособии представлены конспекты этих лекций. Этот текст, конечно, не может рассматриваться как стандартный учебник: он обращен к студентам, уже систематически изучавшим представленный здесь материал. Цель авторов состоит в том, чтобы активировать этот материал в памяти студентов и сориентировать читателей/слушателей в подготовке к экзамену по выделенному списку вопросов. Авторами настоящего пособия являются Т. А. Суслина, М. А. Лялинов (Линейная Алгебра), Н. В. Смородина (Анализ), А. М. Будылин (Высшая Математика, 2-ой курс), А. С. Благовещенский (Теория Вероятностей), В. Э. Грикуров (Методы Мат. Физики, 3-ий курс) и Л. А. Дмитриева (Методы Мат. Физики, 7-ой семестр). На практике стиль различных разделов оказался очень разным. Авторы планируют продолжить работу и в дальнейшем попытаются выработать более единообразный стиль текста. Настоящий вариант был отредактирован В. С. Буслаевым, Т. А. Суслиной и Н. Д. Филоновым.

Работа выполнена по плану реализации пилотного проекта РАЗРАБОТКА И ВНЕДРЕНИЕ ИННОВАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ “ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА”, в рамках проекта Санкт-Петербургского государственного университета “Инновационная образовательная среда в классическом университете”, при финансовой поддержке Программы поддержки вузов, внедряющих инновационные образовательные программы, национального проекта “Образование”.

Содержание

1	Аналитическая геометрия	4
1.1	Геометрические векторы	4
1.2	Векторное произведение	6
1.3	Кривые второго порядка на плоскости	6
2	Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений	7
3	Линейные пространства. Базис и размерность. Евклидово пространство	9
4	Линейные операторы в линейных пространствах	11
4.1	Линейные операторы в евклидовых пространствах. Теорема Фредгольма . .	13
4.2	Самосопряженные операторы. Свойства собственных чисел и собственных векторов	13
5	Основы Анализа	14
5.1	Предел последовательности	14
5.2	Предел функции. Непрерывность	15
5.3	Производная	16
5.4	Производные высших порядков	17
5.5	Экстремум и выпуклость функции одной переменной	18
6	Интегралы	19
6.1	Определенный интеграл	19
6.2	Свойства определенного интеграла	20
6.3	Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница	21
7	Ряды	22
7.1	Сходящиеся ряды. Абсолютная сходимость	22
7.2	Признаки сходимости рядов	23
7.3	Функциональные ряды. Равномерная сходимость	24
8	Функции нескольких переменных	25
8.1	Дифференцирование и частные производные функции нескольких переменных	25
8.2	Экстремум функции нескольких переменных	26
8.3	Условный экстремум	27
9	Кратные интегралы	27
9.1	Кратные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным	27
9.2	Замена переменных в кратных интегралах. Полярные и сферические координаты	29
10	Векторные поля. Криволинейные и поверхностные интегралы	30
10.1	Криволинейные интегралы первого и второго рода. Определения, интерпретация	30
10.2	Поверхностные интегралы первого и второго рода	32
10.3	Операторы grad, div, rot, Δ	34
10.4	Формула Грина. Потенциал векторного поля на плоскости	36

10.5	Формула Гаусса–Остроградского	37
11	Дифференциальные уравнения	38
11.1	Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения задачи Коши	38
11.2	Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Пространство решений. Определитель Вронского	39
11.3	Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных	40
11.4	Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами	41
12	Ряды и интегралы Фурье	42
12.1	Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Признак равномерной сходимости	42
12.2	Ортонормированные системы. Ряд Фурье по ортонормированной системе, сходимость в среднем. Равенство Парсеваля	44
12.3	Задача Штурма–Лиувилля. Свойства собственных функций	46
12.4	Интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка, преобразование Фурье свертки	49
13	Вариационное исчисление	51
13.1	Первая вариация интегрального функционала. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера–Лагранжа	51
13.2	Естественные граничные условия	52
13.3	Задача Лагранжа	54
14	Теория вероятностей	56
14.1	Аксиоматика теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей	56
14.2	Случайные величины	57
14.3	Условные вероятности. Независимость событий. Независимость и некоррелированность СВ	59
14.4	Закон больших чисел	61
15	Теория функций комплексного переменного	62
15.1	Голоморфные функции. Условия Коши–Римана	62
15.2	Теорема Коши, формула Коши	63
15.3	Ряд Тейлора	65
15.4	Ряд Лорана. Вычеты. Теорема о вычетах	65
15.5	Асимптотическое вычисление интегралов. Метод Лапласа	67
15.6	Метод стационарной фазы	68
16	Обобщенные функции	69
16.1	Обобщенные функции, примеры регулярных и сингулярных обобщенных функций.	69
16.2	Дифференцирование обобщенных функций, примеры	71
16.3	Преобразование Фурье обобщенных функций	72

17 Введение в задачи математической физики	74
17.1 Волновое уравнение в одномерном пространстве. Задача Коши, функция Грина	74
17.2 Волновое уравнение в трехмерном пространстве. Задача Коши, функция Грина	76
17.3 Неоднородное уравнение теплопроводности на конечном интервале. Метод Фурье	78
18 Краевые задачи для уравнения Лапласа и Гельмгольца	79
18.1 Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, однородного и неоднородного. Теоремы существования. Теоремы единственности для внутренних задач	79
18.2 Функция Грина внутренней задачи Дирихле	81
19 Сферические функции	83
19.1 Полиномы Лежандра	83
19.2 Сферические функции	85
19.3 Разделение переменных в краевых задачах для уравнения Лапласа в шаре	86
20 Уравнение Бесселя	87
20.1 Уравнение Бесселя. Функции Бесселя	87
20.2 Собственные функции, собственные значения спектральной задачи Дирихле. Колебания круглой мембраны	89
21 Интегральные уравнения	91
21.1 Интегральные уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма	91
21.2 Интегральные уравнения Вольтерра.	94
21.3 Интегральные уравнения с самосопряженным ядром	96
22 Разрешимость краевых задач для уравнения Гельмгольца	99

1 Аналитическая геометрия

1.1 Геометрические векторы

При рассмотрении геометрических векторов мы находимся в рамках евклидовой геометрии, знакомой вам по школьному курсу. *Направленный отрезок* прямой – это отрезок AB , для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. На множестве всех направленных отрезков вводится отношение эквивалентности: два направленных отрезка эквивалентны, если один из них можно перевести в другой параллельным переносом. (Напомним, что бинарное отношение \sim на некотором множестве называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, т. е. $x \sim x$, симметрично, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, и транзитивно, $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Нетрудно видеть, что параллельный перенос является отношением эквивалентности на множестве направленных отрезков.) *Вектором* называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Далее мы определим ряд операций над векторами (длина вектора, сумма векторов, произведение и т. п.). Элементарно проверяется, что все они определены корректно, т. е. не зависят от выбора конкретных направленных отрезков из соответствующих классов.

Пусть выбран и фиксирован масштаб измерения длин. Тогда вектору \vec{AB} сопоставляется число $|\vec{AB}|$, называемое длиной вектора – длина отрезка AB . *Нулевым вектором* $\vec{0}$ называют вектор, начало и конец которого совпадают.

Векторы, лежащие на одной прямой, либо на параллельных прямых, называют *коллинеарными* (обозначение $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Два коллинеарных вектора либо сонаправлены, либо направлены в противоположные стороны. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называют *компланарными*. Если два вектора сонаправлены и имеют равную длину, то они равны.

Далее, вводят *линейные операции* над векторами – сложение и умножение на (вещественное) число. *Сложение* определяется по "правилу треугольника": следует совместить начало второго вектора с концом первого, тогда их сумма есть вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Произведением вектора \vec{a} на число α называется вектор \vec{b} (обозначаемый через $\alpha\vec{a}$) такой, что $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$, и \vec{b} сонаправлен с \vec{a} , если $\alpha > 0$; векторы \vec{b} и \vec{a} направлены в противоположные стороны, если $\alpha < 0$; и $\vec{b} = \vec{0}$, если $\alpha = 0$.

Линейные действия над векторами обладают традиционными свойствами, которые в дальнейшем кладутся в основу определения общего понятия линейного пространства (см. ниже §3).

Введем важные понятия *линейной зависимости и независимости* набора векторов. Набор векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ называют *линейно зависимым*, если найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, хотя бы одно из которых отлично от нуля (т. е. $\sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \neq 0$), такие, что выполнено равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p = \vec{0}. \quad (1.1)$$

Набор векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ называют *линейно независимым*, если этот набор не является линейно зависимым. Иначе говоря, набор линейно независим, если равенство (1.1) выполнено только при $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

Напомним следующие простые утверждения. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Три вектора линейно зависимы тогда и только

тогда, когда они компланарны. Любые четыре вектора в геометрическом пространстве линейно зависимы.

Эти утверждения означают, что размерность прямой $=1$, размерность плоскости $=2$, а размерность геометрического пространства $=3$, что соответствует общему понятию размерности линейного пространства, как максимального числа линейно независимых векторов (см. ниже §3).

Под *базисом* понимают максимальный набор линейно независимых векторов. Базис на прямой образует один (ненулевой) вектор, лежащий на этой прямой. Базис на плоскости образуют два неколлинеарных вектора в этой плоскости, а базис в пространстве образуют три некомпланарных вектора.

Пусть упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в пространстве. Тогда любой вектор \vec{d} единственным образом можно представить в виде

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

(разложить по базису). Числа α, β, γ называют координатами вектора \vec{d} в данном базисе.

Декартова система координат в пространстве выделяется выбором точки O (начала координат) и базиса, состоящего из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (ортов). Декартовы координаты x, y, z точки M — это координаты вектора \vec{OM} в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ — симметрия;
2. $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, равенство нулю только при $\vec{a} = \vec{0}$, — положительная определенность;
3. $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}) + \beta(\vec{b}, \vec{c})$ — линейность по первому аргументу.

Эти свойства в дальнейшем кладутся в основу определения скалярного произведения в абстрактном евклидовом пространстве (см. §3).

В декартовых координатах скалярное произведение векторов $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ дается формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Обсудим теперь важное понятие *ориентации*. Начнем с векторов, лежащих на одной прямой. Два (ненулевых) вектора на прямой назовем *эквивалентными*, если они сонаправлены. Тогда все ненулевые векторы на прямой разбиваются на два класса эквивалентности. Выбор одного из этих двух классов и называют выбором ориентации на прямой. Это можно интерпретировать, как выбор направления на прямой.

Рассмотрим теперь векторы на плоскости. Для всевозможных декартовых базисов (упорядоченных пар ортов) введем отношение эквивалентности. Две упорядоченные пары ортов называют эквивалентными, если их можно совместить параллельным переносом и поворотом. Тогда все декартовы базисы разбиваются на два класса эквивалентности, и выбор одного из этих классов и есть выбор ориентации на плоскости. (Отметим, что можно было бы ввести подходящее отношение эквивалентности и для произвольных базисов на плоскости и также разбить их на два класса.)

Аналогично, в пространстве рассматриваются всевозможные декартовы базисы (упорядоченные тройки ортов). Две тройки эквивалентны, если их можно совместить параллельным переносом и поворотом. Тогда все декартовы базисы в пространстве также разобьются на два класса эквивалентности. Выбор одного из этих классов и есть выбор ориентации в пространстве. (Для произвольных базисов, т. е. упорядоченных троек некопланарных векторов тоже можно ввести подходящее отношение эквивалентности.)

Отметим, что сам факт разбиения базисов ровно на два класса эквивалентности (и на прямой, и на плоскости, и в пространстве, и вообще в любом конечномерном вещественном линейном пространстве) доказывается строго математически. Однако, с геометрической точки зрения ни один из этих двух классов ничем не выделен; можно лишь определить, принадлежат ли данные два базиса одному классу или различным.

В физике выделяют "правые" и "левые" системы координат, различая два класса эквивалентности с помощью таких нематематических понятий, как "часовая стрелка" или "буравчик". На самом деле, возможность такого выделения связана с тем, что на Земле есть выделенное направление — направление силы тяжести. Подчеркнем, что чисто геометрически объяснить, какая система правая, а какая левая, невозможно.

1.2 Векторное произведение

Пусть в пространстве выбрана и фиксирована ориентация. Вектор $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$ называется векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} , если

1. вектор \vec{c} ортогонален плоскости векторов \vec{a}, \vec{b} ,
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между \vec{a} и \vec{b} ,
3. тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ориентирована так же, как базисная тройка.

Заметим, что направление векторного произведения изменится на противоположное при смене ориентации в пространстве и тогда, по определению, векторное произведение является *псевдовектором*. Векторное произведение антикоммутативно, неассоциативно и линейно по сомножителям.

Если сомножители в векторном произведении заданы своими декартовыми координатами, то имеет место удобная формула в виде символического детерминанта

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

который понимается традиционным разложением по первой строке. Стоит отметить также полезную формулу для двойного векторного произведения

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (1.3)$$

1.3 Кривые второго порядка на плоскости

Известно, что уравнение второго порядка от двух независимых переменных может быть приведено к канонической форме в результате поворота и сдвига системы координат. Тем

самым, получается полная классификация кривых второго порядка на плоскости. Выясняется, что содержательны три случая — эллипс (либо окружность), гипербола и парабола. (Остальные случаи — вырожденные.) Приведем канонические уравнения кривых: эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(при $a = b$ — окружности), гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, b — полуоси, и параболы

$$y^2 = 2px.$$

Напомним, что эллипс — это геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных (фокусов) есть постоянная величина, равная $2a$. Гипербола — это геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных (фокусов) есть постоянная величина, равная $2a$. Парабола — геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной прямой (директрисы) и заданной точки (фокуса); p — расстояние между фокусом и директрисой.

Указанные кривые обладают замечательными геометрическими свойствами. Если поместить точечный источник света в один из фокусов эллипса, то луч, вышедший из фокуса, после отражения от границы эллипса по законам геометрической оптики (угол падения равен углу отражения) пройдет через второй фокус. Аналогичным свойством обладает гипербола. В практических применениях наиболее интересно оптическое свойство параболы: луч, вышедший из фокуса, после отражения от параболы по законам геометрической оптики пройдет на бесконечность параллельно оси симметрии параболы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов, *Аналитическая геометрия*.
2. В. А. Ильин, В. Г. Позняк, *Аналитическая геометрия*.

2 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

По определению *детерминант* (определитель) квадратной матрицы A с элементами a_{ik} , $i, k = 1, \dots, n$, это число

$$\det A = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \varepsilon(K) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}, \quad (2.1)$$

где суммирование производится по всем перестановкам $K = (k_1, \dots, k_n)$, $\varepsilon(K)$ — знак перестановки.

Определитель является линейной функцией строки (столбца), меняет знак при перестановке двух строк (столбцов). Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей. Операция транспонирования матрицы не меняет ее определителя.

Стоит привести важную формулу разложения определителя по строке

$$\det A \delta_{ik} = \sum_{s=1}^n a_{is} d_{ks}, \quad (2.2)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, а величины d_{ks} — алгебраические дополнения элементов a_{ks} . Аналогичное разложение справедливо относительно столбцов.

Квадратная матрица A *обратима*, если существует матрица A^{-1} такая, что

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I. \quad (2.3)$$

Если обратная матрица существует, то только одна. Справедливы равенства

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (2.4)$$

если каждая из матриц обратима.

Критерием существования обратной матрицы является неравенство нулю ее определителя. Для элементов обратной матрицы справедлива формула

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{d_{ki}}{\det A}, \quad (2.5)$$

где d_{ki} — алгебраические дополнения матрицы A .

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей

$$Ax = y. \quad (2.6)$$

Правая часть и матрица системы заданы. Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости системы состоит в неравенстве ее определителя нулю. Решение в этом случае находится по формуле $x = A^{-1}y$.

Рассмотрим теперь систему m линейных уравнений с n неизвестными: $Ax = y$. Сейчас A — $(m \times n)$ -матрица. Если $y = 0$, то система называется *однородной*, а если $y \neq 0$ — *неоднородной*. *Общее решение* неоднородной системы линейных уравнений всегда представимо суммой общего решения однородной системы и частного решения неоднородной. Это простое, но важное утверждение, справедливо для произвольных линейных систем, т.е. не обязательно алгебраических.

Для однородной системы $Ax = 0$ всегда существует *тривиальное решение* $x = 0$. Нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда ранг r_A матрицы A меньше числа неизвестных n : $r_A < n$. Решения однородной системы можно складывать и умножать на числа. Иными словами, решения однородной системы образуют линейное пространство; его размерность равна $n - r_A$.

Напомним, что разрешимость линейной неоднородной системы $Ax = y$ описывается теоремой Кронекера-Капелли: система разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы $(A|y)$. Для выполнения этого условия правую часть y следует подчинить условиям разрешимости (количество которых равно $m - r_A$).

Для систем с квадратной матрицей выполняется *альтернатива Фредгольма*: либо неоднородная система разрешима при любой правой части, либо существует нетривиальное решение однородной системы. Первый вариант реализуется, если $\det A \neq 0$, а второй — если $\det A = 0$.

3 Линейные пространства. Базис и размерность. Евклидово пространство

Множество X называется *линейным пространством*, если а) каждым двум элементам x и y сопоставляется элемент $x + y$ — сумма элементов, б) каждому элементу x и числу λ сопоставляется элемент λx — произведение x на число λ .

Эти операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам)

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. существует элемент 0 такой, что $x + 0 = 0 + x = x$, называемый нулевым элементом,
4. для каждого элемента x существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$; $(-x)$ называется противоположным элементом к x ,

а также

1. $1 \cdot x = x$,
2. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
3. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Задание операций сложения и умножения на число в X с указанными свойствами называют заданием линейной структуры в X . Если числа, на которые умножаются элементы, вещественные, то X называют вещественным линейным пространством, а если допускается умножение на комплексные числа, то X — комплексное линейное пространство. Часто элементы X называют векторами.

Как и для геометрических векторов (см. §1) для векторов в линейном пространстве вводят понятие *линейной зависимости*. Набор (система) элементов x_1, x_2, \dots, x_n называют линейно зависимым, если найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие что выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0. \quad (3.1)$$

Если же (11) выполнено только при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то система x_1, x_2, \dots, x_n линейно независима.

Базисом в X называется максимальный набор линейно независимых элементов e_1, e_2, \dots, e_n . Если e_1, e_2, \dots, e_n — базис в X , то для любого элемента $x \in X$ существуют числа $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i. \quad (3.2)$$

Числа $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, называемые координатами x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , находятся однозначно. *Размерностью* $\dim X$ пространства X называется число элементов базиса, т. е. максимальное число линейно независимых элементов.

Примером вещественного линейного пространства служит пространство \mathbb{R}^n , а комплексного — пространство \mathbb{C}^n . Элементами \mathbb{R}^n служат " n -мерные векторы"

$$x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \xi^j \in \mathbb{R}.$$

Операции сложения и умножения на вещественные числа вводятся покомпонентно:

$$x + y = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \dots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 + \eta^1 \\ \xi^2 + \eta^2 \\ \dots \\ \xi^n + \eta^n \end{pmatrix}, \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha \xi^1 \\ \alpha \xi^2 \\ \dots \\ \alpha \xi^n \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется пространство \mathbb{C}^n .

Взаимно-однозначное отображение одного линейного пространства на другое, сохраняющее линейную структуру, называется *изоморфизмом*. Конечномерные вещественные (соответственно, комплексные) линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. Любое вещественное n -мерное пространство изоморфно \mathbb{R}^n , а комплексное изоморфно \mathbb{C}^n . С точки зрения линейной алгебры конечномерные линейные пространства различной "физической" природы, но совпадающей размерности, устроены одинаково — они изоморфны.

Вещественное линейное пространство называется *вещественным евклидовым пространством*, если в нем введена структура *скалярного произведения*. Паре элементов $x, y \in X$ сопоставляется вещественное число (x, y) , называемое их скалярным произведением. При этом предполагаются выполненными следующие свойства (аксиомы):

1. $(x, y) = (y, x)$ — симметрия;
2. $(x, x) \geq 0, \forall x \in X$; равенство нулю $(x, x) = 0$ только при $x = 0$ — положительная определенность;
3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ — линейность по первому аргументу.

Например, скалярное произведение в \mathbb{R}^n задается равенством

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

Нормой элемента x в вещественном евклидовом пространстве называется (неотрицательное) число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Скалярное произведение удовлетворяет неравенству Коши:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (3.3)$$

Его прямым следствием является неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (3.4)$$

Элементы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. Неравенство (3.3) позволяет корректно определить угол φ между (ненулевыми) элементами x и y по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

Таким образом, введение евклидовой структуры позволяет измерять длины (нормы элементов) и углы.

Комплексное евклидово пространство — это комплексное линейное пространство, в котором введено скалярное произведение. Скалярное произведение элементов x и y — это комплексное число (x, y) . Предполагаются выполненными прежние аксиомы 2, 3; первая аксиома заменяется на свойство эрмитовости: $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Например, в пространстве \mathbb{C}^n скалярное произведение вводится по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi^i \overline{\eta^i}.$$

Норма вводится так же, как в вещественном случае. В комплексном евклидовом пространстве сохраняются неравенства (3.3) и (3.4), так же вводится понятие ортогональности и угла между векторами.

В вещественном либо комплексном n -мерном евклидовом пространстве удобно использовать *ортонормированные базисы* e_1, \dots, e_n , где $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$. Например, *стандартный* ортонормированный базис в \mathbb{R}^n (и в \mathbb{C}^n) образуют стандартные орты

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4 Линейные операторы в линейных пространствах

Пусть X, Y — линейные пространства (оба вещественные, либо оба комплексные). Назовем *линейным оператором* отображение A пространства X в Y , такое, что $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, т.е. обладающее свойством линейности.

Если в пространствах X и Y введены соответственно базисы $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, n$, и $\{f_k\}$, $k = 1, \dots, m$, то элемент Ae_j пространства Y разлагается по базису $\{f_k\}$:

$$Ae_j = \sum_{k=1}^m a_j^k f_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

а коэффициенты a_j^k задают, по определению, *изображающую матрицу* $a = \{a_j^k\}$ оператора A в данной паре базисов. Матрица оператора зависит от выбора базисов, однако, если матрица оператора и базисы заданы, то однозначно определен оператор.

Рассмотрим теперь линейный оператор $A : X \rightarrow X$. Тогда можно взять оба базиса совпадающими. В этом случае говорят о матрице оператора A в базисе $\{e_j\}$. При переходе от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$ матрица оператора A преобразуется по закону

$$\tilde{a} = b^{-1}ab. \tag{4.1}$$

Здесь b — так называемая матрица перехода от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$. Столбцы матрицы b составлены из координат векторов \tilde{e}_k в базисе $\{e_j\}$.

Преобразование матриц (4.1) называется *преобразованием подобия*, а (неособую) матрицу b называют матрицей, задающей преобразование подобия. Определитель матрицы deta , а также так называемый характеристический многочлен $\det(a - \lambda I)$ являются *инвариантами подобия*, т. е.

$$\text{det}\tilde{a} = \text{deta}, \quad \det(\tilde{a} - \lambda I) = \det(a - \lambda I).$$

Поэтому корректно определены *определитель оператора* A : $\det A = \text{deta}$, а также его характеристический многочлен: $\det(A - \lambda I) = \det(a - \lambda I)$.

Число λ называется *собственным числом* оператора A , если для данного λ линейное уравнение

$$Ax = \lambda x \tag{4.2}$$

имеет нетривиальное решение $0 \neq x \in X$, а само это решение x называется *собственным вектором*. Уравнение (4.2) нетривиально разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{4.3}$$

Левая часть уравнения (4.3) является полиномом по λ , который, как уже упоминалось, называется *характеристическим*. Собственные числа являются корнями характеристического уравнения (4.3).

Подчеркнем различие между вещественным и комплексным случаями. Если мы рассматриваем комплексный вариант теории (т. е., X — комплексное линейное пространство), то каждому корню λ характеристического полинома отвечает по крайней мере один собственный вектор. Иначе обстоит дело в вещественном случае (X — вещественное линейное пространство). Тогда каждому *вещественному* корню λ по-прежнему отвечает по крайней мере один собственный вектор. Но характеристический полином может иметь и комплексные корни, которым уже (в вещественном пространстве) никакой собственный вектор не отвечает. В качестве примера приведем оператор поворота на угол $\varphi \in (0, \pi)$ на плоскости \mathbb{R}^2 . В этом случае оба корня характеристического полинома $e^{\pm i\varphi}$ комплексные, и оператор не имеет ни одного собственного вектора.

Если λ — собственное число оператора A , то кратность корня λ характеристического уравнения называется *алгебраической* кратностью собственного числа. Размерность подпространства решений системы (4.2) называется *геометрической* кратностью собственного числа λ .

Справедливо следующее важное утверждение. Пусть оператор A имеет собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, среди которых могут быть совпадающие, и набор соответствующих собственных векторов x_1, \dots, x_n , составляющий базис в пространстве X . Тогда оператор A *допускает диагонализацию*. По определению, это означает, что в пространстве X найдется такой базис, в котором изображающая матрица \tilde{a} оператора A диагональна. Это — базис из собственных векторов x_1, \dots, x_n , а сама матрица \tilde{a} имеет вид

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

На языке матриц это означает, что матрица a оператора A в исходном базисе подобна диагональной матрице \tilde{a} . При этом столбцы матрицы b , задающей преобразование подобия, составлены из координат собственных векторов x_1, \dots, x_n в исходном базисе.

Оказывается, что оператор допускает диагонализацию тогда и только тогда, когда алгебраическая и геометрическая кратности совпадают для каждого собственного числа. Если это не так, то диагонализация невозможна. Однако, всегда существует базис, в котором матрица оператора имеет *каноническую жорданову форму*.

4.1 Линейные операторы в евклидовых пространствах. Теорема Фредгольма

Пусть X — комплексное евклидово пространство и $A : X \rightarrow X$ — линейный оператор. Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax = y. \quad (4.5)$$

По определению, *ядро* оператора A — это множество $\text{Ker}A$ (на самом деле, подпространство) всех элементов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$. *Образ* оператора A — это множество $\text{Im}A$ (подпространство) всех элементов $y \in X$, для которых найдется $x \in X$ такой, что $y = Ax$.

Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A , если для любых x, y из X справедливо равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (4.6)$$

Теорема Фредгольма описывает условия разрешимости уравнения (4.5) в "геометрических" терминах. Именно,

1. $\dim \text{Ker}A = \dim \text{Ker}A^*$, то есть размерности подпространств решений уравнений $Ax = 0$ и $A^*z = 0$ совпадают;
2. оператор A обратим тогда и только тогда, когда $\dim \text{Ker}A^* = 0$ (т.е., когда решение системы $A^*z = 0$ тривиально);
3. уравнение $Ax = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(y, z) = 0$, $z \in \text{Ker}A^*$, т.е. правая часть уравнения ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения $A^*z = 0$.

Доказательство теоремы Фредгольма включает проверку справедливости ортогонального разложения пространства

$$X = \text{Ker}A^* \oplus \text{Im}A.$$

Теорема Фредгольма имеет замечательные и глубокие обобщения, например, в теории интегральных уравнений (см. ниже §21).

4.2 Самосопряженные операторы. Свойства собственных чисел и собственных векторов

Пусть X — комплексное евклидово пространство. Оператор $A : X \rightarrow X$ называется *самосопряженным* (эрмитовым), если

$$A = A^*.$$

Оператор U называется *унитарным*, если

$$UU^* = U^*U = I.$$

Последнее равенство эквивалентно тому, что $U^* = U^{-1}$. Унитарное преобразование сохраняет скалярное произведение векторов в X .

Аналогичные понятия вводят и в вещественном евклидовом пространстве, используя термины *симметричный* оператор и *изометрический* (ортогональный) оператор.

Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис в пространстве X . Тогда изображающая матрица a самосопряженного оператора A в этом базисе является *эрмитовой* матрицей, т. е. $a_j^k = \overline{a_k^j}$. Изображающая матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе является *унитарной* матрицей; ее столбцы представляют собой ортонормированные векторы в \mathbb{C}^n .

Несложно доказать, что собственные числа $\{\lambda_i\}$ самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны. Содержательным оказывается доказательство того, что собственные векторы самосопряженного оператора образуют базис в пространстве X . Этот базис всегда можно выбрать ортонормированным. Таким образом, самосопряженный оператор *допускает диагонализацию*. В базисе из собственных векторов его изображающая матрица \tilde{a} представляет собой диагональную матрицу: $\tilde{a} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

На языке матриц это приводит к следующему утверждению о диагонализации эрмитовой матрицы. Пусть a — эрмитова матрица. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ортонормированный базис f_1, \dots, f_n в \mathbb{C}^n такие, что

$$af_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\tilde{a} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и пусть b — (унитарная) матрица со столбцами f_1, \dots, f_n . Тогда

$$\tilde{a} = b^{-1}ab.$$

Аналогичные утверждения о диагонализации справедливы и для симметричных операторов в вещественном евклидовом пространстве (соответственно, для вещественных симметричных матриц).

ЛИТЕРАТУРА К §§2–4

1. В. А. Ильин, В. Г. Позняк, *Линейная алгебра*, 1980.
2. Г. Е. Шилов, *Конечномерные векторные пространства*, 1984.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Линейная алгебра*, методичка, часть 1.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, М. М. Фаддеев, *Линейная алгебра*, методичка, ч. 2.

5 Основы Анализа

5.1 Предел последовательности

Определение. Последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется функция натурального аргумента $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n = x(n)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел равный a , ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$) если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε), что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Свойства предела последовательности

1. *Единственность.* Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $a = b$.
2. *Предельный переход в неравенстве.* Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и для всех n выполнено неравенство $x_n \leq y_n$. Тогда $a \leq b$.
Замечание. К пределу можно переходить только в нестрогом неравенстве. Из условия $x_n < y_n$ не следует $a < b$. Пример: $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$.
3. *Принцип сжатой переменной.* Пусть при всех n члены последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ связаны неравенством $x_n \leq y_n \leq z_n$ и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Тогда существует предел последовательности y_n , равный a ($\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$).
4. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), то каждая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет тот же предел ($\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$).
5. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$.
3. Если $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся в себе, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Теорема (критерий Коши).

Для того, чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе.

5.2 Предел функции. Непрерывность

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 1. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен A ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для любого $x \neq x_0$ и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 2. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен A ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).

Теорема. *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0 + 0$ (x стремится к x_0 справа) равен A ($\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого x удовлетворяющего неравенству $0 < x - x_0 < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0 - 0$ (предел слева).

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$).

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на промежутке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке $x_0 \in (a, b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

Множество функций, непрерывных на промежутке $[a, b]$ обозначается через $C[a, b]$.

Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке.

Теорема (Больцано-Коши, I). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах промежутка принимает значения разных знаков ($f(a)f(b) < 0$). Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Теорема (Больцано-Коши, II). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C , лежащего между A и B найдется точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x_0) = C$.

Теорема (Вейерштрасса, I). Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена.

Теорема (Вейерштрасса, II). Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своих точной верхней и точной нижней граници, т.е. найдутся точки $x_0, x_1 \in [a, b]$ такие, что

$$f(x_0) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Теорема (Кантора). Если функция непрерывна на промежутке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом промежутке, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких что $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

5.3 Производная

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 1. Функция f дифференцируема в точке x_0 , если справедливо представление

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

$$\text{где } \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Определение 2. Функция f дифференцируема в точке x_0 , если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Этот предел называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Теорема. Определения 1 и 2 эквивалентны, причем $A = f'(x_0)$.

Геометрически $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы. Тогда

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ строго монотонна, дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0 , а функция $g(y)$ определена в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в точке y_0 . Тогда функция $g \circ f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , причем

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Дифференциалом $df(x_0)$ функции f в точке x_0 называется линейный функционал аргумента $\Delta x = x - x_0$ вида

$$df(x_0)[\Delta x] = f'(x_0)\Delta x.$$

Традиционно аргумент дифференциала обозначают dx . Таким образом

$$df(x_0)[dx] = f'(x_0)dx.$$

Производная вектор-функции $f(x)$ в точке x_0 определяется как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_0 + \Delta x) - \vec{f}(x_0)}{\Delta x}$. Пусть

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix},$$

(f_1, f_2, f_3 — координатные функции). Тогда

$$\frac{\vec{f}(x_0 + \Delta x) - \vec{f}(x_0)}{\Delta x} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x} \\ \frac{f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x} \\ \frac{f_3(x_0 + \Delta x) - f_3(x_0)}{\Delta x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ f'_2(x_0) \\ f'_3(x_0) \end{pmatrix},$$

т.е. производная вектор-функции — это вектор, координаты которого суть производные координатных функций.

5.4 Производные высших порядков

Пусть функция f дифференцируема в каждой точке x своей области определения, и ее производная $f'(x)$ также дифференцируема. Тогда определим вторую производную $f''(x)$ как производную от первой производной, т.е.

$$f''(x) = (f')'(x).$$

Аналогичным образом определяется производная $f^{(n)}(x)$ произвольного порядка n :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 . Тогда дифференциалом $d^n f(x_0)$ порядка n функции f в точке x_0 называется следующая функция аргумента $\Delta x = x - x_0$

$$d^n f(x_0)[\Delta x] = f^{(n)}(x_0)\Delta x^n.$$

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 . Тогда справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где для остаточного члена $R_n(x)$ имеет место представление (форма Лагранжа)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Обозначим $x - x_0$ через Δx . Тогда формула Тейлора может быть записана в следующем виде

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)[\Delta x]}{1!} + \frac{d^2f(x_0)[\Delta x]}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)[\Delta x]}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)[\Delta x]}{n + 1!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В частном случае $x_0 = 0$ формула Тейлора носит название формулы Маклорена. Приведем формулу Маклорена для основных элементарных функций.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \sin(\theta x + \frac{\pi}{2}(2k+3))$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos(\theta x + \frac{\pi}{2}(2k+2))$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}$
5. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$

5.5 Экстремум и выпуклость функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 .

Определение. Функция достигает в точке x_0 локального максимума (минимума), если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Локальный максимум или локальный минимум называется также локальным экстремумом.

Предположим дополнительно, что функция f дифференцируема. В этом случае необходимым условием локального экстремума в точке x_0 является равенство нулю первой производной ($f'(x_0) = 0$).

Рассмотрим различные формы достаточных условий.

Теорема 1. Пусть при переходе через точку x_0 функция $f'(x)$ меняет знак. Тогда если функция f' меняет знак с $+$ на $-$, то в точке x_0 функция f достигает локального

максимума, в противном случае (с — на +) — локального минимума. Если в окрестности точки x_0 функция $f'(x)$ сохраняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Теорема 2. Пусть функция f n раз ($n \geq 1$) непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 , причем $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда 1. если $n = 2k$ чётно, то функция $f(x)$ достигает в точке x_0 локального максимума, если $f^{(2k)}(x_0) < 0$ и локального минимума, если $f^{(2k)}(x_0) > 0$. 2. Если $n = 2k + 1$ — нечётно, то в точке x_0 у функции f экстремума нет.

Выпуклость, точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 . Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение. Функция f выпукла вверх в точке x_0 , если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $y - y_{\text{кас}} \leq 0$ и, соответственно, выпукла вниз, если выполнено противоположное неравенство $y - y_{\text{кас}} \geq 0$.

Определение. Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, если при переходе через точку x_0 график функции переходит с одной стороны касательной на другую, т.е. величина $y - y_{\text{кас}}$ меняет знак при переходе через точку x_0 .

Теорема. Пусть функция $f(x)$ n раз ($n \geq 2$) непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 , причем $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда 1. если $n = 2k + 1$ — нечётно, то x_0 — точка перегиба, 2. если $n = 2k$, то в точке x_0 функция f выпукла вверх, когда $f^{(2k)}(x_0) < 0$ и вниз, когда $f^{(2k)}(x_0) > 0$.

6 Интегралы

6.1 Определенный интеграл

Пусть функция f определена на интервале $[a, b]$. Разбиением δ интервала $[a, b]$ назовем набор точек x_0, x_1, \dots, x_n связанных между собой неравенствами $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длина k -ого интервала разбиения. Рангом разбиения $\mu(\delta)$ назовем максимальную длину элемента разбиения, т.е. $\mu(\delta) = \max_k \Delta x_k$.

Далее, для каждого $k = 1, \dots, n$ выберем точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ в k -ом интервале разбиения и составим сумму

$$\sigma_f(\delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Эта сумма носит название интегральной или римановой суммы. Значение интегральной суммы зависит от функции, от разбиения и от выбора точек ξ_k .

Определение. Если существует $\lim_{\mu(\delta) \rightarrow 0} \sigma_f(\delta, \{\xi_k\})$, то функция f называется интегрируемой, а соответствующий предел называется определенным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Если предела интегральных сумм не существует, то функция f называется неинтегрируемой.

Поясним, что существование предела $\sigma_f(\delta, \{\xi_k\})$ означает, что для любого ε найдется $\alpha > 0$ такое, что для любого разбиения δ , удовлетворяющего условию $\mu(\delta) < \alpha$ и для любого выбора точек $\{\xi_k\}$ справедливо неравенство

$$\left| \sigma_f(\delta, \{\xi_k\}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, близость интегральной суммы и интеграла определяется только рангом разбиения.

Теорема. *Для того, чтобы функция была интегрируемой необходимо, чтобы она была ограниченной.*

Для неотрицательной функции f значение интеграла равно площади подграфика функции f . В случае, когда функция f принимает значения различных знаков, значение интеграла равно разности площади части подграфика, лежащей выше оси OX и площади части подграфика, лежащей ниже оси OX .

Далее, пусть δ — некоторое разбиение интервала $[a, b]$. Для $k = 1, 2, \dots, n$ положим $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$, $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Величины $S_f(\delta) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ и $s_f(\delta) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ называются, соответственно верхней и нижней суммами Дарбу. Заметим, что для любого выбора точек ξ_k справедливы неравенства

$$s_f(\delta) \leq \sigma_f(\delta, \{\xi_k\}) \leq S_f(\delta).$$

Теорема (Дарбу). *Для того, чтобы функция f была интегрируемой необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{\mu(\delta) \rightarrow 0} (S_f(\delta) - s_f(\delta)) = 0.$$

6.2 Свойства определенного интеграла

Теорема. *Пусть функция $f \geq 0$ неотрицательна и интегрируема. Тогда $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.*

Если неотрицательная функция f непрерывна и в некоторой точке x_0 $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Следствие 1. *Если функции f, g интегрируемы и для всех x $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.*

Следствие 2. *Для любой интегрируемой функции f справедливо неравенство*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Теорема (о среднем). *Пусть функции f, φ непрерывны на $[a, b]$, причем функция φ сохраняет знак. Тогда существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(x_0) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Теорема (замена переменной). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, а функция φ строго монотонна, дифференцируема и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))du.$$

6.3 Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f определена на интервале (a, b) (возможно бесконечном).

Определение. Функция F называется первообразной функции f , если $\forall x \in (a, b) F'(x) = f(x)$.

Если функция F является первообразной f , то функция $F + C$, где C — произвольная константа, также является первообразной f . Покажем, что других первообразных нет. Действительно, если F_1 и F_2 — две первообразные одной и той же функции f , то $(F_2(x) - F_1(x))' = f(x) - f(x) = 0$ и, следовательно, $F_2 - F_1 = C$.

Определение. Пусть F первообразная функции f . Тогда множество $F(x) + C$, где C — произвольная константа, всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается $\int f(x)dx$.

1. формула интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

2. замена переменной в неопределенном интеграле. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то для любой дифференцируемой функции $\varphi(t)$ функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на интервале $[a, b]$. Тогда справедлива формула

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Из этой теоремы следуют, что для всякой непрерывной функции интеграл с переменным верхним пределом является ее первообразной, и, значит, отличается от любой ее другой первообразной на константу, т.е.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Полагая $x = a$, получаем $C = -F(a)$, а полагая теперь $x = b$, получаем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F — произвольная первообразная f .

7 Ряды

7.1 Сходящиеся ряды. Абсолютная сходимость

Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность.

Определение. Бесконечным рядом называется выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда, где $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, \dots , $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, \dots .

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм. Если этот предел не существует, то ряд называется расходящимся. Если ряд сходится, то суммой ряда назовем число S равное $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Необходимым условием сходимости ряда является условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Действительно, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Если ряд сходится, то переходя к пределу, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$.

Для $N = 1, 2, 3, \dots$ величину $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ назовем остатком ряда. Если ряд сходится, то сходится и любой из его остатков, и обратно, из сходимости какого-либо остатка следует сходимость ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то для любого N имеем

$$S = S_N + r_N.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем $\lim_{N \rightarrow \infty} r_N = 0$, т.е. остаток сходящегося ряда стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Определение. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Необходимое и достаточное условие сходимости ряда (Критерий Коши)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 0$ такое, что для любых $n > N$ и $p > 0$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Сходящиеся ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, при $p > 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$.

Расходящиеся ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p \leq 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| \geq 1$.

Условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ при $0 < p < 1$.

7.2 Признаки сходимости рядов

1. Ряды с положительными членами.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$ для всех n .

Теорема. Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были в совокупности ограничены.

Теорема (признак сравнения). Пусть есть два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, члены которых связаны при всех n неравенством $0 < u_n \leq v_n$. Тогда

1. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится.
2. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже расходится.

Следствие. Если последовательности u_n и v_n эквивалентны (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема (признак Даламбера). Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $q < 1$ и расходится, если $q > 1$.

Теорема (интегральный признак Коши). Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ $u_n = f(n)$, где f — непрерывная, убывающая функция. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

2. Знакопередающиеся ряды.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots$, где $u_n > 0$. Такие ряды называются знакопередающимися.

Теорема (признак Лейбница). Если последовательность u_n убывает и $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то

1. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится.
2. $|r_N| \leq u_{N+1}$.

Следствие. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ при $p \in (0, 1)$ условно сходятся.

7.3 Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a, b]$, определенных на интервале $[a, b]$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно (по $x \in [a, b]$) сходится к функции f (обозначение $f_n \rightrightarrows f$), если $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$

найдется номер N , зависящий только от ε , такой, что для любого $n > N$ и любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Если $f_n \rightrightarrows f$, то для любого $x \in [a, b]$ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Обратное, вообще говоря, не верно: из сходимости $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ для всех $x \in [a, b]$ не следует равномерная сходимость.

Рассмотрим теперь функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого суть функции, заданные на интервале $[a, b]$.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Теорема 1. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C[a, b]$. Тогда $f \in C[a, b]$, т.е. равномерный предел непрерывных функций также является непрерывной функцией.

Теорема 1'. Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in C[a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Тогда сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывной функцией.

Теорема 2. Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$. Далее пусть $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$,

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Тогда

1. $F_n \rightrightarrows F$,

2. $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$.

Теорема 2'. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $u_n \in C[a, b]$ – равномерно сходится, и пусть $v_n(x) =$

$\int_a^x u_n(t) dt$. Тогда

1. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится

2. $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$.

Теорема 3. Пусть функции f_n для всех $n \in \mathbb{N}$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, и для всех $x \in [a, b]$ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Далее, предположим, что последовательность f'_n равномерно сходится к некоторой функции φ ($f'_n \rightrightarrows \varphi$). Тогда 1. $f_n \rightrightarrows f$, 2. $f' = \varphi$.

Теорема 3'. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится для любого $x \in [a, b]$, функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится. Тогда

1. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Теорема (признак Вейерштрасса). Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leq M_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

8 Функции нескольких переменных

8.1 Дифференцирование и частные производные функции нескольких переменных

Рассмотрим случай функции двух переменных.

Определение. Окрестностью точки назовем любой открытый шар с центром в этой точке.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Определим частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ соответственно, полагая

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.\end{aligned}$$

Для частных производных по переменным x и y используются также обозначения f'_x и f'_y .

Определение. Функцию $f(x, y)$ назовем дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если справедливо представление $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$, где $\alpha(\Delta x, \Delta y) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, т.е. $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$.

Полагая в определении $\Delta y \equiv 0$ и устремляя Δx к нулю, получаем $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Аналогично, получаем $A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Если функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ также имеют частные производные, то мы можем определить частные производные старших порядков, полагая

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{и т.д.}$$

Теорема. Если функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в точке (x_0, y_0) , то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Из этой теоремы следует, что смешанные производные, различающиеся только порядком дифференцирования, совпадают между собой.

Определение. Дифференциалом $df(x_0, y_0)$ функции f в точке (x_0, y_0) называется линейная функция переменных $\Delta x, \Delta y$ вида

$$df(x_0, y_0)[\Delta x, \Delta y] = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Аналогичным образом вводится понятие дифференциалов старших порядков. Именно, дифференциал $d^n f(x_0, y_0)$ порядка n функции f в точке (x_0, y_0) есть однородная функция порядка n переменных $\Delta x, \Delta y$ вида

$$\begin{aligned} d^n f(x_0, y_0)[\Delta x, \Delta y] &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^{(n)} f(x_0, y_0) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, y_0) \Delta x^k \Delta y^{n-k}. \end{aligned}$$

Формула Тейлора для функции двух переменных

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)[\Delta x, \Delta y]}{1!} + \\ &+ \frac{d^2 f(x_0, y_0)[\Delta x, \Delta y]}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)[\Delta x, \Delta y]}{n!} + R_n, \end{aligned}$$

где остаточный член R_n представим в виде

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)[\Delta x, \Delta y]}{n+1!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

8.2 Экстремум функции нескольких переменных

Пусть $f(x), x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ — функция d переменных.

Определение. Функция f достигает в точке $x_0 \in \mathbb{R}^d$ локального максимума, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Аналогично, функция f достигает в точке x_0 локального минимума, если справедливо противоположное неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Предположим дополнительно, что функция f дифференцируема. В этом случае необходимым условием локального экстремума функции f в точке x_0 является равенство нулю первого дифференциала в этой точке, или, что то же самое, равенство нулю всех частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, d.$$

Чтобы сформулировать достаточное условие, мы должны предположить, что функция f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 . Рассмотрим второй дифференциал $d^2 f(x_0)$ функции f в точке x_0 , т.е. квадратичную форму с матрицей A составленной из производных второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Если квадратичная форма (At, t) , $t \in \mathbb{R}^d$ положительно определена (т.е. все собственные числа матрицы A положительные), то в точке x_0 функция f достигает локального минимума, если отрицательно определена — локального максимума.

Если квадратичная форма знакопеременная (есть собственные числа разных знаков), то в точке x_0 у функции f экстремума нет.

8.3 Условный экстремум

Рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ d переменных и поверхность в \mathbb{R}^d размерности $d - 1$, задаваемую условием $\varphi(x) = 0$. Пусть x_0 точка, лежащая на этой поверхности, т.е. $\varphi(x_0) = 0$.

Определение. Функция f достигает в точке x_0 условного максимума (минимума), если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющих условию $\varphi(x) = 0$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Предположим, что функции $f(x)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\|\nabla\varphi(x_0)\| > 0$.

Теорема (необходимое условие условного экстремума).

Если функция f достигает в точке x_0 условного экстремума, то существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0).$$

Таким образом, задача нахождения условного экстремума может быть сведена к задаче нахождения обычного безусловного экстремума, но не для функции f а для функции $\mathcal{L} = f - \lambda\varphi$, где λ — неизвестный параметр (множитель Лагранжа), для нахождения которого мы используем условие $\varphi = 0$.

Аналогичным образом решается задача нахождения условного экстремума в случае, когда условие задается с помощью нескольких дифференцируемых функций: $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_k(x) = 0$, $k < d$. Предположим, что в точке x_0 векторы $\nabla\varphi_1(x_0), \dots, \nabla\varphi_k(x_0)$ — линейно независимы.

Теорема. *Если функция достигает в точке x_0 условного экстремума, то существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x_0).$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ называются множителями Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА К §§5–8

1. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, тт. 1, 2.
2. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, тт. 1–3.

9 Кратные интегралы

9.1 Кратные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным

Определим для определенности двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику D . Пусть λ — разбиение прямоугольника, получающееся дроблением его сторон. Для

ячейки A разбиения λ положим

$$m_A = \inf_A f, \quad M_A = \sup_A f$$

и введем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$\sigma_*(f, \lambda) = \sum m_A S(A), \quad \sigma^*(f, \lambda) = \sum M_A S(A),$$

где $S(A)$ — площадь ячейки A . При продолжении разбиения нижняя сумма Дарбу σ_* может лишь увеличиться, а верхняя — лишь уменьшиться. Если

$$\sup \sigma_*(f, \lambda) = \inf \sigma^*(f, \lambda),$$

то их общее значение называется двойным интегралом от f по прямоугольнику D и обозначается

$$\iint_D f \, dS = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Интеграл от функции f по произвольному плоскому множеству Ω определяется равенством

$$\iint_{\Omega} f \, dS = \iint_D f \chi_{\Omega} \, dS,$$

где χ_{Ω} — характеристическая функция множества Ω :

$$\chi_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

а D — прямоугольник, содержащий Ω . Основные свойства двойного интеграла — его линейность, аддитивность и монотонность:

- 1) $\iint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) \, dS = \alpha \iint_{\Omega} f \, dS + \beta \iint_{\Omega} g \, dS, \quad \alpha, \beta = Const,$
- 2) $\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dS = \iint_{\Omega_1} f \, dS + \iint_{\Omega_2} f \, dS, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,$
- 3) $f \leq g \Rightarrow \iint_{\Omega} f \, dS \leq \iint_{\Omega} g \, dS.$

Тройные и вообще многократные интегралы определяются аналогично с той только разницей, что вместо термина «площадь» используется термин «объем» и dS заменяется на dV или (в декартовых координатах) $dx dy dz$.

Сведение двукратного интеграла к повторному обеспечивается теоремой Фубини.

Если $f(P, Q)$ — функция, интегрируемая на $A \times B$, где A и B — брусы, и если при всех $P \in A$ функции $f(P, Q)$ переменной $Q \in B$ интегрируемы на B , то функция $g(P) = \int_B f(P, Q) \, dQ$ интегрируема на A , причем

$$\iint_{A \times B} f(P, Q) \, dP dQ = \int_A dP \int_B dQ f(P, Q).$$

Если область интегрирования функции не является брусом, для применения теоремы Фубини подынтегральную функцию продолжают нулем за пределы области и интегрируют продолженную функцию по любому брусу, содержащему исходную область интегрирования. Например, для цилиндрической области Ω вида

$$\Omega = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

описанная процедура даст

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y).$$

9.2 Замена переменных в кратных интегралах. Полярные и сферические координаты

Пусть B — брус (прямоугольный параллелепипед) в \mathbb{R}^n , на котором определено непрерывно дифференцируемое отображение $\theta : B \rightarrow \mathbb{R}^n$, обратимое внутри B и с якобианом $\det \theta'$, не обращающимся в ноль нигде внутри B . Пусть, далее, f — функция, интегрируемая на $\theta(B)$. Тогда

$$\int_{\theta(B)} f \, dV = \int_B f \circ \theta \cdot |\det \theta'| \, dV$$

или, в координатном виде,

$$\begin{aligned} \int_{\theta(B)} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ = \int_B f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \cdot \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} \right| \, du_1 \dots du_n \end{aligned}$$

Ограничение области интегрирования криволинейных координат (u_1, \dots, u_n) брусом не существенно, поскольку функция f не предполагается непрерывной.

Формула отражает тот факт, что при замене переменных коэффициент искажения объема равен абсолютной величине якобиана замены переменных.

Полярные координаты (r, φ) связаны с декартовыми (x, y) равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Якобиан замены переменных равен

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому формула замены переменных в двойном интеграле примет вид

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr d\varphi$$

где D образ области B изменения полярных координат.

Вычислим, например, интеграл $\iint x \, dx dy$ по половине круга $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y$. В полярных координатах область интегрирования описывается неравенствами: $r \leq 2$, $\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$. Тогда

$$\iint_D x \, dx dy = \iint_B r^2 \cos \varphi \, dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^2 r^2 \, dr = -\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Сферические координаты (r, θ, φ) связаны с декартовыми (x, y, z) равенствами

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Якобиан замены переменных равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Поэтому формула замены переменных в тройном интеграле примет вид

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

где D образ области B изменения сферических координат.

Вычислим, например, интеграл $\iiint z \, dx dy dz$ по половине шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. В полярных координатах область интегрирования описывается неравенствами: $r \leq 2$, $\theta \leq \pi/2$. Тогда

$$\iiint_D z \, dx dy dz = \iiint_B r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^2 dr r^3 = 4\pi.$$

10 Векторные поля. Криволинейные и поверхностные интегралы

10.1 Криволинейные интегралы первого и второго рода. Определения, интерпретация

Гладкая кривая Γ на плоскости или в пространстве задается параметрически как образ некоторого гладкого пути $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, в координатном виде (в пространстве):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Путь $\gamma(t)$ эквивалентен пути $\alpha(s)$, $s \in [c, d]$, если $\gamma(t) = \alpha(\varphi(t))$, где φ — гладкая функция, производная которой нигде не обращается в ноль. Этим отношением пути, параметризующие кривую Γ , делятся на два не пересекающихся класса, каждый из которых состоит из эквивалентных между собой путей и называется ориентированной кривой. Каждый

из этих классов эквивалентных путей называется ориентацией данной кривой. Ориентацию кривой можно определить выбором одного из двух единичных касательных векторов $\tau_{\pm}(P)$

$$P = \gamma(t), \quad \tau_{\pm}(P) = \pm \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

непрерывно зависящих от точки P кривой. Если кривая не замкнута, ее ориентацию можно задать выбором начала и конца кривой (упорядочением концов). Ориентация составной (кусочно гладкой) кривой определяется тем условием, что начало каждого следующего куска кривой должно являться концом предыдущего.

Пусть Γ — гладкая кривая с параметризацией $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Пусть, далее, f — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на Γ . Интеграл

$$\int_{\Gamma} f \, dl \stackrel{\text{Опр.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt$$

не зависит от параметризации кривой и называется криволинейным интегралом 1 рода или интегралом по длине дуги. В частности, криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой. Интеграл от $f = 1$ даст длину кривой Γ . В координатном виде

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Физический смысл интеграла 1 рода заключен в следующем. Если ρ — линейная плотность тонкой тяжелой проволоки формы Γ , то масса проволоки определяется интегралом

$$M = \int_{\Gamma} \rho \, dl.$$

Пусть Γ — ориентированная гладкая кривая с параметризацией $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ и пусть τ — соответствующий единичный касательный вектор к Γ , определяющий ее ориентацию. Пусть, далее, \mathbf{F} — векторное поле, определенное на Γ . Криволинейный интеграл 1 рода вида

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \tau \, dl$$

называется криволинейным интегралом 2 рода по кривой Γ . Этот интеграл меняет знак при изменении ориентации кривой.

В координатном виде

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \tau \, dl = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) x'_i(t) \, dt,$$

где $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ и $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Интеграл в правой части равенства принято обозначать через

$$\int_{\Gamma} \sum F_i dx_i = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

и называть интегралом от дифференциальной формы $\sum F_i dx_i$.

Дифференциальная 1-форма ω в \mathbb{R}^n это функция, отображающая векторные поля в \mathbb{R}^n в скалярные так, что

$$\omega(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \omega(\mathbf{v}_1) + \omega(\mathbf{v}_2), \quad \omega(f\mathbf{v}) = f\omega(\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ и \mathbf{v} — векторные поля, а f — скалярная функция (поле). Можно также сказать, что дифференциальная 1-форма это отображение, которое точкам некоторой области в \mathbb{R}^n ставит в соответствие скалярные линейные функции в \mathbb{R}^n . Базис в пространстве линейных функций в \mathbb{R}^n с координатами (x_1, \dots, x_n) образуют дифференциалы dx_i

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n).$$

Разложение формы ω по базису принимает вид

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

Физический смысл интеграла 2 рода $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ — работа силы \mathbf{F} на пути Γ .

10.2 Поверхностные интегралы первого и второго рода

Простая гладкая поверхность Γ в \mathbb{R}^3 задается параметрически вектор-функцией $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенной на плоском множестве D , причем $\text{rank } \theta' = 2$ (столбцы в матрице Якоби линейно независимы). Координаты на D обозначим через u и v , они называются локальными координатами на поверхности Γ . Функцию θ называют параметризацией поверхности Γ . Вводя стандартные координаты (x, y, z) в \mathbb{R}^3 , определим функцию θ равенствами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Пусть, далее, f — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на Γ . Интеграл

$$\iint_{\Gamma} f dS \stackrel{\text{Опр.}}{=} \iint_D f(\theta(u, v)) \sqrt{\det(\theta^T \theta')} du dv,$$

не зависит от выбора параметризации поверхности и называется поверхностным интегралом 1 рода. Здесь θ'^T — матрица, транспонированная к матрице Якоби θ' . В координатном виде

$$\det(\theta'^T \theta') = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 = EG - F^2,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \left| \frac{\partial \theta}{\partial u} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

В случае явного задания поверхности $z = g(x, y)$

$$\iint_{\Gamma} f \, dS = \iint_D f(x, y, g(u, v)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx dy.$$

Физический смысл поверхностного интеграла 1 рода $\iint_{\Gamma} \rho \, dS$ — масса тонкой поверхности Γ с поверхностной плотностью ρ .

Поверхностный интеграл второго рода это интеграл от дифференциальной 2-формы.

Дифференциальная 2-форма ω в \mathbb{R}^3 представляет собой отображение, которое паре векторных полей в \mathbb{R}^3 ставит в соответствие скалярное поле так, что

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}), & \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2), \\ \omega(f\mathbf{v}, g\mathbf{w}) &= fg\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}), & \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_{1,2}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_{1,2}, \mathbf{w}$ — векторные поля, а f, g — скалярные функции (поля). В декартовых координатах 2-форма принимает вид

$$\omega = A(x, y, z) \, dy \wedge dz + B(x, y, z) \, dz \wedge dx + C(x, y, z) \, dx \wedge dy$$

и называется формой потока векторного поля $\mathbf{F} = (A, B, C)$. Ее можно интерпретировать как билинейную кососимметрическую функцию (внешнюю форму), коэффициенты которой зависят от точки пространства. При этом базисные формы $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ имеют простой геометрический смысл. Например, значение $dy \wedge dz$ на паре векторов равно с точностью до знака площади параллелограмма, построенного на проекциях этих векторов на плоскость y, z .

Определим интеграл от формы ω по ориентированной поверхности Γ , считая, что коэффициенты A, B, C заданы в точках поверхности Γ . Под ориентацией поверхности Γ будем понимать ориентацию области изменения локальных координат — ориентацию области D . Последняя определяется порядком локальных координат, пусть это будет именно (u, v) .

Сужением формы ω на параметризованную поверхность Γ называется 2-форма

$$\theta^* \omega = f(u, v) \, du \wedge dv,$$

где

$$\begin{aligned} f(u, v) &= A(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \\ &+ B(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + C(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \end{aligned}$$

По определению

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_D \theta^* \omega = \int_D f(u, v) \, du dv.$$

В классических терминах этот интеграл обозначается через

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

и называется поверхностным интегралом второго рода. Он имеет смысл потока векторного поля \mathbf{F} через поверхность Γ . Здесь $d\mathbf{S}$ — вектор, составленный из базисных 2-форм. Как видно, интеграл второго рода зависит от ориентации поверхности. Если изменить ориентацию, то в силу $dv \wedge du = -du \wedge dv$ интеграл $\int_G \omega$ изменит знак. Вместе с тем, при сохранении ориентации интеграл не зависит от выбора параметризации поверхности. Последнее вытекает из формулы замены переменных в двойном интеграле.

10.3 Операторы grad, div, rot, Δ

В евклидовом пространстве (т.е. на пространстве со скалярным произведением) каждой линейной функции может быть взаимно однозначно сопоставлен вектор. В частности, если α — 1-форма на евклидовом пространстве, то ей отвечает вектор \mathbf{a} такой, что

$$\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{b}.$$

Градиентом функции f называется векторное поле, которое по описанному правилу соответствует дифференциалу функции:

$$df(\mathbf{b}) = \text{grad } f \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{b}.$$

Выбирая здесь в качестве \mathbf{b} базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ найдем, что в декартовых координатах

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Градиент функции перпендикулярен поверхностям уровня ($f = C$) функции и направлен в сторону наибольшего возрастания функции.

Ротор векторного поля может быть определен только в трехмерном евклидовом пространстве. В декартовых координатах ротор векторного поля $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ может быть получен по формуле

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Инвариантно ротор может быть описан благодаря формуле Стокса, откуда

$$(\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(M) = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{S(\Gamma)}.$$

Здесь Γ — кусок поверхности, стягивающийся к точке M , $S(\Gamma)$ — площадь Γ , \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности Γ , определяющий ее ориентацию. Таким образом, поверхностная плотность циркуляции поля по бесконечно малой окружности равна проекции ротора на нормаль к данной окружности (физический смысл ротора).

Ротор также может быть описан на языке форм. Если $\mathcal{F} = P dx + Q dy + R dz$ — 1-форма, отвечающая вектору \mathbf{F} , то ее внешний дифференциал даст форму потока ротора:

$$i_{\text{rot } \mathbf{F}} \Omega = d\mathcal{F}, \quad \Omega = dx \wedge dy \wedge dz,$$

— координаты $d\mathcal{F}$ в базисе $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ совпадают с координатами ротора.

В декартовых координатах дивергенция векторного поля $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ определяется как функция

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Инвариантное определение дивергенции вытекает из формулы Гаусса–Остроградского, откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{\iint_{\partial \Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}{V(\Gamma)}.$$

Здесь Γ — связная область с гладкой границей, стягивающаяся к точке M , $V(\Gamma)$ — объем Γ , \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе области Γ . Таким образом, дивергенция это объемная плотность потока вектора через границу области (физический смысл).

Дивергенция может быть охарактеризована также на языке форм. Внутреннее произведение вектора \mathbf{F} на форму объема $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ превращает вектор \mathbf{F} в 2-форму — форму потока вектора \mathbf{F} . Ее внешний дифференциал есть 3-форма, пропорциональная форме Ω . Коэффициент пропорциональности и есть дивергенция:

$$d_{\mathbf{F}}\Omega = d(P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy) = \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \Omega.$$

Оператор Лапласа функции f нескольких переменных определяется равенством

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

В декартовых координатах в случае функции трех переменных

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \operatorname{div} (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

откуда

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Все описанные выше операции в декартовых координатах удобно записывать с использованием оператора Гамильтона. Оператор Гамильтона “набла” ∇ является векторнозначным дифференциальным оператором вида

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f, \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}, \\ \Delta f &= \nabla^2 f, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Для удобства вычислений играет важную роль тот факт, что как всякое дифференцирование оператор “набла” подчиняется правилу Лейбница дифференцирования произведений. Например,

$$\operatorname{div} (f\mathbf{F}) = \nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

10.4 Формула Грина. Потенциал векторного поля на плоскости

Пусть D — ориентированная связная область на плоскости с кусочно гладкой границей ∂D , ориентированной согласованно. Последнее означает, что если базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, определяющий ориентацию области, посадить в гладкую точку границы и сделать первый вектор базиса вектором внешней нормали к границе, а второй вектор — касательным к границе, то этот касательный вектор и задаст ориентацию данного куска границы (граница области D может состоять из конечного числа кусков, каждый из которых является простой замкнутой кривой). Это согласование приводит к следующему правилу: обходить границу области надо в таком направлении, чтобы область все время лежала слева.

Если теперь ω — дифференциальная 1-форма, определенная на области D , то согласно общей формуле Стокса

$$\iint_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Это и есть формула Грина. В координатном виде формула Грина примет вид

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (10.1)$$

Введем единичный касательный вектор к границе $\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, где угол α образован направлением вектора τ и осью абсцисс. Запишем криволинейный интеграл второго рода слева через криволинейный интеграл первого рода и интеграл от 2-формы справа через двойной интеграл, получим

$$\int_{\partial D} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

Заметим, далее, что вектор $\mathbf{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ является вектором внешней нормали к границе ∂D . Введем векторное поле $\mathbf{F} = (Q, -P)$. Тогда формула Грина переписется в виде

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy.$$

Под независимостью криволинейного интеграла от пути интегрирования понимают равенство

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega,$$

где ω — 1-форма, а Γ_1, Γ_2 — две произвольные кривые в области определения формы ω , имеющие одно и то же начало и один и тот же конец. Иначе говоря, интеграл от 1-формы ω не зависит от пути интегрирования, если интеграл по любому замкнутому контуру от этой формы равен нулю.

Если фиксировать начальную точку кривой и менять ее конечную точку, то в условиях независимости интеграла от пути получим функцию

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega,$$

которая называется потенциалом формы ω : $\omega = df$. Иначе говоря, интеграл от формы ω не зависит от пути тогда и только тогда, когда форма точна (1-форма на плоскости, являющаяся дифференциалом функции называется точной). Потенциал определен неоднозначно, в случае связной области он определяется с точностью до константы.

Для точности 1-формы необходимо, чтобы она была замкнута $d\omega = 0$. В координатном виде форма $\omega = P dx + Q dy$ замкнута, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Это условие будет достаточным для точности формы ω , если область стягивается в точку (односвязна).

В окрестности нуля потенциал может быть восстановлен по формуле Пуанкаре

$$f(x, y) = \int_0^1 dt [P(tx, ty)x + Q(tx, ty)y],$$

что соответствует интегрированию формы ω по отрезку прямой, соединяющему начало координат и точку (x, y) .

10.5 Формула Гаусса–Остроградского

Пусть Γ — замкнутая ориентированная область в \mathbb{R}^3 с гладким краем, ориентированным согласованно. Последнее означает, что ориентация края определяется касательным базисом (τ_1, τ_2) таким, что векторы $(\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2)$, где \mathbf{n} — вектор внешней единичной нормали к $\partial\Gamma$, образуют базис ориентации области.

Пусть теперь ω — дифференциальная 2-форма, определенная на Γ . Согласно общей формуле Стокса

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Это и есть формула Гаусса–Остроградского. В координатном виде

$$\begin{aligned} \omega &= A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy, \\ d\omega &= dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

В классических обозначениях $\omega = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ и $d\omega = \operatorname{div} \mathbf{F} dx \wedge dy \wedge dz$, где $\mathbf{F} = (A, B, C)$, $d\mathbf{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$. Учитывая связь интегралов 1 и 2 родов, формула Стокса может быть переписана в виде

$$\iint_{\partial\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Полученная формула читается так: поток вектора через поверхность тела Γ равен интегралу от дивергенции вектора.

ЛИТЕРАТУРА К §§9, 10

1. А. Я. Дороговцев, *Математический анализ*, Вища школа, 1985.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 2, Наука, 1974.
3. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных*, тт. 1-2, Наука, 1972.
4. Edwards C.H., *Advanced calculus of several variables*, Dover Publications, Inc., 1994.

11 Дифференциальные уравнения

11.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения задачи Коши

Пусть D некоторая область в \mathbb{R}^{n+1} . Она называть ее конфигурационным пространством.

Поле направлений в D называется семейство прямых, такое, что каждой точке $P \in D$ поставлена в соответствие некоторая прямая γ_P данного семейства, которая проходит через точку P .

Интегральными кривыми заданного поля направлений называются гладкие кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с соответствующими прямыми поля направлений.

Введем декартовы координаты (x, y_1, \dots, y_n) в области \mathbb{R}^{n+1} . Прямая однозначно задается точкой, через которую она проходит, и направляющим вектором. Предполагая, что среди прямых поля нет перпендикулярных к оси x , условимся направляющий вектор нормировать так, чтобы его первая координата была равна единице. Этим условием направляющий вектор будет определен однозначно. Если теперь прямая γ_P поля направлений соответствует точке P с координатами (x, y_1, \dots, y_n) , то ее направляющий вектор как функция этой точки запишется в виде

$$(1, f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n))$$

или, кратко, $(1, \vec{f}(x, \vec{y}))$. Направляющий вектор касательной к кривой $\vec{y} = \vec{y}(x)$ в той же точке будет равен $(1, \vec{y}')$. Равенство данных направляющих векторов и ведет к дифференциальному уравнению

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

Таким образом, с геометрической точки зрения, решить задачу Коши — это найти интегральную кривую заданного поля направлений, проходящую через данную точку.

Рассмотрим задачу Коши

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{b}.$$

Теорема Пикара утверждает:

Если функция \vec{f} непрерывна (как функция двух переменных x и \vec{y}) и равномерно по x липшицева по \vec{y} , то в некоторой окрестности начальной точки задачи Коши последняя имеет и при том единственное решение.

При этом \vec{f} равномерно по x липшицева по \vec{y} , если

$$|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)| \leq k|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|,$$

где k не зависит от x . Например, для равномерной липшицевости достаточно, чтобы функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ была ограниченно дифференцируема по \vec{y} .

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y' = 2 \frac{y}{x}.$$

Все его решения имеют вид $y = Cx^2$. Ясно, что решения, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, не существует. Далее, взяв начальное условие вида $y(1) = 1$ мы видим, что функции, определенные равенством

$$y = \begin{cases} Cx^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

являются решением рассматриваемой задачи Коши. Таким образом, нарушается как существование, так и единственность решения задачи Коши, что связано с невыполнением условий теоремы Пикара — функция в правой части не является непрерывной.

Второй пример, в котором нарушается липшицевость правой части имеет вид

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0,$$

Это уравнение кроме нулевого имеет решение $y = x^3$. Нарушена единственность.

11.2 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Пространство решений. Определитель Вронского

Однородное линейное дифференциальное уравнение 2-ого порядка это уравнение вида

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

где x меняется на некотором интервале, а функции p_0, p_1 непрерывны на этом интервале. Задача Коши ставится присоединением к дифференциальному уравнению начальных условий

$$y(x_0) = b_1, \quad y'(x_0) = b_2,$$

где x_0 — фиксированная точка интервала, на котором рассматривается дифференциальное уравнение. Согласно общей теореме решение описанной выше задачи Коши существует и определено однозначно. Более того, ввиду специфики линейных уравнений это решение определено на всем рассматриваемом интервале.

Если ввести обозначение

$$L(y) = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y,$$

уравнение примет вид $L(y) = 0$. Оператор L является линейным оператором:

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2),$$

здесь $c_{1,2}$ — постоянные множители. Как следствие, множество решений однородного уравнения является двумерным линейным пространством, то есть может быть описано как семейство функций вида

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

где y_1, y_2 — базис в пространстве решений или, что то же, фундаментальная система решений. Решения фундаментальной системы могут быть определены, например, как решения, отвечающие следующим начальным условиям:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1.$$

Вронскиан двух дифференцируемых функций y_1 и y_2 определяется как функция вида

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Если функции y_1, y_2 линейно зависимы, их вронскиан равен тождественно нулю. Если эти функции являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, верно и обратное. Более того, если определитель Вронского решений этого уравнения равен нулю хотя бы в одной точке, то решения линейно зависимы. Если вронскиан решений не равен нулю хотя бы в одной точке, то он не равен нулю везде и решения будут линейно независимы на любом интервале в области непрерывности коэффициентов рассматриваемого уравнения.

Имеет силу также следующая формула Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}.$$

Определитель Вронского позволяет по известному решению линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка построить фундаментальную систему решений. Именно, решение y_2 , линейно независимое от известного решения y_1 , имеет вид

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx,$$

где $W(x) \neq 0$.

11.3 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Линейное неоднородное дифференциального уравнение 2-ого порядка это уравнение вида

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

где x меняется на некотором интервале, а функции p_0, p_1 и q непрерывны на этом интервале, причем $q(x) \not\equiv 0$.

Общее решение неоднородного уравнения является суммой частного решения y_* неоднородного уравнения и общего решения Y однородного уравнения:

$$y(x) = y_*(x) + Y(x), \quad Y(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x),$$

здесь v_1, v_2 — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Если известна фундаментальная система решений однородного уравнения мы можем построить частное решение неоднородного уравнения в квадратурах.

Итак, пусть

$$L(y) = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

и v_1, v_2 — фундаментальная система решений уравнения $L(y) = 0$. Будем искать решение уравнения $L(y) = q$ в виде

$$y = u_1v_1 + u_2v_2,$$

где u_1, u_2 — пока неизвестные функции. Тогда полагая

$$u_1'v_1 + u_2'v_2 = 0,$$

приходим к системе

$$\begin{cases} v_1u_1' + v_2u_2' = 0, \\ v_1'u_1 + v_2'u_2 = q. \end{cases}$$

Рассматривая ее как алгебраическую для определения u_1', u_2' , мы видим, что она однозначно разрешима, поскольку ее определитель равен определителю Вронского W решений v_1, v_2 . По формулам Крамера найдем

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ q & v_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-v_2q}{W}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & q \end{vmatrix}}{W} = \frac{v_1q}{W},$$

следовательно,

$$u_1 = - \int \frac{v_2q}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{v_1q}{W} dx.$$

11.4 Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим вначале однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Запишем ее в матричном виде

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

Здесь A — постоянная матрица порядка n и \vec{y} — искомая вектор-функция переменной x . Решение задачи Коши для этого уравнения с начальными данными $\vec{y}(0) = \vec{b}$ дается формулой

$$\vec{y} = e^{Ax}\vec{b},$$

поскольку

$$(e^{Ax})' = Ae^{Ax} \quad \text{и} \quad e^{A0} = I.$$

При этом матричная экспонента определяется как сумма ряда

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

где A — квадратная матрица. Ряд сходится, поскольку каждый компонентный ряд имеет мажоранту

$$\sum \frac{\|A\|^n}{n!},$$

где $\|A\|$ — матричная норма (наилучшая константа C в неравенстве $\|A\mathbf{a}\| \leq C\|\mathbf{a}\|$).

Для вычисления матричной экспоненты можно матрицу A привести к жордановой форме Λ , при этом

$$A = T\Lambda T^{-1} \quad \text{и} \quad e^A = Te^{\Lambda}T^{-1}.$$

Столбцами матрицы перехода T являются собственные и присоединенные векторы матрицы A , в базисе из которых она принимает жорданову форму.

Каждая жорданова клетка является матрицей вида $\lambda I + N$, где N — матрица, у которой ряд выше главной диагонали занимают единицы, а остальные места заполнены нулями. При этом $N^k = 0$, где k — порядок жордановой клетки. Тогда

$$e^{\lambda I + N} = e^{\lambda} \left(I + N + \dots + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Другой способ построения экспоненты состоит в следующем. Матричная экспонента ищется в виде многочлена степени на единицу меньше, чем порядок матрицы, при этом искомым многочлен должен совпадать с экспонентой на спектре матрицы (в случае кратных корней следует приравнять и производные).

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{b},$$

дается формулой

$$\vec{y} = R(x, x_0)\vec{b} + \int_{x_0}^x R(x, t)\vec{f}(t) dt,$$

где

$$R(x, x_0) = e^{A(x-x_0)}.$$

— разрешающий оператор для этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 2, Наука, 1974.
2. Л. Шварц, *Анализ*, т. 2, Мир, 1972.

12 Ряды и интегралы Фурье

12.1 Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Признак равномерной сходимости

Пусть a_n и b_n — две последовательности комплексных чисел. Тригонометрическим рядом называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

где

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

И наоборот,

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n (\cos nx + i \sin nx) + c_{-n} (\cos nx - i \sin nx) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Это позволяет определить комплексную форму тригонометрического ряда как ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Переход от вещественной формы к комплексной и наоборот осуществляется описанным выше пересчетом коэффициентов.

Пусть тригонометрический ряд удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий

- ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сходятся,
- ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}|$ сходятся.

Тогда тригонометрический ряд сходится равномерно на \mathbb{R} к непрерывной 2π -периодической функции f , причем

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эквивалентность условий теоремы элементарна. Далее, в силу

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|,$$

тригонометрический ряд имеет мажорантный сходящийся ряд $\sum_{n \geq 1} (|c_n| + |c_{-n}|)$, не зависящий от x . В силу признака Вейерштрасса он сходится равномерно на \mathbb{R} . Поскольку члены тригонометрического ряда являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π , таковой будет и сумма ряда. Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ряд

$$c_0 e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{-ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

равномерно сходится к функции $f(x)e^{-ikx}$ и этот ряд можно почленно интегрировать. Все члены ряда при интегрировании по интервалу $[0, 2\pi]$ обращаются в ноль, за исключением слагаемого с номером $n = k$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = c_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Соотношения для a_k и b_k вытекают из формул пересчета. В формулах для коэффициентов интегрирование можно вести по любому интервалу длиной 2π .

12.2 Ортонормированные системы. Ряд Фурье по ортонормированной системе, сходимости в среднем. Равенство Парсеваля

Комплексное векторное пространство V со скалярным произведением $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ называется евклидовым. Напомним свойства скалярного произведения (см. §3):

1. $\langle \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a} | \mathbf{c} \rangle + \mu \langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle = \overline{\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle}$,
3. $\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle \geq 0$,
4. $\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Заметим, что

$$\langle \mathbf{a} | \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle + \bar{\mu} \langle \mathbf{a} | \mathbf{c} \rangle.$$

Неотрицательное число

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle}$$

называется эрмитовой нормой вектора \mathbf{a} . Как и всякая норма, эрмитова удовлетворяет свойствам

1. $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\|$,
2. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$,
3. $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Важное свойство скалярного произведения выражает неравенство Шварца

$$|\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

Функция

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$$

имеет смысл расстояния между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Последовательность векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ называется ортонормированной, если эти векторы взаимно ортогональны и имеют длину равную единице:

$$\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Для произвольного вектора $\mathbf{a} \in V$ числа

$$c_n(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a} | \mathbf{e}_n \rangle$$

называются коэффициентами Фурье вектора \mathbf{a} относительно ортонормированной системы (\mathbf{e}_n) .

Следующая теорема устанавливает основное геометрическое свойство коэффициентов Фурье: минимизирующее свойство коэффициентов Фурье. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — произвольная ортонормированная система и \mathbf{a} — произвольный вектор из V . Функция

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left\| \mathbf{a} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_k \right\|, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C},$$

достигает своего наименьшего значения при условии

$$\lambda_1 = c_1(\mathbf{a}), \dots, \lambda_n = c_n(\mathbf{a}),$$

т.е. на коэффициентах Фурье вектора \mathbf{a} относительно данной ортонормированной системы.

Если $\Delta(c_1(\mathbf{a}), \dots, c_n(\mathbf{a})) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что вектор \mathbf{a} разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе (\mathbf{e}_n) и пишут

$$\mathbf{a} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mathbf{a}) \mathbf{e}_n.$$

Для данного разложения необходимо и достаточно выполнение равенства Парсеваля

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\mathbf{a})|^2,$$

вытекающего из теоремы Пифагора.

Пространство комплекснозначных непрерывных 2π -периодических функций является комплексным векторным пространством: такие функции можно складывать и умножать на комплексные числа не выходя за рамки этого множества функций. Превратим это пространство в унитарное, введя в нем скалярное произведение

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Обозначим это унитарное пространство через $C_{2\pi}$. Через $e_n, n \in \mathbb{Z}$, будем обозначать функции $x \mapsto e^{inx}$. Покажем, что функции e_n образуют ортонормированную систему в $C_{2\pi}$:

$$\langle e_n | e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{nm}.$$

Если f — произвольная функция из $C_{2\pi}$, то ее коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы (e_n) равны

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Заметим, что в силу леммы Римана-Лебега $c_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для $f \in C_{2\pi}$ равенство Парсеваля

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

действительно имеет силу, так что функции из $C_{2\pi}$ разлагаются в тригонометрический ряд Фурье, при этом пишут

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}.$$

Однако ряд в правой части этого равенства может не сходиться в обычном смысле. Это равенство означает лишь, что

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \right|^2 dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, иначе говоря, ряд Фурье функции из $C_{2\pi}$ сходится к ней в среднеквадратичном.

12.3 Задача Штурма–Лиувилля. Свойства собственных функций

Оператор L , формально определенный равенством

$$L(y) = \frac{-(py')' + qy}{\rho}$$

называется оператором Штурма–Лиувилля. Он рассматривается на линейном пространстве дважды дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих краевым (граничным) условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Под задачей Штурма–Лиувилля понимают задачу отыскания собственных функций и собственных значений оператора Штурма–Лиувилля, то есть таких пар (y, λ) с $y \neq 0$, для которых $L(y) = \lambda y$ или в явном виде

$$-(py')' + qy = \lambda \rho y.$$

Предполагается, что p, q и ρ — вещественные непрерывные функции, причем p — непрерывно дифференцируема, а p и ρ — неотрицательны. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ считаются вещественными и такими, что

$$(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0 \neq (\beta_1, \beta_2).$$

Краевые условия

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

называются условиями Дирихле. Краевые условия

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$$

называются условиями Неймана.

Оператор L и соответствующая задача Штурма–Лиувилля называются регулярными, если $p, \rho > 0$.

На описанном выше пространстве функций (дважды дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям) введем скалярное произведение и норму

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f \bar{g} \rho dx, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}.$$

Отметим некоторые свойства решений регулярной задачи Штурма–Лиувилля.

1. Корни собственных функций просты.

Действительно, если $y(x_0) = 0$ и $y'(x_0) = 0$, то в силу единственности решения задачи Коши $y(x) \equiv 0$.

2. Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до множителя собственная функция (т.е. собственные числа оператора Штурма–Лиувилля — простые), что также вытекает из теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

3. Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля вещественны. Соответствующие им собственные функции могут быть выбраны вещественными.

Для доказательства заметим, сначала, что интегрирование по частям два раза приводит к равенству

$$\langle L[f]|g \rangle = \langle f|L[g] \rangle.$$

Это свойство называется симметричностью оператора L . Если теперь y — собственная функция, отвечающая собственному значению λ , то

$$\lambda \|y\|^2 = \langle L[y]|y \rangle = \langle y|L[y] \rangle = \bar{\lambda} \|y\|^2,$$

откуда в силу $\|y\| \neq 0$ получаем $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. λ — вещественно.

Далее заметим, что в силу линейности уравнения $L[y] = \lambda y$ и вещественности функций p, ρ и q отдельно вещественная и мнимая части собственной функции y будут являться решениями этого уравнения.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать вещественность собственных функций.

4. Различным собственным значениям λ_1 и λ_2 отвечают ортогональные собственные функции y_1 и y_2 :

$$\langle y_1 | y_2 \rangle = \int_a^b y_1 y_2 \rho dx = 0.$$

Действительно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle y_1 | y_2 \rangle = \langle L[y_1] | y_2 \rangle - \langle y_1 | L[y_2] \rangle = 0.$$

5. Собственные числа образуют бесконечную монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к бесконечности

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Это свойство по существу вытекает из так называемого вариационного принципа. Для определенности сформулируем его для случая граничных условий Дирихле. Именно, наименьшее значение квадратичного функционала $I(y) = \langle L(y) | y \rangle$ при условиях

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \|y\| = 1,$$

достигается и равно

$$\min I(y) = \lambda_1, \quad \lambda_1 = I(y_1),$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение соответствующей задачи Штурма–Лиувилля и y_1 — соответствующая собственная функция, $\|y_1\| = 1$. Более того, пусть y_1, y_2, \dots, y_{n-1} — ортонормированная система собственных функций, отвечающих первым $n-1$ собственным числам задачи Штурма–Лиувилля, расположенным в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1}$. Тогда наименьшее значение квадратичного функционала $I(y)$ при условиях

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \|y\| = 1, \quad y \perp y_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, (n-1),$$

достигается, причем

$$\min I(y) = \lambda_n, \quad \lambda_n = I(y_n),$$

где λ_n — n -ое собственное значение рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля и y_n — соответствующая собственная функция.

6. Полная ортонормированная система собственных функций регулярной задачи Штурма–Лиувилля замкнута, (то есть ряд Фурье по такой системе сходится к функции в среднеквадратичном).

12.4 Интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка, преобразование Фурье свертки

Пусть функция $f(x)$ — непрерывная (кусочно-непрерывная) и абсолютно интегрируемая на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Тогда определено отображение

$$F: f \mapsto \widehat{f} = Ff, \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

называемое преобразованием (оператором) Фурье. Оператор Фурье F является линейным (ввиду линейности интеграла):

$$\widehat{\lambda f + \mu g} = F(\lambda f + \mu g) = \lambda Ff + \mu Fg = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g},$$

здесь $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы. Отметим также следующие очевидные свойства преобразования Фурье функции f .

1. $\widehat{f}(\xi)$ — ограниченная функция, причем

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

где

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} = \sup |\widehat{f}(\xi)|, \quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

2. $\widehat{f}(\xi)$ — равномерно непрерывная функция.
3. $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ (лемма Римана-Лебега).

Формула обращения составляет содержание теоремы Фурье:

Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на вещественной оси и пусть она дифференцируема в точке x . Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является дифференцируемой и абсолютно интегрируемой на вещественной оси, то преобразование Фурье

$$F: f \mapsto \widehat{f} = Ff, \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

имеет обратное преобразование

$$F^{-1} : \widehat{f} \mapsto f = F^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Заметим, что если функция \widehat{f} является абсолютно интегрируемой, то обратное преобразование Фурье F^{-1} можно описать равенством

$$F^{-1} = F^* \equiv PF,$$

где оператор P является оператором «отражения»

$$P : f(x) \mapsto f(-x).$$

Сверткой функций f и g на вещественной оси называется интеграл

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt. \quad (12.1)$$

Для сходимости интеграла достаточно, например, потребовать непрерывности и абсолютной интегрируемости функции f и непрерывности и ограниченности функции g или наоборот. Свертка коммутативна:

$$f * g = g * f.$$

Для приложений обычно достаточно следующего утверждения. Пусть функции f и g — непрерывны и абсолютно интегрируемы на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty.$$

Тогда

$$(Ff) * g = F(f \cdot F^*g).$$

По существу это утверждение совпадает с утверждением о преобразовании Фурье свертки:

Если функции f и g — непрерывны, абсолютно и квадратично интегрируемы:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx < +\infty, \end{aligned}$$

то свертка $f * g$ является абсолютно интегрируемой функцией и

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

(Использование более общего понятия интеграла — интеграла Лебега — позволяет отказаться в этом утверждении от квадратичной интегрируемости функций).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Дороговцев, *Математический анализ*, Вища школа, Киев, 1985.
2. П. Н. Князев, *Интегральные преобразования*, Вышэйшая школа, Минск, 1969.
3. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т.2, Наука, М., 1974.
4. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Функции одного переменного*, часть 3, Наука, М., 1970.

13 Вариационное исчисление

13.1 Первая вариация интегрального функционала. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера–Лагранжа

Простейшая вариационная задача это задача отыскания гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

так, чтобы достигалось наименьшее (наибольшее) значение интеграла вида

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

где $F(x, y, z)$ — заданная достаточно гладкая (дважды непрерывно дифференцируемая, например) функция трех переменных.

Ограничим себя решением следующего вопроса.

Пусть известно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, которая удовлетворяет граничным условиям и минимизирует интеграл $I[y]$. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет $y(x)$?

Для сравнения с $y(x)$ введем однопараметрическое семейство функций $Y(x, t)$:

$$Y(x, t) = y(x) + t\eta(x),$$

где $\eta(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая нулевым граничным условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

а t — параметр семейства. Функция η называется вариацией минимизирующей функции y часто обозначается через δy .

Замещая y и y' в интеграле I на Y и Y' соответственно, получаем интеграл

$$\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx, \quad (13.1)$$

который при заданной функции $\eta(x)$ зависит только от t . Здесь

$$Y' = Y'_x(x, t) = y'(x) + t\eta'(x).$$

При $t = 0$ функция $\varphi(t)$ имеет минимум. По теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Величина $\varphi'(0)$ линейно зависит от η , обозначается через $\delta I[\eta]$ и называется первой вариацией функционала I . Выполнение равенства

$$\delta I[\eta] = 0$$

для любой вариации η является необходимым условием экстремума функционала I .

Замечая, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial t} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta' \right) dx.$$

находим

$$\delta I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx.$$

Интегрирование по частям во втором подынтегральном слагаемом ведет к равенствам

$$\delta I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

По основной лемме вариационного исчисления последнее равенство при произвольной вариации η возможно лишь при условии

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Это и есть уравнение Эйлера–Лагранжа, выражающее необходимое условие экстремума интегрального функционала I . Это дифференциальное уравнение второго порядка, которому должна удовлетворять гладкая минимизирующая функция y .

Решения уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалами интегрального функционала I .

13.2 Естественные граничные условия

Это условия на экстремали в вариационных задачах со свободными концами.

Для определенности найдем экстремали интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

удовлетворяющие граничному условию

$$y(x_1) = y_1.$$

Условие же на $y(x_2)$ не ставится (свободный конец). Как и в случае простейшей задачи вариационного исчисления введем однопараметрическое семейство функций сравнения

$$Y(x, t) = y(x) + t\eta(x),$$

где y — экстремаль задачи и

$$\eta(x_1) = 0.$$

Условия гладкости стандартные: функции F и y считаются дважды непрерывно дифференцируемыми, функция η — непрерывно дифференцируемой.

Подставляя сравниваемую функцию Y в интеграл, получаем функцию переменной t

$$\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx.$$

Равенство нулю первой вариации

$$\varphi'(0) = 0,$$

является необходимым условием экстремальности функции y , при этом

$$\varphi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx.$$

Однако интегрирование по частям в втором слагаемом на этот раз ведет к равенству

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta \right) \Big|_{x=x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] dx = 0.$$

Как и ранее η — произвольная, в частности, возможно взять функцию η , удовлетворяющую нулевому условию в точке x_2 : $\eta(x_2) = 0$, что уничтожает внеинтегральный член. Тогда по основной лемме вариационного исчисления снова приходим к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

При выполнении уравнения Эйлера–Лагранжа необходимое условие сводится к равенству

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta \right) \Big|_{x=x_2} = 0.$$

Выбирая теперь функцию η так, чтобы $\eta(x_2) = 1$, получаем естественное условие на правом конце

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_2} = 0.$$

Если бы левый конец был также свободным, мы получили бы аналогичное естественное условие на левом конце

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

13.3 Задача Лагранжа

Рассмотрим еще один вид вариационных задач на условный экстремум, называемых задачами Лагранжа. Пусть пространственная кривая $y = y(x)$, $z = z(x)$, соединяющая фиксированные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и лежащая на данной поверхности, заданной уравнением

$$G(x, y, z) = 0,$$

доставляет минимум интегралу

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx.$$

Какому дифференциальному соотношению должны подчиняться функции y и z ?

Мы будем полагать функции y, z, F, G дважды непрерывно дифференцируемыми и считать, что производные

$$\frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial G}{\partial z}$$

не обращаются в ноль одновременно.

Заметим, что если поверхность может быть описана явно уравнением

$$z = z(x, y),$$

то поставленная задача сводится к простейшей задаче вариационного исчисления. Однако практически более полезен прием, стандартный для задач на условный экстремум.

Теорема Лагранжа утверждает следующее.

Существует функция $\lambda(x)$ такая, что кривая $y = y(x)$, $z = z(x)$ является экстремалью задачи на безусловный экстремум функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (F - \lambda G) dx.$$

В качестве приложений посмотрим на задачу об отыскании геодезических как на задачу Лагранжа. Иначе говоря, рассмотрим задачу о наименьшем значении интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

при условии

$$G(x, y, z) = 0.$$

По правилу множителей Лагранжа эта задача сводится к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda G \right] dx.$$

Уравнения Эйлера для последнего дадут

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \lambda \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

Эти соотношения означают, что главные нормали к геодезическим совпадают с нормальными к поверхности.

В общем случае задача Лагранжа ставится так. Найти минимизирующие функции y_1, \dots, y_n интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

при условии, что

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \\ \vdots \\ G_k(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0. \end{cases}$$

$k < n$.

Последние уравнения носят название связей. Если функции G_1, \dots, G_k не зависят от производных, связи называются голономными.

В случае неголономных связей будем считать, что

$$\text{rank} \left(\frac{\partial G_j}{\partial y'_i} \right) = k.$$

В случае голономных связей мы будем считать, что

$$\text{rank} \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_i} \right) = k.$$

Правило множителей Лагранжа в общем случае можно сформулировать как теорему существования функций (множителей Лагранжа) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ таких, что решения задачи Лагранжа на условный экстремум являются экстремалами функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} H dx$$

с функцией Лагранжа

$$H = F - \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot G_j.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Блисс, *Лекции по вариационному исчислению*, ИЛ, М., 1950.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т.4, ч.1, Наука, М., 1974.
3. Weinstock R., *Calculus of variations with applications to physics and engineering*, Dover publications, Inc., N.Y., 1992.

14 Теория вероятностей

14.1 Аксиоматика теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей

Аксиоматика (А.Н. Колмогоров) основана на понятии вероятностного пространства. Вероятностное пространство – тройка $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$. Первый элемент тройки – Ω (множество элементов $\omega \in \Omega$ произвольной природы). В приложениях – это множество всех возможных исходов опыта. Его элементы ω – элементарные события. Так как описание исходов опыта может быть очень разнообразным, то и множество Ω может иметь очень различную природу.

Примеры: 1) Мы бросаем кубик (игральную кость), в роли ω выступает число очков на выпавшей грани; Ω содержит 6 элементов $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 2) Бросается монета до первого выпадения герба, ω – номер броска, при котором выпал герб (может быть любым натуральным числом), Ω совпадает со множеством всех натуральных чисел. 3) Стрелок стреляет по мишени, Ω – множество точек на мишени $\{\omega - \text{точка на мишени}\}$, при этом мы, конечно, абстрагируемся от того факта, что пуля оставляет след на мишени – пятнышко или дырку конечных размеров; Ω – множество точек на квадрате $[-a, a] \times [-a, a]$. (Вариант, если не исключается промах мимо мишени, то Ω есть $[-a, a] \times [-a, a] \cup *$, где исход $*$ означает, что стрелок не попал в мишень). 4) Нас интересует процесс изменения со временем температуры в ходе какого-либо процесса (например, температуры воздуха в Петергофе в течение какого-то временного интервала). В роли точки ω пространства элементарных событий выступает функция $U(t)$, определенная на указанном интервале времени. Ω есть множество всех функций, заданных на этом интервале или множество всех непрерывных (если исключены скачки температуры) функций.

Второй элемент тройки, \mathfrak{A} – это выделенный класс подмножеств множества Ω , $A \in \mathfrak{A}$ – это множество точек $\omega \in A$, $A \subseteq \Omega$, A называются событиями. При этом а) если A_1, A_2 – события, то $\bigcup A_k$ и $\bigcap A_k$ также события (входят в \mathfrak{A}), здесь индекс k пробегает конечное или счетное множество значений; б) пустое множество \emptyset (невозможное событие) и само множество Ω (достоверное событие) принадлежат \mathfrak{A} , в) если A_1 и $A_2 \in \mathfrak{A}$, то $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}$ (т.е. событие, заключающееся в том, что A_1 произошло, но A_2 не имело места, в частности $\Omega \setminus A$), событие A не произошло, обозначение: $\Omega \setminus A = \bar{A}$. Свойства класса \mathfrak{A} означают, что они образуют так называемую σ -алгебру.

Примеры: в примерах 1) (игральная кость) и 2) (бросание монетки до выпадения герба) события – произвольные подмножества множества A . Например, (при бросании кубика) A_1 – выпало четное число очков, A_2 – выпало число, кратное трем. Тогда $A_1 = \{2, 4, 6\}$, $A_2 = \{3, 6\}$, $A_1 \cup A_2 = \{2, 3, 4, 6\}$, $A_1 \cap A_2 = \{6\}$, $A_1 \setminus A_2 = \{2, 4\}$, $\bar{A}_1 = \{1, 3, 5\}$. В примерах 3), 4) полное описание всех событий, входящих в \mathfrak{A} , весьма сложно. Ограничимся лишь указанием некоторых из них. В примере 3) (стрельба по мишени) это всевозможные открытые множества, являющиеся частью квадрата $[-a, a] \times [-a, a]$, в примере 4) (ход изменения температуры) событием является то, что в какой-то момент t_0 температура была в некотором заданном интервале (например, 24-го ноября в 17.00 от -4^0 до $+1^0$). Это значит, что событием является множество всех таких функций $U(t)$, что $U(t_0) \in \Delta$, где Δ – заданный интервал температур.

Третий элемент тройки Ω, \mathfrak{A}, P – вероятность P . Это числовая функция $P(A)$, в роли аргумента которой выступает событие. Эта функция должна обладать свойствами: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, а также счетной аддитивностью: если события A_1, A_2, \dots

попарно несовместимы, т.е. $A_k \cap A_j = \emptyset$ при любых $k \neq j$, то $P(\bigcup_x A_k) = \sum P(A_k)$, при этом число событий A_k может быть как конечным, так и счетным. Легко проверить: $P(A_1) \leq P(A_2)$, если $A_1 \subset A_2$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

14.2 Случайные величины

Случайные величины, в дальнейшем СВ, – это числовые вещественные функции от исхода опыта, т.е. функции $\xi(\omega)$ от точки пространства элементарных событий. При этом должны входить в σ -алгебру событий множества, описываемые в терминах СВ. Последнее означает, что $\{\omega : \xi(\omega) \in \Delta\}$ (или, кратко, $\{\xi(\omega) \in \Delta\}$) принадлежит при любом Δ σ -алгебре событий. Здесь Δ – произвольный, открытый или замкнутый, или замкнутый с одного конца, ограниченный или неограниченный интервал вещественной оси. Мы будем обозначать СВ греческими буквами ξ, η, ζ . Аргумент ω , как правило, будем при записи опускать. Будем говорить, что задано распределение СВ, если задан способ найти $P(\xi \in \Delta)$ при любом Δ . Универсальный способ задать распределение СВ – задание функции распределения СВ, т.е. функции $F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = P(\xi < x)$ – вероятности того, что СВ примет значение, меньшее данного x , где x – произвольное вещественное число. Если в рассмотрении участвует не одна СВ, скажем, ξ и η , то при обозначении функции распределения будем снабжать ее индексом $F_\xi(x)$ или $F_\eta(x)$.

Легко проверить, что функция распределения есть монотонная неубывающая функция $F(x) \leq 1$. Ее предельные значения на бесконечности: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$; $F(x)$ непрерывна слева в любой точке, т.е. $F(x) \rightarrow F(x_0)$ при $x \rightarrow x_0 - 0$. Приращение функции распределения $F(x_2) - F(x_1)$ на интервале (x_1, x_2) есть вероятность того, что $x_1 \leq \xi < x_2$. Функция распределения может иметь скачки (разрывы первого рода), причем величина скачка в точке x_0 $F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) = p_0$ есть вероятность того, что ξ принимает значение x_0 .

Имеет смысл выделить два класса СВ: дискретные и непрерывные ^{14.1} Дискретная СВ – это величина, которая может принимать конечный или счетный набор значений x_1, x_2, \dots . Для них удобней всего задавать распределение набором вероятностей $p_k = P(\xi = x_k)$. Числа $p_k \geq 0$ должны удовлетворять соотношению $\sum_{\forall k} p_k = 1$. Если число значений СВ счетно (бесконечно), то сумма представляет собой сумму бесконечного ряда, который является сходящимся.

Функция распределения дискретной СВ есть $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$, где суммирование ведется по всем значениям k , для которых $x_k < x$. Это ступенчатая функция со скачками в точках x_n (величина скачка, как уже говорилось выше, есть p_n .)

Непрерывные СВ могут принимать произвольные значения из некоторого интервала (может быть неограниченного) или из объединения таких интервалов. При этом существует неотрицательная функция $f(x)$ (плотность распределения), определенная на всей оси, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dt = 1$. Вероятность того, что значения СВ оказались в интервале

(α, β) (или $[\alpha, \beta]$) есть $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$. Очевидно, функция распределения непрерывной СВ есть

^{14.1}Точнее было бы назвать величины этого второго класса абсолютно непрерывными, однако наречие "абсолютно" связано с математическими тонкостями, на которых мы не акцентируем свое внимание.

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dt$. Плотность распределения является производной от функции распределения. Примеры дискретных СВ:

1) (Распределение Бернулли, или биномиальное). Пусть мы проводим серию из n опытов в одинаковых условиях, результат каждого опыта не зависит от результатов остальных опытов. Каждый опыт может иметь два исхода: успех или неуспех. Вероятность успеха в каждом опыте есть p , вероятность неудачи $q = 1 - p$. Пример – бросания монеты (может быть несимметричной). СВ ξ – число успехов в серии из n испытаний $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

2) Распределение Пуассона. Возможна ситуация в рамках схемы Бернулли, когда вероятность успеха в каждом отдельном испытании очень мала, однако если число испытаний при этом велико, то вероятность конечного числа успехов в такой серии может быть не малой. В этой ситуации разумно заменить распределение Бернулли его предельным случаем (распределением Пуассона), устремив согласованно p к 0, а n к бесконечности так, чтобы np стремилось к конечному значению $a > 0$. Тогда, после предельного перехода,

$$p(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

. Распределение Пуассона возникает при изучении радиоактивного процесса: если подсчитывается число актов распада атомов в макроскопическом количестве радиоактивного вещества за время t (это время предполагается гораздо меньшим периода полураспада), то вероятность того, что это число равно k , есть

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Дальнейшие примеры для непрерывных СВ.

3) Равномерное распределение – случай, когда СВ может принимать значения только из некоторого интервала (a, b) , причем все значения СВ из этого интервала равновероятны. Точный смысл последнего условия – следующий. Для любого интервала $\alpha, \beta \subset (a, b)$ $P(\xi \in (\alpha, \beta))$ зависит лишь от длины интервала $\beta - \alpha$ и не зависит от расположения этого интервала. Легко показать, что в этом случае $P(\xi \in (\alpha, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$. Плотность распределения такой СВ есть кусочно-постоянная функция $f(x) = \frac{1}{b - a}$ при $x \in (a, b)$ и $f(x) = 0$, если $x \notin (a, b)$. Функция распределения – кусочно-линейная функция $F(x) = 0$ при $x < a$, $F(x) = \frac{x - a}{b - a}$ при $x \in (a, b)$ и $F(x) = 1$ при $x > b$.

Равномерное распределение имеет энергия диполя в однородном электростатическом поле, если все ориентации диполя равновероятны.

4) Нормальное распределение, или распределение Гаусса. Это непрерывное распределение с плотностью $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и $\sigma > 0$ – постоянные. Также как и распределение Пуассона, это распределение является предельным случаем распределения Бернулли. А именно: пусть СВ имеет распределение Бернулли: $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Введем величину $\eta = \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}}$. Также как и ξ , η зависит от n . Тогда при любых α и β ($\alpha < \beta$)

$$P(\eta \in (\alpha, \beta)) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

при $n \rightarrow \infty$. Последняя формула, являющаяся утверждением теоремы Муавра - Лапласа (точнее, ее интегральным вариантом) показывает, что при больших n η распределена

приблизительно по нормальному закону. Нормальное распределение каждый раз возникает, когда мы имеем дело с суммой большого числа малых независимых СВ. Понятие независимости появится немного ниже.

Следующее важное понятие, характеризующее СВ, – математическое ожидание, в дальнейшем МО. МО (дискретный случай) СВ есть по определению $E(\xi) = \sum_k x_k p_k$. Для непрерывной СВ определение аналогично, только сумма заменяется интегралом:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Мы для обозначения МО воспользовались символом $E(\xi)$. Заметим, что в литературе можно часто встретить и другие обозначения для МО. Можно показать, что МО линейно зависит от СВ: $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E(\xi) + \beta E(\eta)$. Часто приходится иметь дело с СВ, являющимися детерминированными функциями $\eta = \varphi(\xi)$ от другой СВ ξ . Тогда $E(\eta) = \sum \varphi(x_k) p_k$ в дискретном случае, $E(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$ – в непрерывном. Числа p_k и $f(x)$ соответственно задают распределение ξ . В частности, часто употребляется второй центрированный момент – дисперсия ξ : $D(\xi) = E((\xi - a)^2)$, где $a = E(\xi)$. МО случайной величины – это, как уже говорилось выше, – ее среднее значение. Дисперсия же характеризует степень возможного разброса значений СВ.

Ясно, что если СВ ξ с вероятностью, близкой к единице, принимает значения, близкие к среднему значению и лишь с малой вероятностью может сильно отклоняться от этого значения, то $(\xi - a)^2$ с вероятностью, близкой к единице, будет принимать значения, близкие к нулю и лишь с малой вероятностью сильно отличаться от нуля, ее дисперсия будет мала. В частности, если ξ детерминирована (отличается от какого-то числового значения лишь с нулевой вероятностью), то ее дисперсия равна нулю. Если же СВ может со значительной вероятностью сильно отклоняться от своего среднего значения, то ее дисперсия будет велика.

Приведем результаты вычисления МО и дисперсии для приведенных выше распределений СВ.

- 1) Распределение Бернулли: $E(\xi) = np$, $D(\xi) = npq$.
- 2) Распределение Пуассона: $E(\xi) = D(\xi) = a$.
- 3) Равномерное распределение: $E(\xi) = \frac{a+b}{2}$, $D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- 4) Нормальное распределение: $E(\xi) = a$, $D(\xi) = \sigma^2$.

14.3 Условные вероятности. Независимость событий. Независимость и некоррелированность СВ

Весьма важным понятием является понятие условной вероятности. Очевидно, если мы получили информацию о том, что имело место какое-либо событие B , то это приводит к изменению вероятности других событий. Например, событие A может иметь положительную вероятность, но оно несовместимо с событием B . Тогда вероятность события A при условии, что произошло событие B , равна нулю. Наоборот, если событие B влечет за собой событие A , то при условии, что B произошло, вероятность события A равна единице.

Определение: Вероятность события A при условии B (обозначение: $P(A|B)$) есть $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Определение корректно при $P(B) \neq 0$.

Пусть события B_1, B_2, \dots, B_n образуют полный набор событий, т.е. они попарно несовместимы: $B_k \cap B_j = \emptyset$ при $k \neq j$, $\bigcup B_k = \Omega$. Тогда справедлива весьма полезная формула полных вероятностей: $P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$. Другой полезный результат при тех же предположениях: формула Байеса (формула оценки вероятностей гипотез)

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

дает возможность сравнивать вероятности различных гипотез (гипотеза о том, что событие B_k имело место), если известно, что событие A произошло.

Понятие независимости событий. Событие A естественно считать независимым от события B , если сообщение о том, что событие B произошло, не влияет на вероятность A , т.е. $P(A|B) = P(A)$. Последнее равенство можно переписать в симметричной относительно A и B форме:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Это равенство и принято считать за определение независимости событий. В случае более, чем двух событий, события A_1, A_2, \dots, A_N называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если для любого подмножества из этих событий справедливо равенство

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \dots \cap A_{k_n}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_n}).$$

С независимостью событий тесно связано понятие независимости случайных величин. СВ $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ называются независимыми, если независимы любые события, описываемые в терминах этих величин, т.е.

$$P(\xi_{k_1} \in \Delta_1, \xi_{k_2} \in \Delta_2, \dots, \xi_{k_n} \in \Delta_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_{k_i} \in \Delta_i)$$

для любого набора СВ $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_n}$ и любого набора интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Из определения легко получается, что для любой пары независимых СВ^{14.2} $P(\xi < x, \eta < y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$.

Для дискретных СВ $r_{ik} = P(\xi = x_i, \eta = y_k) = p_i q_k$, где $p_i = P(\xi = x_i)$, $q_k = P(\eta = y_k)$. Для непрерывных СВ

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$$

. Здесь $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ – плотности распределений СВ ξ и η , $f_{\xi\eta}(x, y)$ – их совместная плотность распределения, т.е.

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(\xi < x, \eta < y),$$

$$E(\xi, \eta) = E(\xi)E(\eta).$$

В частности, $E(\hat{\xi}\hat{\eta}) = 0$, если $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ центрированные случайные СВ, т.е. $\hat{\xi} = \xi - E(\xi)$, $\hat{\eta} = \eta - E(\eta)$. Если ξ и η – произвольные (не обязательно независимые) СВ, то $E(\hat{\xi}\hat{\eta})$ называется их ковариацией, $r_{\xi\eta} = \frac{E(\hat{\xi}\hat{\eta})}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}$ называется коэффициентом корреляции. Для всех

^{14.2}Мы для краткости формулируем результаты для пары СВ, однако ясно, что они легко переносятся на случай произвольного их числа.

$\xi, \eta \mid r_{\xi\eta} \mid \leq 1$. СВ называются некоррелированными, если их ковариация равна нулю. Выше фактически содержится утверждение: если СВ независимы, то они некоррелированы. Обратное неверно. Например, СВ ξ и $\eta = \xi^2$ зависимы, но при условии $E(\xi) = E(\xi^3)$ они некоррелированы. Важное свойство аддитивности дисперсии для некоррелированных, а тем самым и независимых, СВ. Если $E(\hat{\xi}_i \hat{\xi}_k) = 0$ при $i \neq k$, то $D(\sum_{k=1}^n \xi_k) = \sum_{k=1}^n D(\xi_k)$. Если СВ не являются некоррелированными, то аддитивность дисперсии, вообще говоря, не имеет места. Ковариация и коэффициент корреляции являются характеристиками зависимости между СВ. Так, если $E(\hat{\xi}\hat{\eta}) > 0$ (СВ положительно коррелированы), то если в ходе опыта одна из величин $\hat{\xi}$ или $\hat{\eta}$ приняла положительное значение, то мы вправе надеяться, что и вторая примет положительное значение, и наоборот. Коэффициент корреляции можно рассматривать как степень линейной зависимости СВ: $|r_{\xi\eta}| = 1$ в том и только том случае, если имеет место соотношение $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ при некоторых константах α, β, γ , где $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

14.4 Закон больших чисел

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ последовательность независимых СВ, имеющих ограниченные дисперсии $\sigma_k^2 < \sigma^2$, a_1, a_2, \dots, a_n — их МО. Тогда утверждается (закон больших чисел), что при $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n a_i \right) \rightarrow 0.$$

Поскольку речь идет о стремлении к нулю последовательности СВ, то надо сначала договориться о том, что понимается под этим стремлением. На самом деле возможны разные определения и разные типы сходимости СВ. В нашем случае речь пойдет о сходимости по вероятности. Будем говорить, что последовательность СВ $\eta_n \rightarrow \eta$ по вероятности, если при любом $\delta > 0$ $P(|\eta_n - \eta| > \delta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для доказательства будет использовано неравенство Чебышева: для любой ξ и $\Delta > 0$

$$P(|\xi| > \delta) \leq \frac{E(\xi^2)}{\delta^2}.$$

В частности, если $a = E(\xi)$, то

$$P(|\xi - a| > \delta) \leq \frac{D(\xi)}{\delta^2}.$$

Проведем доказательство в непрерывном случае (существует плотность распределения $f(x)$). Тогда

$$P(|\xi| > \delta) = \int_{|x|>\delta} f(x) dx \leq \int_{|x|>\delta} \frac{x^2}{\delta^2} f(x) dx = \frac{1}{\delta^2} \int_{|x|>\delta} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{E(\xi^2)}{\delta^2}.$$

В дискретном случае доказательство аналогично. Оценим

$$P(|\zeta_n| > \delta) \leq \frac{D(\zeta_n)}{\delta^2} = \frac{D \sum_{i=1}^n n \frac{(\xi_i - a)}{n}}{\delta^2} = \frac{\sum_{i=1}^n D \left(\frac{\xi_i - a}{n} \right)}{\delta^2} = \frac{1}{n^2 \delta^2} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2 \delta^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq \frac{1}{n^2 \delta^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n \delta^2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Закон больших чисел служит оправданием разумности введенных выше аксиоматически понятий МО и самого понятия вероятности. Пусть в законе больших чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – последовательность СВ, возникающих при независимых повторениях одинаковых экспериментов. Тогда, естественно, они имеют одинаковое распределение и, следовательно, одинаковые МО и дисперсии. Тогда $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a\right| > \delta\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым среднее арифметическое таких случайных величин стремится при $n \rightarrow \infty$ по вероятности к их математическому ожиданию. Пусть нас интересует вероятность наступления некоторого исхода A в повторяющихся независимых экспериментах. Введем случайные величины $\chi_k(A)$ (индикаторы события A): $\chi_k(A) = 1$, если в k -ом эксперименте наступил исход A , и $\chi_k(A) = 0$ – в противном случае. Очевидно, $E(\chi_k(A)) = P(A)$. Тогда $\sum_{i=1}^n \chi_k(A)$ – число тех опытов в серии из n экспериментов, в результате которых событие A имело место. Случайная величина $\nu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_k(A)$ называется частотой наступления события A в этой серии. Закон больших чисел в этой ситуации утверждает, что при $n \rightarrow \infty$ частота $\nu_n(A)$ стремится по вероятности к $P(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*.
2. Т. А. Агемян, *Теория вероятностей для астрономов и физиков*.
3. А. Н. Бородин, *Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики*.
4. Ю. А. Розанов, *Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика*.

15 Теория функций комплексного переменного

15.1 Голоморфные функции. Условия Коши-Римана

Пусть $f(z)$ – функция комплексной переменной, определенная и однозначная в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Обозначая $z = x + iy$ и $f = u + iv$, мы можем написать $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Мы будем говорить, что функция $f(z)$ имеет *производную* в точке $z \in D$, если существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (15.1)$$

причем этот предел не зависит от способа стремления Δz к нулю. Функция называется *регулярной*, или *голоморфной*, в области Ω , если она имеет непрерывную производную в этой области.^{15.1}

Покажем, что для того, чтобы функция $f(z)$ была регулярной в области Ω , ее вещественная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части должны удовлетворять некоторым условиям

^{15.1}Под регулярностью функции в точке понимают ее регулярность в некоторой окрестности этой точки.

(помимо требования их непрерывной дифференцируемости). Прежде всего установим, какие условия являются необходимыми. Полагая $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, из (15.1) легко получить $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. Точно также, при $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$, имеем $f'(z) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$. Поскольку в обоих случаях должно получиться одно и то же выражение для производной, то с необходимостью

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \quad (15.2)$$

Условия (15.2) называются *условиями Коши-Римана*. Покажем, что они также являются достаточными для регулярности $f(z)$ в Ω . Учитывая непрерывную дифференцируемость $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеем

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \dots, \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \dots,$$

где многоточие обозначает члены более высокого порядка малости при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Но тогда

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(u_x \Delta x + u_y \Delta y) + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y) + \dots}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{u_x (\Delta x + i\Delta y) + iv_x (\Delta x + i\Delta y) + \dots}{\Delta x + i\Delta y} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} u_x + iv_x \end{aligned} \quad (15.3)$$

в силу условий Коши-Римана

вне зависимости от способа, каким $\Delta z \rightarrow 0$.

Из условий (15.2) непосредственно вытекает, что:

1. регулярная функция определяется своей вещественной (или мнимой) частью, например

$$v(x, y) = \int^{(x,y)} -u_y(x, y) dx + u_x(x, y) dy + \text{const};$$

2. вещественная и мнимая части регулярной функции являются *гармоническими функциями*, т.е.

$$\Delta u = \Delta v = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

15.2 Теорема Коши, формула Коши

Докажем теорему Коши: если $f(z)$ — регулярная в односвязной области Ω функция, то для произвольного замкнутого контура $\gamma \subset \Omega$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (15.4)$$

Иными словами, контурный интеграл от регулярной функции не зависит от пути интегрирования (иногда говорят, что контур можно *деформировать* в пределах области регулярности).

Воспользуемся формулой Грина (см. §10.4, формула (10.1)):

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} u dx - v dy + i \oint_{\gamma} v dx + u dy =$$

по формуле Грина $\int \int (u_y + v_x) dx dy + \int \int (v_y - u_x) dx dy = 0$ в силу условий Коши-Римана

(двойные интегралы берутся по области, которую охватывает контур γ).

Для дальнейшего потребуется вычислить $\oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0}$ по контуру, охватывающему точку

z_0 . Т.к. функция $\frac{1}{z - z_0}$ регулярна всюду, кроме точки z_0 , то контур можно продеформировать, не пересекая им этой точки. В частности, можно считать, что γ_0 – это окружность $|z - z_0| = \varepsilon$. Вводя на этой окружности параметризацию $z = z_0 + \varepsilon e^{it}$, получаем

$$\oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it} dt}{\varepsilon e^{it}} = 2\pi i.$$

Точно так же

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}. \quad (15.5)$$

Пусть теперь функция $f(z)$ регулярна в области Ω и непрерывна вплоть до границы $\partial\Omega$ этой области. Рассмотрим $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, в котором $z \in \Omega$. Очевидно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Первый из интегралов в правой части равенства равен единице в силу (15.5). Покажем, что второй интеграл равен нулю. Для этого продеформируем $\partial\Omega$ в окружность $|\zeta - z| = \varepsilon$ произвольного радиуса ε . С одной стороны, интеграл не зависит от ε . С другой стороны, оценивая его по модулю, получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta - z|} |f(\zeta) - f(z)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon dt}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (15.6)$$

Формула (15.6) называется *интегральной формулой Коши*. Она замечательна, прежде всего, тем, что позволяет восстановить регулярную в области функцию по значениям этой функции на границе. Кроме того, из (15.6) вытекает множество других следствий, например, дифференцируя (15.6) по z любое число раз, мы убеждаемся, что производные (любого порядка) регулярной функции также являются регулярными, причем имеют место формулы

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (15.7)$$

15.3 Ряд Тейлора

Напомним, что областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ является некоторый круг $|z - z_0| < R$. Радиус этого круга (радиус сходимости) зависит от поведения коэффициентов c_n при $n \rightarrow \infty$. В любом меньшем замкнутом круге степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Имеет место следующее утверждение: если функция $f(z)$ регулярна в области Ω , то $\forall z \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (15.8)$$

Степенной ряд (15.8), называемый рядом Тэйлора, сходится в любом круге (с центром в точке z_0), содержащемся в Ω .

15.4 Ряд Лорана. Вычеты. Теорема о вычетах

Рядом Лорана называется степенной ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные степени $(z - z_0)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (15.9)$$

Ряд (15.9) может не сходиться нигде, но если он имеет не пустую область сходимости, то это область – кольцо $r < |z - z_0| < R$. Аналогично утверждению §15.3, функция, регулярная в кольце, раскладывается в ряд Лорана.

Введем понятие *изолированной особой точки*: z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, если существует такая “проколота” окрестность $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ этой точки, в которой функция регулярна. Поскольку проколота окрестность – это частный случай кольца, то в окрестности изолированной особой точки функция раскладывается в ряд Лорана. Если число слагаемых с отрицательными степенями в этом ряду конечно (и равно m), то особая точка называется *поллюсом порядка m* (при $m = 1$ полюс называется *простым*). В случае бесконечного числа слагаемых с отрицательными степенями особая точка – *существенная особая*.^{15.2}

Для функции, имеющей конечное число изолированных особых точек, можно указать круг $|z| < R$, за пределами которого особых точек не будет. Тем самым, функция регулярна во *внешности круга* $|z| > R$ (которая также является частным случаем кольца) и раскладывается там в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \quad (15.10)$$

Разложение (15.10) – это *ряд Лорана в окрестности бесконечности*. Разумеется, коэффициенты ряда (15.10) не совпадают с коэффициентами разложения той же функции $f(z)$ в ряд вида (15.9).

Вводим одно из важнейших понятий комплексного анализа. Пусть разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (15.11)$$

^{15.2}При отсутствии отрицательных степеней точка не является особой.

сходится в некоторой проколотой окрестности точки z_0 . Тогда *вычетом функции* $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1} этого разложения,

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}. \quad (15.12)$$

Аналогично, *вычетом функции в бесконечности* называется коэффициент c_{-1} разложения (15.10), взятый с обратным знаком,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{при} \quad |z| > R \quad \Rightarrow \quad \operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}. \quad (15.13)$$

В случае, когда точке z_0 — полюс порядка m , разложение (15.11) принимает вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \dots$$

Домножая обе части равенства на $(z - z_0)$ и дифференцируя $m - 1$ раз, мы приходим к *формуле вычисления вычетов в полюсах*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (15.14)$$

Понятие вычета тесно связано с контурным интегралом. Проинтегрируем равенство (15.11) по замкнутому контуру, охватывающему точку z_0 и переставим порядок суммирования и интегрирования (такая перестановка возможна в силу равномерной сходимости ряда Лорана на любом замкнутом подмножестве его области сходимости). В силу (15.5) только одно из слагаемых ряда в правой части равенства, отвечающее $n = -1$, будет отлично от нуля, и тем самым

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} f(z) dz = \operatorname{res}_{z_0} f(z). \quad (15.15)$$

По той же причине интеграл по окружности радиуса R настолько большого, что все особые точки функции $f(z)$ находятся внутри круга $|z| < R$, будет, с одной стороны, равен

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz = \sum_{z_j, |z_j| < R} \operatorname{res}_{z_j} f(z),$$

а с другой стороны —

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz = -\operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Поэтому имеет место *теорема о сумме вычетов*: для функции $f(z)$, имеющей конечное число особых точек z_j , $j = 1, \dots, N$, справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{z_j} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0. \quad (15.16)$$

15.5 Асимптотическое вычисление интегралов. Метод Лапласа

В разных задачах математической физики часто возникает необходимость в оценке интегралов вида

$$I(\lambda) := \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \quad (15.17)$$

при больших значениях параметра, $\lambda \gg 1$. В (15.17) контур γ - некоторый (конечный или бесконечный) контур на комплексной плоскости, а функции $S(z)$ и $f(z)$ (обычно называемые *фазой* и *амплитудой*) регулярны в некоторой окрестности контура γ . Речь идет о получении формул вида

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) + I_1(\lambda) + \dots, \quad I_{n+1}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} o\left(I_n(\lambda)\right),$$

называемых *асимптотическими разложениями*. Как правило, в приложениях обычно довольствуются вычислением *старшего члена асимптотики* $I_0(\lambda)$ (пишут $I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} I_0(\lambda)$) и оценкой поправочных слагаемых.

Мы ограничимся рассмотрением частных случаев интеграла (15.17), а именно, будем считать, что контур γ является отрезком вещественной оси и фазовая функция $S(x)$ либо вещественнозначна, либо (в §15.6) принимает чисто мнимые значения.

Итак, пусть теперь

$$I(\lambda) := \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx. \quad (15.18)$$

Естественно предположить, что основной вклад в величину интеграла (15.18) будет давать интегрирование по “малой”^{15.3} окрестности точки, в которой фаза $S(x)$ принимает наибольшее на отрезке $[a, b]$ значение. При асимптотическом вычислении интеграла, однако, приходится различать случаи, когда фаза достигает своего наибольшего значения на краю интервала и при этом $S'(a) \neq 0$, $S'(b) \neq 0$, или когда она имеет локальный максимум внутри интервала.

В первом случае к искомой асимптотической формуле приводит интегрирование по частям. Считая, например, $S(b) > S(a)$, получаем

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\lambda S(b)}}{\lambda S'(b)} f(b). \quad (15.19)$$

Заметим, что проводя повторные интегрирования по частям, можно получить последующие члены асимптотического разложения любого порядка.

Предположим теперь, что наибольшее значение функции $S(x)$ достигается во внутренней точке $x_0 \in (a, b)$. Тем самым, x_0 - точка максимума, $S'(x_0) = 0$. Мы предположим, что этот максимум невырожден, $S''(x_0) \neq 0$.^{15.5}

^{15.3}Фактическая величина этой окрестности будет ясна из получаемых формул.

^{15.4}При принятом предположении $S(b) > S(a)$ вклад от окрестности точки a не следует учитывать в асимптотическом разложении, поскольку он соответствует относительной погрешности порядка $e^{-\lambda[S(b)-S(a)]}$ (по сравнению с (15.19)), т.е. имеет экспоненциально малый порядок при $\lambda \rightarrow \infty$.

^{15.5}Проводимые рассуждения с незначительными изменениями переносятся на случай совпадения точки максимума с одним из концов интервала интегрирования.

В соответствии с идеей о том, что основной вклад в интеграл образуется в результате интегрирования по малой окрестности точки x_0 , можно написать

$$I(\lambda) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) e^{\lambda S(x)} dx .$$

На малом отрезке $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ амплитудную и фазовую функции можно заменить отрезками их рядов Тэйлора:

$$f(x) = f(x_0) + \dots , \quad S(x) = S(x_0) - \frac{|S''(x_0)|}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

(здесь мы учли знак S'' в точке максимума). Распространение промежутка интегрирования на всю вещественную ось меняет упрощенный интеграл незначительно, поскольку в нем опять же основной вклад дает окрестность точки x_0 . Таким образом,

$$I(\lambda) \sim f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda|S''(x_0)|(x-x_0)^2} dx .$$

Последний интеграл заменой переменной $t = \sqrt{\frac{\lambda|S''(x_0)|}{2}}(x - x_0)$ сводится к $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Окончательно,

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) . \quad (15.20)$$

Можно оценить погрешность всех сделанных в этом эвристическом выводе формулы (15.20) приближений и, тем самым, обосновать ее асимптотический характер. Оказывается, что

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} e^{\lambda S(x_0)} \left[f(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] .$$

15.6 Метод стационарной фазы

Рассмотрим теперь

$$I(\lambda) := \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx . \quad (15.21)$$

При $\lambda \gg 1$ вещественная и мнимые части подынтегрального выражения быстро осциллируют. Амплитудная и фазовая модуляции не успевают проявиться на протяжении одного (малого) периода осцилляций, и поэтому интеграл по каждому из таких периодов близок к нулю. Исключением являются окрестности концов промежутка интегрирования, а также *стационарные точки* x_j , в которых $S'(x_j)$ (в окрестности стационарных точек осцилляции замедляются).

Вычисление вклада от точек a, b , как и в §15.5, производится интегрированием по частям: при отсутствии стационарных точек

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i\lambda S(b)}}{i\lambda S'(b)} f(b) - \frac{e^{i\lambda S(a)}}{i\lambda S'(a)} f(a) . \quad (15.22)$$

Эвристические рассуждения §15.5 могут быть, с небольшими изменениями, применены и для вычисления вкладов от каждой отдельной невырожденной стационарной точки:

$$\begin{aligned} & \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim f(x_j) e^{i\lambda S(x_j)} \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} e^{\frac{i}{2}\lambda S''(x_j)(x-x_j)^2} dx \sim \\ & \sim f(x_j) e^{i\lambda S(x_j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}\lambda S''(x_j)(x-x_j)^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\lambda |S''(x_j)|}} f(x_j) e^{i\lambda S(x_j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2} dt, \end{aligned}$$

в последнем интеграле знак \pm соответствует знаку $S''(x_j)$. Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2} dt = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}$,^{15.7} то в итоге вклад от стационарной точки сводится к

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_j)|}} e^{i\lambda S(x_j) + i\frac{\pi}{4} \text{sign} S''(x_j)} f(x_j). \quad (15.23)$$

Подчеркнем, что асимптотикой интеграла $I(\lambda)$ является сумма вкладов (15.23) от всех внутренних стационарных точек.^{15.8} Из (15.23) видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ эти вклады имеют порядок $O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Вклады (15.22) от концевых точек a, b имеют порядок $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, и поэтому (при наличии хотя бы одной стационарной точки) являются поправочными.

16 Обобщенные функции

16.1 Обобщенные функции, примеры регулярных и сингулярных обобщенных функций.

Введем функциональное пространство \mathcal{S} (пространство Шварца), состоящее из функций $\phi(x)$, непрерывно дифференцируемых любое количество раз, $\phi \in C^\infty(-\infty, \infty)$, и убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени x (т.е. $\forall k, l \ x^k \phi^{(l)}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$). Функции из \mathcal{S} будем теперь называть основными (пробными). Последовательность функций $\phi_n(x)$ будет называться сходящейся к нулю в \mathcal{S} , $\phi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{S}} 0$, если $x^k \phi_n^{(l)}(x) \rightarrow 0 \ \forall k, l$. Соответственно, $\phi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{S}} \phi(x)$, если $\phi_n(x) - \phi(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{S}} 0$ (в дальнейшем для краткости опускаем символ \mathcal{S}).

Функционалом назовем отображение $\mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$, действие функционала f на пробную функцию ϕ (результат этого действия есть вещественное число) обозначим через (f, ϕ) . Функционал f *линеен*, если $(f, c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1(f, \phi_1) + c_2(f, \phi_2)$ для любых пробных функций, и *непрерывен*, если $(f, \phi_n) \rightarrow 0$ на любой сходящейся в \mathcal{S} к нулю последовательности пробных функций.

^{15.6} Оба слагаемых в (15.22) одного порядка при $\lambda \rightarrow \infty$, и поэтому их следует учитывать оба, ср. с примечанием к формуле (15.19).

^{15.7} Чтобы убедиться в этом, достаточно повернуть контур интегрирования на угол $\pm i\pi/4$ и затем сделать замену переменной $t = e^{\pm i\pi/4} \tau$.

^{15.8} В отличие от §15.5, где следовало учитывать только точку наибольшего из максимумов $S(x)$.

Линейные непрерывные функционалы над \mathcal{S} будем называть *обобщенными функциями* (медленного роста); их совокупность обозначим через \mathcal{S}' .

Если $f(x)$ – локально интегрируемая функция, удовлетворяющая при $|x| \rightarrow \infty$ оценке $|f(x)| \leq A|x|^m$, то такая функция порождает линейный непрерывный функционал, действие которого описывается формулой

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x) dx \quad (16.1)$$

(здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов интегрирования понимается как интеграл по всей вещественной оси).^{16.1} Функционалы, действия которых можно представить в виде (16.1), будем называть *регулярными обобщенными функциями*. Приведенные ниже примеры показывают, что пространство \mathcal{S}' не исчерпывается регулярными функционалами.

Примеры:

1. Функция Хэвисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

порождает регулярный функционал $(\theta, \phi) = \int_0^{\infty} \phi(x) dx$;

2. $(\delta, \phi) = \phi(0)$ – дельта функция Дирака;

3. $(\mathcal{P}_x^1, \phi) = \text{V.p.} \int \frac{\phi(x)}{x} dx$ (символ V.p. означает, что интеграл понимается в смысле главного значения).

Функционалы во втором и третьем примерах *сингулярные* (т.е. не являются регулярными).

Очевидно, что определения $(f_1 + f_2, \phi) := (f_1, \phi) + (f_2, \phi)$ и $(\gamma f, \phi) := \gamma(f, \phi)$ превращают \mathcal{S}' в линейное пространство. Кроме того, обобщенные функции можно умножать на пробные функции: $\forall h(x) \in \mathcal{S} (hf, \phi) := (f, h\phi)$ (определение корректно, т.к. произведение $h(x)\phi(x)$ тоже является пробной функцией).^{16.2} Например, $(h\delta, \phi) = (\delta, h\phi) = h(0)\phi(0)$, т.е. $h\delta = h(0)\delta$. В частности, $x\delta = 0$.

Можно доказать, что уравнение $xf = 0$ не имеет других (с точностью до постоянного множителя) решений, кроме δ -функции, $f = C\delta$. Поскольку частным решением уравнения $xf = 1$ является функционал \mathcal{P}_x^1 из третьего примера, то общим решением уравнения $xf = 1$ будет $f = C\delta + \mathcal{P}_x^1$.^{16.3}

^{16.1}Функционал (16.1) не может породиться функциями, растущими на бесконечности сверхстепенным образом (например, функцией e^x). Именно поэтому рассматриваемый класс обобщенных функций носит название “медленного роста”.

^{16.2}Здесь мы воспользовались следующим наводящим соображением: заметим, что для регулярных обобщенных функций имеет место цепочка равенств

$$(hf, \phi) = \int (h(x)f(x))\phi(x) dx = \int f(x)(h(x)\phi(x)) dx = (f, h\phi).$$

Затем принимаем это равенство по определению для всех обобщенных функций. Подобного рода наводящие соображения лежат в основе всех дальнейших определений операций над обобщенными функциями.

^{16.3}Обобщая определение \mathcal{P}_x^1 , можно ввести функционал

$$\left(\mathcal{P}_x^m, \phi\right) := \text{V.p.} \int \frac{\phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0) - \dots - \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} \phi^{(m-2)}(0)}{x^m} dx,$$

Запись $f(x)$ не означает значения в точке (поскольку для обобщенных функций говорить о таких значениях бессмысленно). Мы будем использовать выражение $f(x)$ с тем, чтобы отличать функционал f от другого функционала $f(ax + b)$, который определяется как

$$(f(ax + b), \phi(x)) := \left(f(x), \frac{1}{|a|} \phi\left(\frac{b-x}{a}\right) \right).$$

Например, $(\delta(x - x_0), \phi) = \phi(x_0)$, $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

16.2 Дифференцирование обобщенных функций, примеры

Производной обобщенной функции f (коротко: обобщенной производной) назовем функционал f' , действующий на пробную функцию ϕ по следующему правилу:

$$(f', \phi) := (f, -\phi').$$

Очевидно f' также является линейным непрерывным функционалом. Таким образом, всякая обобщенная функция имеет любое количество производных, причем $(f^{(m)}, \phi) = (f, (-1)^m \phi^{(m)})$.^{16.4}

Примеры:

1. $(\delta', \phi) = (\delta, -\phi') = -\phi'(0)$;
2. Справедливо обычное правило дифференцирования произведения $h(x)f$:

$$\begin{aligned} ((hf)', \phi) &= \\ &= (hf, -\phi') = (f, -h\phi') = (f, -(h\phi)') + (f, h'\phi) = (f', h\phi) + (f, h'\phi) = \\ &= (hf' + h'f, \phi), \end{aligned}$$

т.е. $(hf)' = hf' + h'f$;

3. $(\theta', \phi) = (\theta, -\phi') = \int_0^{\infty} (-\phi') dx = -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) = (\delta, \phi)$ т.е. $\theta' = \delta$.^{16.5}

Обобщая результат последнего примера легко показать, что если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$, где она имеет разрыв первого рода, то обобщенная производная этой функции есть $f' = f'(x) + [f]_{x=0} \delta$, где $f'(x)$ - классическая производная (определенная всюду, кроме точки $x = 0$) и $[f]_{x=0} = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ — величина скачка $f(x)$.

который является частным решением уравнения $x^m f = 1$.

^{16.4}Заметьте, что при определении обобщенной производной функции не использовалось (в отличие от классических производных!) понятие сходимости в пространстве \mathcal{S}' .

^{16.5}Более того, имеет место *теорема Шварца*, содержание которой можно описать так: любая функция из \mathcal{K}' является обобщенной производной (какого-то порядка) от некоторой регулярной обобщенной функции, порождаемой непрерывной функцией.

16.3 Преобразование Фурье обобщенных функций

Напомним, что под классическим преобразованием Фурье мы понимаем

$$\phi(x) \rightsquigarrow \tilde{\phi}(\xi) := F[\phi(x)](\xi) = \int \phi(x) e^{ix\xi} d\xi.$$

Мы не будем перечислять здесь хорошо известные свойства этого преобразования, но напомним также, что чем более гладкой является функция $\phi(x)$, тем быстрее $\tilde{\phi}(\xi)$ убывает при $|\xi| \rightarrow \infty$, и наоборот. Поэтому естественно ожидать (и в этом легко убедиться), что преобразование Фурье не выводит из пространства Шварца (см. §16.1) пробных функций, $F[\mathcal{S}] = \mathcal{S}$.

Для определения обобщенного преобразования Фурье начнем с наводящего соображения.. Предположив, что функционалы f и \tilde{f} являются регулярными, имеем

$$(\tilde{f}, \phi) = \int \left(\int f(x) e^{i\xi x} dx \right) \phi(\xi) d\xi = \int f(x) \left(\int \phi(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right) dx = (f, \tilde{\phi}).$$

Итак, теперь можно принять следующее определение: *преобразование Фурье \tilde{f} функционала $f \in \mathcal{S}'$ – это тоже функционал из \mathcal{S}' , действующий по правилу $(\tilde{f}, \phi) = (f, \tilde{\phi})$.*

Примеры:

1. $\tilde{\delta} = 1$. Действительно, $(\tilde{\delta}, \phi) = (\delta, \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = (1, \phi)$;
2. $F[\delta(x+a) - \delta(x-a)] = -2i \sin(a\xi)$;
3. $(F[\theta], \phi) = (\theta, \tilde{\phi}) = \int_0^{\infty} \left(\int \phi(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right) dx$. Переставить порядок интегрирования нельзя, поскольку интеграл по x разойдется. Однако можно продолжить выкладки под знаком предела: $\dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left(\int \phi(\xi) e^{i(\xi+i\varepsilon)x} d\xi \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \phi(\xi) \left(\int_0^{\infty} e^{i(\xi+i\varepsilon)x} dx \right) d\xi = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\phi(\xi)}{(\xi+i\varepsilon)} d\xi$. Последний предел по определению полагается равным действию функционала $\frac{1}{\xi+i0}$. Таким образом, $F[\theta] = \frac{i}{\xi+i0}$.

Покажем на примере, как свойства классического преобразования Фурье переносятся на обобщенное:

$$\left(\frac{d}{d\xi} \tilde{f}, \phi \right) = (\tilde{f}, -\phi') = (f, -F[\phi']) = (f, (ix)\tilde{\phi}) = ((ix)f, \tilde{\phi}) = (F[(ix)f], \phi),$$

т.е. $\frac{d}{d\xi} \tilde{f} = F[(ix)f]$.

Обратное обобщенное преобразование Фурье определим как $F^{-1}[\tilde{f}(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi} F[\tilde{f}(\xi)](-x)$. Проверяем, что: $(FF^{-1}[f], \phi) = (F^{-1}[f], \tilde{\phi}) = \left(\frac{1}{2\pi} F[f](-\xi), \tilde{\phi} \right) = \left(f, \frac{1}{2\pi} F[\tilde{\phi}(-\xi)] \right) = (f, \phi)$. В качестве примера $\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} F[1] \Rightarrow F[1] = 2\pi\delta$.

Преобразование Фурье и обыкновенные дифференциальные уравнения

Проиллюстрируем возможности преобразования Фурье для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть надо найти решение (называемое *фундаментальным*), удовлетворяющее уравнению $\mathcal{L}y = \delta(x)$, где $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n p_k \frac{d^k}{dx^k}$, p_k — постоянные числа. Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье. Получим $L(-i\xi)\tilde{y} = 1$, где $L(\lambda)$ — полином $L(\lambda) := \sum_{k=0}^n p_k \lambda^k$.

Запишем временно решение уравнения $L(-i\xi)\tilde{y} = 1$ как

$$\tilde{y} = \frac{1}{L(-i\xi)} + \text{общее решение однородного уравнения},$$

где первое слагаемое — какое-либо частное решение. Зная \tilde{y} , мы можем найти y путем применения обратного преобразования Фурье.

Обсудим некоторые детали. Во-первых, упомянутое в предыдущей строке общее решение однородного уравнения — это сумма (с произвольными коэффициентами) δ -функций, сосредоточенных в корнях полинома $L(-i\xi)$ (в случае кратных корней в эту сумму входят и производные δ -функций). Поэтому обратное преобразование Фурье от общего решения однородного уравнения приведет к сумме (с произвольными коэффициентами) экспонент вида $e^{i\xi_m x}$, ξ_m — корни полинома $L(-i\xi)$ (в случае кратных корней — к слагаемым вида $x^n e^{i\xi_m x}$).

Во-вторых, необходимо придать четкий смысл функционалу “ $\frac{1}{L(-i\xi)}$ ”, выражающему частное решение уравнения $L(-i\xi)\tilde{y} = 1$. При отсутствии у полинома $L(-i\xi)$ вещественных корней выражение $\frac{1}{L(-i\xi)}$ является гладкой функцией на вещественной оси (кавычки попросту не нужны), и обратное преобразование Фурье от этого слагаемого следует понимать как классическое (при этом интеграл, как правило, удастся вычислить с помощью вычетов).. При наличии же вещественных корней у $L(-i\xi)$ (пусть ξ_j — один из таких корней кратности n_j) выражение $\frac{1}{L(-i\xi)}$ следует разбить в сумму простых дробей. Те дроби, знаменатели которых не обращаются в ноль на вещественной оси, обрабатываются, как сказано выше. Что же касается слагаемых вида $\frac{1}{(\xi - \xi_j)^{n_i}}$, $n_i \leq n_j$, то их следует понимать как функционалы $\mathcal{P} \frac{1}{(\xi - \xi_j)^{n_i}}$, см.. §16.1.

Примеры:

1. Рассмотрим два уравнения $\mathcal{L} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \pm a^2 y = \delta(x)$. Преобразованием Фурье получаем $(\xi^2 \pm a^2)\tilde{y} = 1$. В случае знака “+” имеем $\tilde{y}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + a^2} + C_1 \delta(\xi - ia) + C_2 \delta(\xi + ia) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\xi x}}{\xi^2 + a^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} C_1 e^{ax} + \frac{1}{2\pi} C_2 e^{-ax}$ (в дальнейшем общее решение однородного уравнения опускаем). Вычисляя интеграл, находим $y(x) = \frac{e^{-a|x|}}{2a}$. В случае же знака “-” у нас $\tilde{y}(\xi) = \frac{1}{2a} \left(\mathcal{P} \frac{1}{\xi - a} - \mathcal{P} \frac{1}{\xi + a} \right) \Rightarrow y(x) = \frac{i}{4} [-\text{sign}(x) e^{-iax} + \text{sign}(x) e^{iax}] = \frac{1}{2a} \sin(ax) \text{sign}(x)$.
2. Попробуем решить методом Фурье очень простое уравнение $y' = 1$. После преобразования Фурье получаем $-i\xi\tilde{y} = 2\pi\delta(\xi)$. Найти частное решение делением на ξ в данном случае нельзя, поскольку обобщенную функцию $\delta(\xi)$ можно умножать только на гладкие функции. Таким образом, применение метода Фурье наталкивается здесь

на трудности (причина которых в том, что правая часть исходного уравнения не убывает на ∞). Однако в силу простоты задачи эти трудности, конечно, обходятся. Действительно, легко проверить, что общим решением уравнения $-i\xi\tilde{y} = 2\pi\delta(\xi)$ является $\tilde{y}(\xi) = C\delta(\xi) - 2\pi i\delta'(\xi) \Rightarrow y(x) = \frac{C}{2\pi} + x$.

17 Введение в задачи математической физики

17.1 Волновое уравнение в одномерном пространстве. Задача Коши, функция Грина

Однородное волновое уравнение на оси; формула Даламбера

Задачи Коши для одномерного волнового уравнения состоит в следующем: требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую при $x \in \mathbb{R}^1, t > 0$ уравнению

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) \quad (17.1)$$

и при $t = 0$ — начальным условиям

$$u|_{t=0} = u^{(0)}(x), \quad u_t|_{t=0} = u^{(1)}(x). \quad (17.2)$$

Временно предположим, что начальные данные достаточно гладкие для того, чтобы задача (17.1)–(17.2) имела классическое решение.

Решение задачи будем строить в два этапа. Вначале рассмотрим свободное (однородное) уравнение (17.1), т.е. положим $f(t, x) \equiv 0$. Легко видеть, сумма любых (гладких) функций $\phi(x - ct)$ и $\psi(x + ct)$ удовлетворяют однородному уравнению (17.1). Остается фиксировать эти функции так, чтобы удовлетворить начальным условиям (17.2).

Подставив сумму $u(t, x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ в (17.2), получим

$$\phi(x) + \psi(x) = u^{(0)}(x), \quad c\phi(x) - c\psi(x) = u^{(1)}(x). \quad (17.3)$$

Заметим, что равенства (17.3) выполняются тождественно по x . Дифференцируя первое из равенств (17.3) и производя элементарные вычисления, легко получить

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}[u^{(0)}]'(x) + \frac{1}{2c}u^{(1)}(x), \quad \psi'(x) = \frac{1}{2}[u^{(0)}]'(x) - \frac{1}{2c}u^{(1)}(x),$$

откуда

$$\phi(x) = \frac{1}{2}u^{(0)}(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u^{(1)}(x) dx + c_1, \quad \psi(x) = \frac{1}{2}u^{(0)}(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u^{(1)}(x) dx + c_2. \quad (17.4)$$

Подставляя (17.4) в (17.3) убеждаемся, что $c_1 + c_2 = 0$, поэтому сумма $\phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ от этих констант не зависит. Окончательно

$$u(t, x) = \frac{u^{(0)}(x + ct) + u^{(0)}(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^{(1)}(x) dx. \quad (17.5)$$

Формула (17.5) носит название *формулы Даламбера*.

Принцип Дюамеля

Пусть функция $v(t, x; \tau)$ (зависящая от вспомогательного параметра τ) удовлетворяет однородному уравнению (17.1) и специальным начальным условиям

$$v(t, x; \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad v_t(t, x; \tau)|_{t=\tau} = f(\tau, x). \quad (17.6)$$

Тогда функция

$$u(t, x) = \int_0^t v(t, x; \tau) d\tau \quad (17.7)$$

удовлетворяет неоднородному уравнению (17.1) с нулевыми начальными условиями. В силу линейности, решение задачи (17.1)–(17.2) есть сумма (17.5) и (17.7), причем из формулы Даламбера (17.5)

$$v(t, x; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi. \quad (17.8)$$

Проверка утверждения (17.6)–(17.7), носящего название *принципа Дюамеля*, осуществляется прямой подстановкой. Этот принцип без изменений переносится на задачу Коши для волнового уравнения в пространстве любого числа пространственных переменных.

Функция Грина задачи Коши

В приложениях часто приходится рассматривать задачу Коши (17.1)–(17.2) с данными $f(t, x)$, $u_{(0)}(x)$ и $u_{(1)}(x)$, гладкость которых (как функций x) недостаточна для того, чтобы сумма (17.5) и (17.7) оказалась классическим решением. Более того, данные задачи могут быть и обобщенными функциями. В этих случаях говорят об обобщенных решениях задачи Коши.^{17.1} Здесь мы рассмотрим одно из обобщенных решений, называемое *функцией Грина задачи Коши*, которое имеет принципиальное значение как с математической, так и с физической точек зрения.

Пусть $G(t, x)$ при $t > 0$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) однородному волновому уравнению $G_{tt} - c^2 G_{xx} = 0$ и начальным условиям

$$G(t, x)|_{t=0} = 0, \quad G_t(t, x)|_{t=0} = \delta(x), \quad (17.9)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, см. §16.1. Выполним преобразование Фурье по x , $G(t, x) \rightsquigarrow \tilde{G}(t, \xi) = F[G(t, x)](t, \xi)$. Фурье-образ \tilde{G} будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{G}_{tt} + c^2 \xi^2 \tilde{G} = 0 \quad (17.10)$$

и начальным условиям

$$\tilde{G}(t, \xi)|_{t=0} = 0, \quad \tilde{G}_t(t, \xi)|_{t=0} = 1. \quad (17.11)$$

Решением начальной задачи (17.10)–(17.11) является

$$\tilde{G}(t, \xi) = \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}. \quad (17.12)$$

^{17.1}Как правило, в случае волнового уравнения обобщенные решения можно считать обобщенными функциями (функционалами), действующими на пробные функции от x , и зависящие от t как от параметра.

Применяя обратное преобразование Фурье (которое в силу гладкости (17.12) является классическим), получаем

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} d\xi = \frac{1}{2c} \theta(ct - |x|), \quad (17.13)$$

где $\theta(\zeta)$ — функция Хэвисайда.^{17.3}

Располагая формулой (17.13) теперь нетрудно увидеть, что формула Даламбера (17.5), в предположении кусочной непрерывности начальных данных, может быть записана как

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} [u^{(0)}(\xi)G_t(t, x - \xi) + u^{(1)}(\xi)G(t, x - \xi)] d\xi, \quad (17.14)$$

т.е. в сверточном виде. Аналогично, выражение (17.7) с учетом (17.8) также является сверткой, но уже по двум переменным x и t . Используя для обозначения свертки значок $*$, можно написать

$$u(t, x) = G \underset{x,t}{*} f + G_t \underset{x}{*} u^{(0)} + G \underset{x}{*} u^{(1)}. \quad (17.15)$$

О распространении волн

Формулы (17.14) и (17.15) являются выражением *принципа Гюйгенса*. Действительно, функцию Грина $G(t, x)$ можно трактовать как возмущение, распространяющееся от источника, мгновенно (при $t = 0$) действующего в точке $x = 0$. С этой точки зрения формулы являются суперпозицией вкладов от каждой точки (t, x) , в которой отличны от нуля данные задачи. В силу того, что функция Грина равна нулю за пределами *светового конуса* $|x| < ct$, при финитных данных задачи возмущение $u(t, x)$ в удаленной точке x будет отличным от нуля только спустя некоторое время t_{\min} , равного минимальному расстоянию от носителя начальных данных до точки наблюдения, поделенному на *скорость* c . Момент прихода возмущения в точку наблюдения называется *передним фронтом волны*. Вообще говоря, в одномерном случае *задний фронт* отсутствует, т.е. возмущение в точке x не исчезает ни при каких временах. Исключение составляет лишь случай $f(t, x) = u^{(1)}(x) = 0$ (и при финитной функции $u^{(0)}(x)$). Отсутствие заднего фронта называют *диффузией волны*.

17.2 Волновое уравнение в трехмерном пространстве. Задача Коши, функция Грина

δ -функция на сфере и ее преобразование Фурье

В многомерном пространстве появляется возможность вводить распределения, сосредоточенные на многообразиях меньшей размерности. Нам потребуется δ -*функция на сфере*, которой по определению является следующий функционал: $(\delta_{S_R}, \phi) = \int_{S_R} \phi(x) ds_x$, где S_R

^{17.2}Формулы (17.10)–(17.12) справедливы и в многомерном случае, если в них под ξ понимать $|\xi|$.

^{17.3}Вычисление интеграла (18.7) может быть выполнено, например, с помощью теоремы о вычетах, см. §15.4; техника этого вычисления хорошо известна. Заметим, что "формально проинтегрировав" δ -функцию в формуле (17.5), мы бы получили тот же результат.

- сфера $|x| = R$. Дельта-функцию на сфере с центром в точке x_0 будем обозначать как $\delta_{S_R}(x - x_0)$.

Покажем, что

$$F[\delta_{S_R}(x)] = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \quad (17.16)$$

Действительно, применяя определение преобразования Фурье обобщенных функции, см. §16.3, имеем

$$\begin{aligned} (F[\delta_{S_R}(x)], \phi(\xi)) &= (\delta_{S_R}(x), \tilde{\phi}(x)) = \int_{S_R} \tilde{\phi}(x) ds_x = \int_{S_R} ds_x \int e^{-i\langle \xi, x \rangle} \phi(\xi) d\xi = \\ &= \int \phi(\xi) d\xi \int_{S_R} e^{-i\langle \xi, x \rangle} ds_x. \end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла перейдем к сферическим переменным в пространстве x -ов:

$$\int_{S_R} e^{-i\langle \xi, x \rangle} ds_x = R^2 \int_0^\pi d\vartheta e^{-iR\xi \cos \vartheta} \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|},$$

что и требовалось.

Функция Грина задачи Коши

Построим функцию Грина задачи Коши в случае трех пространственных измерений. Как и в одномерном случае, она является решением однородного волнового уравнения с начальными данными (17.9). Применение преобразования Фурье по пространственным переменным вновь приводит нас к формуле (17.12):

$$\tilde{G}(t, \xi) = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}. \quad (17.17)$$

Однако в трехмерном случае обратное преобразование Фурье нельзя трактовать как классическое из-за медленного убывания (17.17) при $|\xi| \rightarrow \infty$. Для того, чтобы найти его, сравним (17.17) с (17.16) и увидим, что

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta_{S_{ct}}(x). \quad (17.18)$$

Формула Кирхгофа

Располагая явным выражением для функции Грина (17.18), применим для решения задачи Коши сверточную формулу (17.15). Результатом является следующая (довольно громоздкая) формула, которая называется *формулой Кирхгофа*:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi c^2 (t - \tau)} \int_{S_{c(t-\tau)}(x)} f(\xi, \tau) ds_\xi \right] d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u^{(1)}(\xi) ds_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u^{(0)}(\xi) ds_\xi \right]. \end{aligned} \quad (17.19)$$

С физической точки зрения распространение волн в трехмерном пространстве отличается от одномерного случая одним важным обстоятельством: при финитных данных задачи в удаленной точке x наблюдаются как передний, так и задний фронты. Это обусловлено тем, что интегрирование в формуле (17.19) производится по поверхности сферы, и при достаточно большом радиусе ct этой сферы носители данных задачи оказываются целиком внутри сферы. Иными словами, в трехмерном пространстве отсутствует диффузия волн. Оказывается (на чем мы не останавливаемся), что в двумерном пространстве диффузия волн присутствует для любых данных задачи. Как было отмечено в §17.1, в одномерном случае, в зависимости от данных, возможны обе ситуации.

17.3 Неоднородное уравнение теплопроводности на конечном интервале. Метод Фурье

Рассмотрим (в простейшем варианте) задачу, моделирующую распределение температуры в однородном стержне. Задача состоит в определении функции $T(t, x)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(t, x) \quad \text{при } t > 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad (17.20)$$

краевым и начальным условиям

$$T|_{x=x_1} = T_1, \quad T|_{x=x_2} = T_2, \quad (17.21)$$

$$T|_{t=0} = T_0(x). \quad (17.22)$$

В уравнении (17.20) функция $Q(t, x)$ описывает внешнее тепло, подводимое к стержню, λ – коэффициент теплопроводности.^{17.4} Краевые условия (17.21) означают, что на концах стержня поддерживаются заданные температуры, а условие (17.22) задает начальное распределение температуры. Для простоты предполагаем, что λ и $T_{1,2}$ – постоянные величины.

Заменой

$$T(t, x) = \tilde{T}(t, x) + \left[T_1 + x \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \right]$$

задача (17.20)–(17.22) сводится к задаче с однородными краевыми условиями: функция $\tilde{T}(t, x)$ удовлетворяет уравнению (17.20), но вместо (17.21)–(17.22) – условиям

$$\tilde{T}|_{x=x_1} = 0, \quad \tilde{T}|_{x=x_2} = 0, \quad (17.23)$$

$$\tilde{T}|_{t=0} = T_0(x) - x \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}. \quad (17.24)$$

Решение задачи (17.20), (17.23), (17.24) будем искать в виде разложения по собственным функциям

$$\chi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{x_2 - x_1}} \sin \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

^{17.4}Предполагается, что в стержне поперечное распределение температуры однородно и боковая поверхность стержня не излучает тепла.

отрезка $[x_1, x_2]$, отвечающим краевым условиям (17.21). Иными словами,

$$\tilde{T}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \chi_n(x), \quad (17.25)$$

где зависящие от времени коэффициенты $c_n(t)$ подлежат определению. Подставляя разложение (17.25) в уравнение (17.20) и используя полноту собственных функций χ_n убеждаемся, что

$$c'_n(t) + \lambda \left(\frac{\pi n}{x_2 - x_1} \right)^2 c_n(t) = q_n(t), \quad (17.26)$$

где $q_n(t)$ – коэффициенты разложения $Q(t, x)$ по собственным функциям $\chi_n(x)$,

$$q_n(t) = \int_{x_1}^{x_2} Q(t, x) \chi_n(x) dx.$$

Начальные данные к уравнениям (17.26) получим, разложив по собственным функциям выражение (17.24):

$$c_n(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[T_0(x) - x \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \right] \chi_n(x) dx. \quad (17.27)$$

Тем самым решение задачи формально построено полностью. На обосновании полученных формул ^{17.5} мы не останавливаемся.

В частности, при отсутствии внешних источников тепла ($Q(t, x) \equiv 0$) функция $\tilde{T}(t, x)$ имеет вид

$$\tilde{T}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \exp \left[-\lambda \left(\frac{\pi n}{x_2 - x_1} \right)^2 t \right] \chi_n(x).$$

Отсюда видно, что $\tilde{T} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, тем самым, с увеличением времени распределение $T(t, x)$ температуры в стержне стремится к линейному.

18 Краевые задачи для уравнения Лапласа и Гельмгольца

18.1 Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, однородного и неоднородного. Теоремы существования. Теоремы единственности для внутренних задач

Краевая задача для уравнения Лапласа состоит в нахождении функции, зависящей от пространственных переменных, которая в заданной области Ω удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = f(x), \quad (18.1) \quad x \in \Omega,$$

^{17.5}Т.е. на формулировке условий на данные задачи, при которых ряд сходится при всех $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению (17.20) при $t > 0$ и начальному условию (17.24).

а на границе области либо сама функция, либо ее нормальная производная принимают заданные значения: ^{18.2}

$$u|_{\partial\Omega} = g(x) \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = g(x). \quad (18.2)$$

В первом случае краевые условия носят название условий Дирихле, во втором — Неймана.

Для дальнейшего нам понадобятся формулы Грина. Их вывод несложен: применим известную формулу Гаусса-Остроградского к векторному полю вида $\vec{A}(x) := u(x)\nabla v(x)$, где $u, v \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Учитывая $\operatorname{div} \vec{A} = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$ и $A_n = u(\nabla v \cdot \vec{n}) = u \frac{\partial v}{\partial n}$, где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω , получаем

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds_x, \quad (18.3)$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, dx = \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, ds_x \quad (18.4)$$

(формула (18.4) получена путем вычитания из (18.3) симметричной к ней формулы). ^{18.3}

Рассмотрим однородную задачу (18.1)–(18.2), $f = g \equiv 0$. Применив формулу Грина (18.4) к функциям u и $v = u$, получим

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds_x = 0,$$

откуда $\nabla u = 0$, или $u = \text{const}$. В случае условия Дирихле эта постоянная может быть, очевидно, только нулем и, тем самым, *решение задачи Дирихле единственно*. В случае же задачи Неймана решение *единственно с точностью до аддитивной постоянной*. ^{18.4}

Можно показать, что решение задачи Дирихле существует при любых, достаточно гладких, *данных задачи* $f(x)$, $g(x)$ и границы области $\partial\Omega$. В то же время из формулы (18.3) легко увидеть, положив $v \equiv 1$, что

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds_x$$

и, тем самым, в случае задачи Неймана данные задачи не могут быть заданы произвольно, а между ними должна существовать связь

$$\int_{\Omega} f \, dx = \oint_{\partial\Omega} g \, ds_x. \quad (18.5)$$

^{18.1}Неоднородное (т.е. с известной ненулевой правой частью) уравнение Лапласа часто называют уравнением Пуассона.

^{18.2}Возможно также задание на границе линейной комбинации функции и ее нормальной производной.

^{18.3}Формулы Грина являются многомерным аналогом интегрирования по частям:

$$\int_a^b (uv'' + u'v') \, dx = uv'|_a^b.$$

^{18.4}Функции, удовлетворяющие однородному уравнению Лапласа, называются гармоническими. Тем самым, гармоническая функция, обращающаяся на границе области в ноль, может быть только нулем, а имеющая на границе области нулевую нормальную производную — только константой.

Прокомментируем появление равенства (18.5) со спектральной точки зрения. С этой целью рассмотрим задачу на собственные функции оператора Лапласа в области $\partial\Omega$:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18.6)$$

Приведенные выше рассуждения о единственности решения задач для уравнения Лапласа означают, что $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи Дирихле, а для задачи Неймана — является (и ему отвечает собственная функция, равная постоянной).^{18.5} В случае, если однородная задача имеет нетривиальное решение, соответствующая неоднородная задача будет разрешима не всегда, а лишь при выполнении дополнительных условий на данные задачи. Равенство (18.5) как раз и является выражением таких условий разрешимости.

18.2 Функция Грина внутренней задачи Дирихле

Пусть Ω — некоторая ограниченная область в двух- или трехмерном пространстве. Функцией Грина внутренней задачи Дирихле назовем функцию $G(x, x')$, зависящую от координат двух точек, $x, x' \in \Omega$, и обладающую следующими свойствами:

- $\Delta G|_{\Omega \setminus \{x'\}} = 0$ (оператор Лапласа действует по координатам точки x);
- $G|_{x \in \partial\Omega} = 0$ для любого $x' \in \Omega$;
- при $x \rightarrow x'$ функция $G(x, x')$ имеет сингулярность вида

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{4\pi|x-x'|} + g(x, x') \quad \text{в } \mathbb{R}^3, \\ G(x, x') &= -\frac{1}{2\pi} \ln|x-x'| + g(x, x') \quad \text{в } \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (18.7)$$

где $g(x, x')$ — гладкая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, $\Delta g(x, x') = 0$.^{18.6}

Из приведенного определения сразу же следует единственность функции Грина (поскольку разность двух функций Грина будет гармонической в области Ω функцией, удовлетворяющей однородному краевому условию, и, тем самым, может быть только нулем).

Покажем, что

$$\oint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds_x = 1, \quad (18.8)$$

^{18.5}Можно показать, что обе задачи (18.6) имеют счетный набор вещественных неотрицательных собственных чисел, накапливающихся на бесконечности. Пример построения собственных чисел и собственных функций рассматривается в §20.2.

^{18.6}Данное определение функции Грина является классическим. Можно показать, что в смысле обобщенных решений функция Грина удовлетворяет уравнению

$$-\Delta G = \delta(x - x'),$$

и краевым условиям.

где $S_\varepsilon(x')$ — некоторая шаровая (круговая) окрестность точки x' , и выбрано направление нормали внутрь $S_\varepsilon(x')$. Действительно (ограничимся трехмерным случаем)

$$\oint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds_x = \oint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} ds_x - \oint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi r} ds_x, \quad r = |x - x'|.$$

Первый из интегралов справа равен нулю, поскольку по формуле Грина (18.3) он равен

$$- \int_{S_\varepsilon(x')} \Delta g dx,$$

а второй легко вычисляется.

Значение функции Грина для решения неоднородных краевых задач вытекает из следующего утверждения: решением (единственным) краевой задачи

$$-\Delta u|_\Omega = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

является

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x', x) f(x') dx'. \quad (18.9)$$

Для доказательства применим формулу Грина (18.4) к функциям $u(x')$ и $G(x', x)$ в области $\Omega \setminus S_\varepsilon(x)$. В силу краевых условий Дирихле интеграл по границе $\partial\Omega$ исчезает. Остается

$$\oint_{\partial S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds_{x'} = \int_{\Omega \setminus S_\varepsilon} (G \Delta u - u \Delta G) dx' = - \int_{\Omega \setminus S_\varepsilon} G(x', x) f(x') dx' \quad (18.10)$$

(направление нормали то же, что и в формуле (18.8)), поскольку $\Delta u = -f(x')$ и $\Delta G = 0$.

Рассмотрим предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в (18.10). Имеем

$$\left| \oint_{\partial S_\varepsilon} G \frac{\partial u}{\partial n} ds_{x'} \right| \leq \max_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \max_{S_\varepsilon} |G| 4\pi\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

В свою очередь,

$$\oint_{\partial S_\varepsilon} u \frac{\partial G}{\partial n} ds_{x'} = u(x) \oint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds_{x'} + \oint_{\partial S_\varepsilon} [u(x') - u(x)] \frac{\partial G}{\partial n} ds_{x'}.$$

Учтем, что $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial S_\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{\partial S_\varepsilon}$, так что при оценке последнего интеграла по модулю можно считать $\frac{\partial G}{\partial n}$ положительным при достаточно малых ε и воспользоваться (18.8). Тогда в силу непрерывности u этот интеграл исчезает в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым, с учетом (18.8), предельный переход в (18.10) приводит к равенству (18.9).

Функция Грина симметрична, $G(x, x') = G(x', x)$. Доказательство этого факта технически во многом повторяет предыдущее рассуждение (опускаем).

В случае областей со сравнительно простыми границами функцию Грина можно построить, решив методом разделения переменных краевую задачу. Однако существует также более короткий и физически наглядный способ решения. Мы проиллюстрируем этот метод на примерах.

Шар $|x| < R$ пусть $y' := x' \left(\frac{R}{|x'|} \right)^2$ – точка, симметричная с x' относительно сферы $S_R = \{x : |x| = R\}$. Ищем $g(x, x')$ в виде $g(x, x') = \frac{\alpha}{4\pi|x-y'|}$, где α – некоторая константа, которую нужно подобрать, исходя из краевых условий. При подстановке в краевые условия учтем, что при $x \in S_R$ выполняется соотношение $\frac{R}{|x'|} = \frac{|x-y'|}{|x-x'|}$, откуда следует, что следует положить $\alpha = \frac{R}{|x'|}$.

Полушар $|x| < R, x_3 > 0$ в этом примере функцию $g(x, x')$ приходится искать в более сложном виде (иначе не удастся одновременно удовлетворить краевым условиям как на полусфере $S_R, x_3 > 0$, так и на круге $x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$). Положим $g(x, x') = \frac{\alpha}{4\pi|x-y'|} + \frac{\alpha_1}{4\pi|x-y_1|} + \frac{\alpha'_1}{4\pi|x-y'_1|}$, где y' – точка, симметричная с x' относительно сферы, y_1 и y'_1 – точки, соответственно симметричные с x' и y' относительно плоскости $x_3 = 0$.^{18.7} Опуская подробности вычислений, приведем значения искомых констант:

$$\alpha = \frac{R}{|y'|}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha'_1 = -\frac{R}{|y'|}.$$

19 Сферические функции

19.1 Полиномы Лежандра

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лежандра

$$(1 - x^2)W''(x) - 2xW'(x) + \lambda W(x) = 0 \quad (19.1)$$

на отрезке $[-1, 1]$. Границы интервала $x = \pm 1$ для уравнения (19.1) являются правильными особыми точками с характеристическими показателями $\rho_{1,2} = 0$.^{19.1} Как известно, при равенстве характеристических показателей уравнение не может иметь двух, ограниченных в окрестности особой точки, линейно-независимых решений. Поэтому задание стандартных краевых условий к уравнению (19.1) в точках $x = \pm 1$ неправомерно. Вместо них рассмотрим условия ограниченности в особых точках:

$$|W(\pm 1)| < \infty \quad (19.2)$$

Постановка условий (19.2) также мотивирована приложениями уравнения Лежандра, обсуждаемыми в §19.2. Задача (19.1)–(19.2) носит название *сингулярной* задачи Штурма-Лиувилля.

Непосредственной проверкой устанавливается, что: *собственными числами и соответствующими им собственными функциями задачи (19.1)–(19.2) являются*

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (19.3)$$

^{18.7}О функции Грина часто говорят как о поле точечного источника, а о методе отражений – как о методе мнимых источников. В данном случае решение является суммой полей от источника в точке x' и его отражений (образов) y' (от сферы) и y_1 (от плоскости); в свою очередь, появление образа y_1 заставляет ввести еще одно отражение y'_1 – отражение точки y_1 от плоскости.

^{19.1}В силу инвариантности уравнения (19.1) относительно смены знака x всегда можно говорить лишь об одной из этих точек.

Действительно, заметив, что функции $v(x) := (x^2 - 1)^n$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $(x^2 - 1)v'(x) = 2xnv(x)$, и продифференцировав последнее $n + 1$ раз, мы приходим к уравнению (19.1), в котором $\lambda = n(n + 1)$.

Уравнение Лежандра (19.1) допускает самосопряженную форму записи

$$-\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dW}{dx} \right] = \lambda W,$$

немедленным следствием которой является ортогональность (с весом единица) собственных функций (19.3):

$$\int_{-1}^{+1} \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0 \quad \text{если} \quad m \neq n. \quad (19.4)$$

Полнота системы собственных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ нуждается в отдельном доказательстве, которое выходит за рамки данного конспекта.

Легко видеть, что функции $\psi_n(x)$ являются полиномами степени n . Выражения

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (19.5)$$

(отличающиеся от $\psi_n(x)$ лишь множителем) называются *полиномами Лежандра*. Ниже приводятся без доказательства некоторые свойства (часть из которых, впрочем, очевидны) этих полиномов.

- $P_{2m}(x)$ — четная функция, $P_{2m+1}(x)$ — нечетная функция;
- $P_n(x)$ имеет n корней внутри интервала $(-1, 1)$;
- $P_n(1) = 1 \quad \forall n$;
- $\|P_n\|^2 := \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}$.

Рассмотрим теперь присоединенное уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)W''(x) - 2xW'(x) + \lambda W(x) - \frac{\mu^2}{1 - x^2}W(x) = 0. \quad (19.6)$$

Ограничимся рассмотрением случая целых значений параметра μ , $\mu = m = 0, 1, \dots$

И здесь непосредственной проверкой (которую для краткости опустим) можно убедиться в том, что при каждом фиксированном m краевая задача (19.6)–(19.2) имеет следующий набор собственных чисел и собственных функций:

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad n \geq m.$$

Меняя m от 0 до ∞ получаем полный набор собственных функций ^{19.2}

$$P_n^m(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (19.7)$$

^{19.2}Их ортогональность и, тем самым, линейная независимость также вытекают из возможности записать уравнение (19.6) в самосопряженной форме.

называемых *присоединенными полиномами Лежандра* (хотя полиномами они являются только при четных m). Заметим, что собственные числа $\lambda_n = n(n+1)$ (кроме $\lambda_0 = 0$) являются кратными: каждому λ_n отвечает $n+1$ собственная функция (19.7). Без доказательства укажем нормировочное соотношение для присоединенных полиномов Лежандра:

$$\|P_n^m\|^2 := \int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2}{2n+1}. \quad (19.8)$$

19.2 Сферические функции

В сферических координатах (r, φ, ϑ) оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right]. \quad (19.9)$$

Выражение в квадратных скобках содержит только дифференцирования по угловым переменным, и поэтому называется *угловой частью оператора Лапласа*, или *оператором Лапласа на (единичной) сфере*. В дальнейшем мы обозначим это выражение через Δ_S (иногда используется обозначение $\Delta_{\varphi, \vartheta}$).

Рассмотрим задачу на собственные функции оператора Лапласа на сфере. Эта задача состоит в определении тех чисел λ , при которых уравнение

$$-\Delta_S Y(\varphi, \vartheta) = \lambda Y(\varphi, \vartheta) \quad (19.10)$$

имеет нетривиальные 2π -периодические по φ ограниченные решения, и самих этих решений.

Попытаемся построить искомые решения разделением переменных. Подставив в (19.10) $Y(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi)\Psi(\vartheta)$ и разделив переменные, получим

$$-\Phi'' = \mu^2 \Phi, \quad (19.11)$$

$$\Psi'' + \cot \vartheta Y' + \lambda Y = \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} Y, \quad (19.12)$$

где μ^2 — константа разделения. Решения

$$A \sin \mu \varphi + B \cos \mu \varphi$$

уравнения (19.11) будут 2π -периодическими функциями φ , если $\mu = m = 0, 1, \dots$. В свою очередь, заменой переменной $x = \cos \vartheta$ уравнение (19.12) приводится к присоединенному уравнению Лежандра (19.6), спектральный анализ которого обсуждался в предыдущем параграфе. Используя результаты §19.1, мы приходим к следующему заключению:

- собственными числами задачи (19.10) являются $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$;
- каждое собственное число является $2n+1$ кратным, каждому λ_n отвечают собственные функции

$$P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi, \quad m = 0, 1, \dots, n; \quad (19.13)$$

- собственные функции (19.13) образуют полную систему; они ортогональны (по обоим значкам) в смысле скалярного произведения

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\varphi, \vartheta) v(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta.$$

Выражения (19.13) называются *сферическими функциями*; они обозначаются (как правило) через $Y_n^m(\varphi, \vartheta)$. В силу (19.8)

$$\|Y_n^m\|^2 = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2\pi}{2n+1}.$$

19.3 Разделение переменных в краевых задачах для уравнения Лапласа в шаре

В этом параграфе речь пойдет о следующей задаче:

$$\Delta u = 0, \quad x = (r, \varphi, \vartheta), \quad r < a, \quad (19.14)$$

$$u|_{r=a} = g(\varphi, \vartheta) \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = g(\varphi, \vartheta). \quad (19.15)$$

Предполагается, что функция $g(\varphi, \vartheta)$ может быть разложена в ряд по сферическим функциям (19.13):

$$g(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n g_n^m Y_n^m(\varphi, \vartheta), \quad g_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\varphi, \vartheta) \frac{Y_n^m(\varphi, \vartheta)}{\|Y_n^m\|^2} \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta. \quad (19.16)$$

Решение задачи (19.14)–(19.15) будем формально ^{19.3} искать в виде разложения по сферическим функциям с зависящими от r коэффициентами:

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_n^m(r) Y_n^m(\varphi, \vartheta). \quad (19.17)$$

После подстановки разложения (19.17) в (19.14) и с учетом (19.9) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_n^m}{dr} \right) Y_n^m + c_n^m \frac{1}{r^2} \Delta_S Y_n^m \right] = 0. \quad (19.18)$$

В свою очередь, для выполнения краевых условий (19.15) необходимо потребовать

$$c_n^m(a) = g_n^m \quad \text{или} \quad \frac{dc_n^m}{dr}(a) = g_n^m. \quad (19.19)$$

Как показано в §19.2, действие оператора Δ_S на сферическую функцию Y_n^m сводится к умножению этой функции на $-n(n+1)$. Тем самым (19.18) переходит в

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_n^m}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} c_n^m \right] Y_n^m = 0, \quad (19.20)$$

^{19.3}Т.е. не останавливаясь на вопросе о сходимости соответствующих рядов.

причем выражения в квадратных скобках здесь зависят только от r . Воспользовавшись полнотой сферических функций заключаем, что для любого $n = 0, 1, \dots$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_n^m}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} c_n^m = 0. \quad (19.21)$$

Каждое из уравнений (19.21) имеет решение

$$c_n^m(r) = A_n^m r^n + B_n^m r^{-n-1}$$

с произвольными постоянными A_n^m, B_n^m . В этом выражении следует положить $B_n^m = 0$, поскольку неограниченное при $r \rightarrow 0$ выражение не может удовлетворять уравнению Лапласа в области $r < a$. Оставшиеся неизвестные постоянные A_n^m фиксируются условиями (19.19). В случае условия Дирихле $A_n^m = \frac{g_n^m}{a^n}$ для всех $n = 0, 1, \dots, m = 0, \dots, n$. В случае условия Неймана для $n \geq 1$ находим $A_n^m = \frac{a}{n} \frac{g_n^m}{a^n}$. При $n = 0$ (и соответственно $m = 0$) равенство $\left. \frac{dc_0^0}{dr} \right|_{r=0} = g_0^0$ сводится к $g_0^0 = 0$.

Таким образом, задача Неймана разрешима (причем неоднозначно, поскольку постоянная A_0^0 остается неопределенной) только при выполнении условия $g_0^0 = 0$ или, в силу (19.16),

$$\oint_{\partial\Omega} g ds_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = 0. \quad (19.22)$$

Заметим, что условие разрешимости (19.22) ранее, см. (18.5), было получено в общей ситуации.

20 Уравнение Бесселя

20.1 Уравнение Бесселя. Функции Бесселя

Уравнение

$$W''(z) + \frac{1}{z} W'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) W(z) = 0 \quad (20.1)$$

называется *уравнением Бесселя*, а его решения — *цилиндрическими функциями*. В уравнение входит параметр ν , зависимость решений от которого обозначается при помощи индекса, или *значка*: $W(z) \rightsquigarrow W_\nu(z)$.

Из аналитической теории дифференциальных уравнений известно, что одно из решений уравнения (20.1) может быть построено в виде ряда

$$z^\nu \sum_{n \geq 0} c_n z^n. \quad (20.2)$$

Подставляя этот ряд в уравнение и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях z получаем

$$c_n n(n + 2\nu) + c_{n-2} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20.3)$$

и коэффициенты с отрицательными индексами считаются равными нулю. Применяя рекуррентные соотношения (20.3) при $n = 0$ и $n = 1$ убеждаемся, что коэффициент c_0 может быть выбран произвольно, в то время как $c_1 = 0$. Применяя (20.3) для $n \geq 2$, находим

$$c_{2m} = c_0 \frac{(-1)^m}{m! 2^{2m} (m + \nu) \dots (1 + \nu)}, \quad c_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (20.4)$$

Функцией Бесселя называется ряд (20.2) с коэффициентами (20.4) и при $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \quad (20.5)$$

где $\Gamma(\zeta)$ — Γ -функция.^{20.1} Ряд (20.5) сходится при всех комплексных z . Можно показать, что при $\operatorname{Re} \nu > 0$ функция Бесселя является единственным (с точностью до множителя) решением уравнения (20.1), ограниченным при $z \rightarrow \infty$.

В приложении, рассматриваемом в §20.2, фигурируют функции Бесселя вещественного значка и вещественного аргумента. Из (20.5) ясно, что эти функции принимают только вещественные значения. Нам потребуется еще следующий факт: функция Бесселя $J_\nu(x)$ при вещественных ν имеет счетное множество корней $\zeta_{\nu,k} > 0$, $J_\nu(\zeta_{\nu,k}) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, накапливающихся к положительной бесконечности, $\zeta_{\nu,k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Сказанное в равной мере относится и к корням $\zeta'_{\nu,k}$ производной функции Бесселя.

Рассмотрим на отрезке $[0, a]$ следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{\nu^2}{x} \psi = \lambda x \psi, \quad (20.6)$$

$$|\psi(0)| < \infty, \quad \psi|_{x=a} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=a} = 0. \quad (20.7)$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ уравнение (20.6) совпадает с уравнением Бесселя (20.1).

Простой проверкой устанавливается, что выражения $W_\nu(\sqrt{\lambda}x)$, где W_ν — любая цилиндрическая функция, удовлетворяют уравнению (20.6). Выбрав в качестве цилиндрической функции функцию Бесселя, мы обеспечиваем выполнение условия ограниченности в нуле. Тогда краевые условия (20.6) в точке a будут выполняться, если потребовать

$$\sqrt{\lambda}a = \zeta_{\nu,k} \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda}a = \zeta'_{\nu,k}.$$

Таким образом, мы нашли собственные числа $\lambda_{\nu,k} = \left(\frac{\zeta_{\nu,k}}{a}\right)^2$, или $\lambda_{\nu,k} = \left(\frac{\zeta'_{\nu,k}}{a}\right)^2$, и собственные функции $\psi_{\nu,k}(x) = J_\nu\left(\zeta_{\nu,k} \frac{x}{a}\right)$, или $\psi_{\nu,k}(x) = J_\nu\left(\zeta'_{\nu,k} \frac{x}{a}\right)$, задачи (20.6)–(20.7).

В силу самосопряженной записи уравнения (20.6) собственные функции, отвечающие различным значкам k , ортогональны с весом x . Укажем без доказательства

$$\|\psi_{\nu,k}\|^2 = \int_0^a \psi_{\nu,k}^2(x) x \, dx = \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\zeta_{\nu,k})]^2 \quad (\text{для краевого условия Дирихле}).$$

^{20.1}При переходе от (20.4) к (20.5) использовалось следующее свойство Γ -функции: $\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta)$.

^{20.2}О мотивировках постановки условия ограниченности в особых точках см. §19.1.

20.2 Собственные функции, собственные значения спектральной задачи Дирихле. Колебания круглой мембраны

В качестве примера на построение собственных функций оператора Лапласа рассмотрим спектральную задачу в круге: требуется найти нетривиальные 2π -периодические по φ решения уравнения

$$-\Delta u = \lambda u, \quad r < a, \quad (20.8)$$

удовлетворяющие краевому условию

$$u|_{r=a} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (20.9)$$

Разделяя переменные, $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, убеждаемся, что 2π -периодические по φ решения задачи (20.8)–(20.9) будут иметь вид

$$R(r) [A \sin m\varphi + B \cos m\varphi], \quad m = 0, 1, \dots,$$

где функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

и краевому условию $R(a) = 0$ или $R'(a) = 0$. Добавляя естественное условие ограниченности $R(0)$ и используя результаты §20.1, получаем, что искомыми собственными числами являются

$$\lambda_{m,k} = \left(\frac{\zeta_{m,k}}{a} \right)^2 \quad \text{или} \quad \lambda_{m,k} = \left(\frac{\zeta'_{m,k}}{a} \right)^2, \quad {}^{20.3} \quad m = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20.10)$$

$$u_{m,k}(r, \varphi) = J_m \left(\zeta_{m,k} \frac{r}{a} \right) \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad u_{m,k}(r, \varphi) = J_m \left(\zeta'_{m,k} \frac{r}{a} \right) \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix}. \quad (20.11)$$

Располагая набором собственных функций (20.11) можно решить задачу о колебаниях круглой мембраны. Постановка этой задачи состоит в следующем: требуется определить функцию $u(t, r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(t, r, \varphi) \quad \text{при} \quad r < a, \quad (20.12)$$

краевому условию

$$u|_{r=a} = 0 \quad (20.13)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = u^{(0)}(r, \varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u^{(1)}(r, \varphi). \quad (20.14)$$

С физической точки зрения величина $u(t, r, \varphi)$ есть отклонение (в приближении малых колебаний) точки (r, φ) мембраны в момент времени t ; под мембраной подразумевается

^{20.3}Заметим, что в случае краевого условия Неймана среди собственных чисел (20.10) есть ноль: $\zeta'_{0,1} = 0$ поскольку функция $J_0(x)$ — четная; отвечающая нулевому собственному числу собственная функция (20.11) есть постоянная.

бесконечно-тонкая нерастяжимая пластина, материальные свойства которой однородны и описываются коэффициентом c ; краевое условие (20.13) означает, что кромка пластины зафиксирована; функция $f(t, r, \varphi)$ описывает приложенную точки (r, φ) и в момент времени t внешнюю силу; условия (20.14) имеют смысл начальной (при $t = 0$) формы мембраны и скоростей ее точек, соответственно.

Решение задачи (20.12)–(20.14) легко получить в виде разложения по собственным функциям (20.11) (отвечающим краевому условию Дирихле). Результат имеет вид:

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{m,k}(t) u_{m,k}(r, \varphi). \quad (20.15)$$

В (20.15) зависящие от времени коэффициенты $T_{m,k}(t)$ являются решениями следующих начальных задач:

$$T_{m,k}'' + c^2 \lambda_{m,k} T_{m,k} = f_{m,k}(t), \quad T_{m,k}(0) = u_{m,k}^{(0)}, \quad T_{m,k}'(0) = u_{m,k}^{(1)}, \quad (20.16)$$

где $\lambda_{m,k} = \left(\frac{\zeta_{m,k}}{a}\right)^2$ — собственные числа (20.10) (для задачи Дирихле),

$$f_{m,k}(t) = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(t, r, \varphi) \frac{u_{m,k}(r, \varphi)}{\|u_{m,k}\|^2} r \, dr \, d\varphi,$$

$$u_{m,k}^{(0,1)} = \int_0^a \int_0^{2\pi} u^{(0,1)}(r, \varphi) \frac{u_{m,k}(r, \varphi)}{\|u_{m,k}\|^2} r \, dr \, d\varphi$$

— коэффициенты разложения данных задачи по собственным функциям (20.11), $\|u_{m,k}\|^2 = \frac{\pi}{2} a^2 [J_m'(\zeta_{m,k})]^2$.

ЛИТЕРАТУРА К §§15–20

1. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, 1976.
2. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 1981.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, 1959.
4. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*.
5. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, тт.1, 2.
6. Ф. Олвер. *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, 1978.
7. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, *Теория функций комплексного переменного*, 1967.
8. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, III, ч.2, IV, ч.2.
9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 1977.
10. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*.

21 Интегральные уравнения

21.1 Интегральные уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма

Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (21.1)$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции, x и t – вещественные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b) , λ – комплексный параметр. Пределы интегрирования a и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Функция $K(x, t)$ называется ядром интегрального уравнения (21.1). В дальнейшем предполагается, что ядро определено в квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$ на плоскости (x, t) и двойной интеграл

$$B^2 \equiv \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt, \quad (21.2)$$

сходится. В частности, ядро может быть непрерывным в Q . В случае бесконечных a и b поведение ядра на бесконечности должно обеспечивать сходимость интеграла (21.2). Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (21.1) называется неоднородным. В дальнейшем предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна, либо ее сингулярности в конечных точках интервала $[a, b]$ и поведение на бесконечности (в случае бесконечных a и b) таковы, что интеграл

$$q^2 \equiv \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad (21.3)$$

сходится.

Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (21.4)$$

и называется однородным. Значения параметра λ , при котором однородное уравнение (21.4) имеет нетривиальное, т.е. не равное тождественно нулю, решение, называются характеристическими числами уравнения (21.1) или ядра $K(x, t)$. Каждое ненулевое решение уравнения (21.4) называется собственной функцией, соответствующей характеристическому числу λ .

Решение уравнения (21.1) можно искать методом последовательных приближений в виде степенного ряда:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) \quad (21.5)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (21.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , получим рекуррентные равенства:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_0(x) = f(x)$. Отсюда следует, что

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt, \quad (21.6)$$

где через $K_n(x, t)$ обозначены ядра n - тых степеней K^n интегрального оператора Фредгольма

$$K\varphi = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt,$$

$K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Функции $K_n(x, t)$ при $n = 2, 3, \dots$ называются итерированными ядрами и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_{n-1}(x, s)K(s, t)ds, \quad n \geq 2. \quad (21.7)$$

Ряд (21.5) сходится в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{B}. \quad (21.8)$$

В случае непрерывного ядра $K(x, t)$ и непрерывного свободного члена $f(x)$ ряд (21.5) сходится равномерно по $x \in [a, b]$. Условия сходимости ряда (21.5) являются следствием оценок, которые легко получаются с помощью неравенства Коши-Буняковского, примененного к интегралам в формулах (21.7) и (21.6). Эти оценки имеют вид

$$|K_n(x, t)| \leq R(t)Q(x)B^{n-2}, n \geq 2, \quad |\varphi_n(x, t)| \leq Q(x)qB^{n-1}, n \geq 1,$$

где постоянные B и q определяются в (21.2) и (21.3) соответственно, а функции $R(t)$ и $Q(x)$ даются равенствами

$$Q^2(x) \equiv \int_a^b |K(x, t)|^2 dt, \quad R^2(t) \equiv \int_a^b |K(x, t)|^2 dx.$$

Ядро резольвенты интегрального уравнения (21.1) определяется через итерированные ядра $K_n(x, t)$ формулой

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t), \quad (21.9)$$

где ряд стоящий в правой части, называется рядом Неймана ядра резольвенты. Также как и ряд (21.5), ряд Неймана сходится в круге (21.8). В случае непрерывного ядра $K(x, t)$ и непрерывной неоднородности $f(x)$ ряд Неймана для резольвенты сходится равномерно по x и t .

На основании равенств (21.9) и (21.5) решение неоднородного уравнения Фредгольма при значениях параметра λ , принадлежащих кругу (21.8) выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt. \quad (21.10)$$

Это решение единственно. Для доказательства следует проверить, что при указанных λ соответствующее однородное уравнение (21.4) имеет лишь тривиальное решение. Последнее означает, что в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$ у уравнения Фредгольма нет характеристических чисел.

Условие (21.8) является существенным для сходимости ряда Неймана (21.9) для ядра резольвенты. Однако решение уравнения (21.1) в виде (21.10) может существовать и для значений $|\lambda| > \frac{1}{B}$. Эта возможность контролируется теоремами Фредгольма.

Для формулировки теорем Фредгольма наряду с уравнением (21.1) введем сопряженное уравнение

$$\psi(x) = h(x) + \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x, t)\psi(t)dt, \quad (21.11)$$

где $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$ и введем однородное сопряженное уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x, t)\psi(t)dt. \quad (21.12)$$

Приведем ниже формулировки четырех теорем Фредгольма.

Теорема 1.

Уравнение Фредгольма (21.1) в любой ограниченной замкнутой области параметра комплексного параметра λ имеет не более конечного числа характеристических чисел.

Теорема 2 (альтернатива Фредгольма).

Либо неоднородное уравнение (21.1) имеет единственное решение при любом свободном члене $f(x)$ из рассматриваемого класса функций, либо однородное уравнение (21.4) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.

Теорема 3.

Однородное уравнение (21.4) и сопряженное однородное уравнение (21.12) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений.

Теорема 4.

Для разрешимости уравнения (21.1) необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ был ортогонален к собственным функциям сопряженного уравнения:

$$\int_a^b f(x)\bar{\psi}(x)dx = 0,$$

где $\psi(x)$ – любое решение сопряженного однородного уравнения (21.12).

Альтернатива Фредгольма уже была сформулирована в разделе 2 настоящего конспекта в связи с разрешимостью неоднородных систем алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Отметим, что остальные теоремы Фредгольма, сформулированные выше, также справедливы для систем алгебраических уравнений. Более того, любое интегральное уравнение с вырожденным ядром (21.21) (см. раздел 23) элементарным образом сводится к системе алгебраических уравнений с квадратной матрицей (при этом числа, обратные

к характеристическим числам интегрального уравнения, являются собственными числами этой алгебраической системы). Тогда теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром возникают как простое следствие теорем Фредгольма для соответствующей системы алгебраических уравнений. Для произвольного интегрального уравнения с компактным ядром (определение компактного ядра дано в разделе 23) можно доказать существование эквивалентного ему интегрального уравнения с вырожденным ядром. Этого достаточно, чтобы доказательства теорем Фредгольма для интегральных уравнений с компактными ядрами свести к доказательству теорем Фредгольма для систем линейных уравнений. Заметим, что ядра, для которых интеграл (21.2) конечен, и, в частности, непрерывные ядра являются компактными. Для интегральных уравнений с непрерывными ядрами теоремы Фредгольма можно доказать и непосредственно, без установления связи с системами алгебраических уравнений. Однако еще раз подчеркнем, что появление теорем Фредгольма в теории интегральных уравнений и в теории линейных алгебраических уравнений не должно казаться случайным, поскольку является глубоким математическим фактом.

21.2 Интегральные уравнения Вольтерра.

Интегральным уравнением Вольтерра второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (21.13)$$

где $\varphi(x)$ - неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ - известные функции, x и t - вещественные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b) , λ - комплексный параметр. Предел интегрирования a может быть как конечными, так и бесконечными. Функция $K(x, t)$ называется ядром интегрального уравнения(21.13). Для уравнения Вольтерра ядро определено и отлично от нуля в треугольнике $\Delta = (a \leq x \leq b, a \leq t \leq x) \subset Q = [a, b] \times [a, b]$ на плоскости (x, t) . В дальнейшем будем считать, что ядро непрерывно в области Δ , а функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x \leq b$. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (21.13) называется неоднородным. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (21.14)$$

и называется однородным.

Решение уравнения (21.13) можно искать методом последовательных приближений в виде степенного ряда:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) \quad (21.15)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (21.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , получим рекуррентные равенства:

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_0(x) = f(x)$. Отсюда следует, что

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K_n(x, t)f(t)dt, \quad (21.16)$$

где через $K_n(x, t)$ обозначены ядра n - тых степеней K^n интегрального оператора оператора Вольтерра

$$K\varphi = \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt,$$

$K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Функции $K_n(x, t)$ при $n = 2, 3, \dots$ называются итерированными ядрами и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K_n(x, t) = \int_t^x K_{n-1}(x, s)K(s, t)ds, \quad n \geq 2 \quad (21.17)$$

В случае непрерывного ядра $K(x, t)$ и непрерывного свободного члена $f(x)$ ряд (21.15) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [a, b]$ при любом λ . Условия сходимости ряда (21.15) являются следствием оценок интегралов в формулах (21.17) и (21.16). Эти оценки имеют вид

$$|K_n(x, t)| \leq M^n \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad |\varphi_n(x, t)| \leq M^n m \frac{(x-a)^n}{n!},$$

где постоянные M и m определяются неравенствами

$$|f(x)| \leq m, \quad x \in [a, b], \quad |K(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \Delta.$$

Ядро резольвенты интегрального уравнения (21.13) определяется через итерированные ядра $K_n(x, t)$ формулой

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t), \quad (21.18)$$

где ряд стоящий в правой части, называется рядом Неймана для ядра резольвенты. Также как и ряд (21.15), ряд Неймана для ядра резольвенты уравнения Вольтерра сходится при любом λ . В случае непрерывного ядра $K(x, t)$ и непрерывного свободного члена $f(x)$ ряд Неймана сходится абсолютно и равномерно по x и t .

На основании равенств (21.18) и (21.15) решение неоднородного уравнения Вольтерра при любых значениях параметра λ и при любом свободном члене $f(x)$ выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t; \lambda)f(t)dt. \quad (21.19)$$

Это решение единственно. Для доказательства следует проверить, что при любых λ соответствующее однородное уравнение (21.14) имеет лишь тривиальное решение. Напомним, что значения параметра λ , при котором однородное интегральное уравнение имеет нетривиальное решение, называются характеристическими числами интегрального оператора K , определяющего это уравнение, или характеристическими числами самого уравнения. Таким образом, уравнение Вольтерра не имеет характеристических чисел.

21.3 Интегральные уравнения с самосопряженным ядром

Ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения называется самосопряженным, если ядро сопряженного уравнения $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$ совпадает с исходным ядром: $K^*(x, t) \equiv K(x, t)$.

В дальнейшем будут рассматриваться интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (21.20)$$

с самосопряженными ядрами, для которых интеграл в (21.2) конечен. Можно показать, что интегральный оператор Фредгольма с квадратично-интегрируемым ядром является компактным. Компактным называется оператор, который "мало" отличается от некоторого конечномерного оператора. Для интегральных операторов это условие удобно формулируется в терминах ядер. Ядро $K(x, t)$ называется компактным, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует вырожденное (конечномерное) ядро $T_\varepsilon(x, t)$ такое, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t) - T_\varepsilon(x, t)|^2 dx dt < \varepsilon.$$

Напомним, что ядро $T(x, t)$ называется вырожденным, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от x на функции только от t , т.е. если оно имеет вид

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t). \quad (21.21)$$

Здесь система функций $\{a_k(x)\}$ линейно независима. То же справедливо и для системы функций $\{b_k(t)\}$.

Поскольку существуют операторы Фредгольма, у которых вообще нет характеристических чисел, для дальнейшего существенным является следующее утверждение. У интегрального оператора Фредгольма с компактным самосопряженным ядром существует хотя бы одно характеристическое число.

Легко показать, что характеристические числа интегрального уравнения Фредгольма второго рода с самосопряженным ядром являются вещественными. Собственные функции, отвечающие разным характеристическим числам ортогональны. Напомним, что утверждение о вещественности собственных чисел и об ортогональности собственных функций, отвечающих различным собственным числам, верно для произвольного самосопряженного оператора (см. раздел 4.2 настоящего конспекта). Отметим, что собственные и характеристические числа оператора связаны обратным преобразованием.

Так как характеристические числа вещественны, их можно упорядочить по модулю и пронумеровать:

$$\begin{array}{ccccccc} |\lambda_1| \leq & |\lambda_2| \leq & \dots & \leq & |\lambda_n| \leq & \dots & \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & & \varphi_n & & \end{array}$$

Ортоанализуя собственные функции, отвечающие кратным характеристическим числам, и нормируя все собственные функции, получим конечную или бесконечную систему орто-

нормированных собственных функций:

$$(\varphi_k, \varphi_l) \equiv \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_l(x)} dx = \delta_{kl}.$$

Пусть уравнение Фредгольма с компактным самосопряженным ядром $K(x, t)$ имеет лишь конечное число характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. В этом случае ядро может быть представлено в виде:

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}, \quad (21.22)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - ортонормированные собственные функции. Формула (21.22) называется билинейным разложением для ядра.

На основании представления (21.22) можно доказать, что конечность числа характеристических чисел является необходимым и достаточным условием вырожденности самосопряженного компактного ядра.

Далее, пусть у уравнения Фредгольма с компактным самосопряженным ядром $K(x, t)$ имеется бесконечное число характеристических чисел. Тогда билинейное разложение для ядра имеет вид:

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)} \quad (21.23)$$

Если ядро квадратично-интегрируемо, то ряд (21.23) сходится в среднем, а именно

$$\int_a^b \int_a^b \left| K(x, t) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(st)} \right|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Согласно теореме Мерсера, если самосопряженное ядро непрерывно и имеет конечное число отрицательных характеристических чисел, то ряд (21.23) сходится равномерно.

Поскольку ряд (21.23) является разложением ядра в ряд Фурье и этот ряд сходится к ядру в среднем, то справедливо уравнение замкнутости (см. §12.2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k(x)|^2 = \int_a^b |K(x, t)|^2 dt,$$

где коэффициенты Фурье даются выражением:

$$C_k(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi_k(t) ds = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Отсюда следует важное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt = B^2$$

В условиях теоремы Мерсера верна следующая формула для следа интегрального оператора с непрерывным самосопряженным ядром:

$$\int_a^b K(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Так как итерированные ядра очевидно также является самосопряженным и компактными, то соответствующие билинейные разложения итерированных ядер имеют вид:

$$K_n(x, t) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^n} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}. \quad (21.24)$$

Подставим билинейные разложения (21.24) в ряд Неймана для ядра резольвенты уравнения Фредгольма (21.9). В результате получим двойной ряд по индексам n и k . Напомним, что ряд Неймана сходится при $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Так как внутри круга сходимости ряда Неймана нет характеристических чисел, что для всех характеристических чисел выполнено неравенство $|\lambda_k| \geq \frac{1}{B}$, тем самым внутри круга сходимости $|\frac{\lambda}{\lambda_k}| < 1$. Используя последнее неравенство при суммировании ряда по индексу n , получим билинейную формулу для резольвенты компактного самосопряженного ядра:

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k - \lambda} \quad (21.25)$$

Эта формула верна в круге сходимости $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Аналитически продолжим представление (21.25) на всю комплексную плоскость. В результате получим ядро резольвенты компактного самосопряженного оператора Фредгольма как мероморфную функцию переменной λ , полюса которой суть характеристические числа. Видно, что полюса резольвенты компактного самосопряженного оператора являются простыми.

Если λ не является характеристическим числом, то решение уравнения (21.20) можно записать, используя ядро резольвенты в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt.$$

Подставим сюда билинейное разложение (21.25) для ядра резольвенты, введем обозначение

$$f_k = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$$

и получим формулу Шмидта для решения уравнения Фредгольма с компактным сопряженным ядром в том случае, когда λ не является характеристическим числом:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \varphi_k(x)}{\lambda_k - \lambda}. \quad (21.26)$$

Выписанный выше ряд сходится в среднем. В случае непрерывного ядра $K(x, t)$, имеющего лишь конечное число отрицательных характеристических чисел, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Теперь рассмотрим случай, когда λ является характеристическим числом ранга m : $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m-1}$. В этом случае согласно 4-ой теореме Фредгольма уравнение $\varphi = f + \lambda K\varphi$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(f, \psi_j) = 0$, где ψ_j – собственные функции оператора K^* : $\psi_j = \bar{\lambda}K^*\psi_j$. В нашем случае $K = K^*$ и сопряженное уравнение и основное уравнение совпадают. Следовательно, $\varphi_j = \psi_j$. Поэтому условия разрешимости станут такими: $(f, \varphi_j) = 0 \Rightarrow f_j = 0$, $j = k, k+1, \dots, k+m-1$, а соответствующие слагаемые в формуле (21.26) обратятся в нуль. Одновременно к общему решению неоднородного уравнения добавится линейная комбинация решений однородного уравнения, т.е. собственных функций φ_j . В результате формула Шмидта в том случае, когда λ совпадает с одним из характеристических чисел, принимает вид

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j \varphi_j(t)}{\lambda_j - \lambda} + \sum_{j=k}^{k+m-1} C_j \varphi_j, \quad j \neq k, k+1, \dots, k+m-1. \quad (21.27)$$

Условия сходимости последнего ряда такие же, как и для ряда (21.26).

22 Разрешимость краевых задач для уравнения Гельмгольца

Пусть $G \subset \mathbf{R}^3$ ограниченная область трехмерного пространства. В дальнейшем считается, что граница ∂G области G является поверхностью Ляпунова. Определение поверхности Ляпунова будет дано ниже. Это условие на свойства границы необходимо, чтобы на поверхности ∂G существовали прямые значения потенциалов простого и двойного слоя, в терминах которых формулируется разрешимость краевых задач для уравнения Гельмгольца.

Внутренние краевые задачи для уравнения Гельмгольца состоят в нахождении функции $U(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющей в области G уравнению

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad (22.1)$$

и граничному условию на ∂G :

$$U|_{\partial G} = u_-(\xi), \quad \xi \in \partial G \quad (22.2)$$

(задача Дирихле) или:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = v_-(\xi), \quad \xi \in \partial G. \quad (22.3)$$

(задача Неймана). Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, k^2 – комплексный числовой параметр, n – внешняя нормаль к поверхности ∂G . Функции $u_-(\xi)$ и $v_-(\xi)$ считаются непрерывными на границе.

Аналогично ставятся краевые задачи во внешности \mathbf{R}^3/\bar{G} области G . Отличия внешних краевых задач состоят в том, что помимо условий Дирихле (22.2) или Неймана (22.3) на границе области, необходимо задать еще условия на бесконечности. Задание таких условий необходимо для выделения единственного решения. Для уравнения Гельмгольца ставят условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial U(x)}{\partial |x|} - ikU(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (22.4)$$

или

$$\frac{\partial U(x)}{\partial |x|} + ikU(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (22.5)$$

Условию излучения (22.4) удовлетворяет, например, расходящаяся сферическая волна $g(x, k) = \frac{\exp(ik|x|)}{4\pi|x|}$, являющаяся в трехмерном пространстве фундаментальным решением оператора Гельмгольца: $-(\Delta + k^2)g(x, k) = \delta(x)$. Условию излучения (22.5) удовлетворяет приходящая из бесконечности сферическая волна $\overline{g(x, k)} = \frac{\exp(-ik|x|)}{4\pi|x|}$, также являющаяся фундаментальным решением оператора Гельмгольца: $-(\Delta + k^2)\overline{g(x, k)} = \delta(x)$.

При решении задач дифракции или рассеяния на препятствии, сводящихся к решению внешних краевых задач, физический смысл имеет решение, асимптотика которого на бесконечности содержит лишь расходящуюся сферическую волну. Это соответствует условию излучения (22.4), которое означает, что бесконечность не влияет на процесс рассеяния или дифракции.

С помощью потенциалов простого и двойного слоев внутренние и внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, заданным на поверхности ∂G и обладающим на ней компактными ядрами. К этим уравнениям применимы теоремы Фредгольма, дающие условия разрешимости интегральных уравнений и, как следствие, условия разрешимости краевых задачи для уравнения Гельмгольца. В дальнейшем мы кратко опишем процедуру сведения краевых задач к интегральным уравнениям и сформулируем соответствующие условия разрешимости.

Для изучения задач Дирихле для уравнения Гельмгольца нам потребуется потенциал двойного слоя, то есть свертка фундаментального решения $g(x, k)$ оператора Гельмгольца и обобщенной функции двойного слоя. Обозначая через $\gamma(\eta)$ плотность потенциала двойного слоя, имеем следующее выражение для соответствующего потенциала:

$$V^{(1)}(x, k) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial n_\eta} \frac{e^{ik|x-\eta|}}{|x-\eta|} dS_\eta. \quad (22.6)$$

Предполагается что плотность $\gamma(\eta)$ является непрерывной функцией на границе.

Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (22.1) будем искать в виде потенциала двойного слоя (22.6). Возможность этого обеспечивается следующими фактами. Во-первых, внутри и во внешности области потенциал двойного слоя удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца: $(\Delta + k^2)V^{(1)}(x, k) = 0$. Во-вторых потенциал двойного слоя удовлетворяет условию излучения (22.4) на бесконечности. Следовательно, потенциал двойного слоя будет являться решением задач Дирихле для уравнения Гельмгольца, если дополнительно потребовать, чтобы на границе области выполнялись условие Дирихле (22.2) с граничной функцией $u_-(\xi)$ для внутренней задачи и условие Дирихле с граничной функцией $u_+(\xi)$ для внешней задачи. Последние требования, по сути, являются условиями на плотность $\gamma(\eta)$ потенциала двойного слоя. Поскольку предельные значения потенциала (22.6) на поверхности $V_+^{(1)}(\xi, k)$ (извне ∂G) и предельные значения $V_-^{(1)}(\xi, k)$ (изнутри ∂G) выражаются формулами

$$V_\pm^{(1)}(\xi, k) = \pm \frac{1}{2} \gamma(\xi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial n_\eta} \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|} dS_\eta, \quad (22.7)$$

то, очевидно, плотность $\gamma(\eta)$ потенциала двойного слоя должна обеспечивать выполнение условий:

$$V_{\pm}^{(1)}(\xi, k) = u_{\pm}(\xi). \quad (22.8)$$

Подстановка (22.8) в (22.7) дает два интегральных уравнения на плотность потенциала двойного слоя $\gamma(\xi)$:

$$(K + I)\gamma(\xi) = 2u_+(\xi) \quad (22.9)$$

для внешней задачи Дирихле и

$$(K - I)\gamma(\xi) = 2u_-(\xi). \quad (22.10)$$

для внутренней задачи Дирихле. Через I обозначен единичный оператор, интегральный оператор K действует на функцию, заданную на поверхности ∂G по правилу

$$K\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial n_{\eta}} \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|} dS_{\eta}. \quad (22.11)$$

Ядро этого оператора после простых преобразований может быть записано в виде

$$K(\xi, \eta) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{\eta}} \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi_{\eta\xi}}{|\xi-\eta|^2} e^{ik|\xi-\eta|} (1 - ik|\xi-\eta|), \quad (22.12)$$

где через $\phi_{\eta\xi}$ обозначен угол между внешней нормалью к поверхности n_{η} и вектором $(\xi-\eta)$.

Проанализируем характер сингулярности ядра $K(\xi, \eta)$, заданного на границе области, являющейся по нашему предположению поверхностью Ляпунова. Поверхность Ляпунова может быть определена как гладкая поверхность, для любых точек ξ и η которой существуют числа $C > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \leq 1$ такие, что для описанного выше угла $\phi_{\eta\xi}$ выполнено неравенство $|\cos \phi_{\eta\xi}| \leq C|\xi-\eta|^{\alpha}$. Таким образом само ядро допускает оценку $|K(\xi, \eta)| \leq \tilde{C}|\xi-\eta|^{-(2-\alpha)}$, являясь тем самым полярным ядром на поверхности. Напомним, что в двумерном случае ядро называется полярным, если оно имеет вид $\frac{H(\xi, \eta)}{|\xi-\eta|^{\beta}}$. Здесь функция $H(\xi, \eta)$ непрерывна на двумерной поверхности, а показатель β изменяется в пределах $0 < \beta < 2$. Можно показать, что полярные ядра являются компактными. Следовательно, к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода (22.9) или (22.10) применимы теоремы Фредгольма.

Отметим, что теоремы Фредгольма могут быть сформулированы на языке пары основного и сопряженного или пары основного и союзного уравнений. Союзные уравнения, в отличие от сопряженных, задаются ядром $K'(\xi, \eta) = K(\eta, \xi)$, где $K(\xi, \eta)$ - ядро основного уравнения. В дальнейшем будем использовать пару основного и союзного уравнений.

Союзные к (22.9) и (22.10) интегральные уравнения возникают при изучении задач Неймана для уравнения Гельмгольца аналогично тому, как интегральные уравнения (22.9) и (22.10) были выведены при изучении задач Дирихле. Отличие состоит в том что решения задач Неймана ищутся в виде потенциала простого слоя, являющегося сверткой фундаментального решением оператора Гельмгольца $g(x, k)$ и обобщенной функции простого слоя. Этот потенциал имеет вид

$$V^{(0)}(x, k) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \mu(\eta) \frac{e^{ik|x|}}{|x-\eta|} dS_{\eta}, \quad (22.13)$$

где функция $\mu(\eta)$ непрерывна на границе и называется плотностью потенциала простого слоя. Потенциал простого слоя (22.13) также удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения (22.4) на бесконечности. Следовательно, потенциал простого слоя будет являться решением внутренней и внешней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца, если дополнительно потребовать, чтобы на границе области выполнялись условие Неймана (22.3) для внутренней задачи с граничной функцией $v_-(\xi)$ и условие Неймана с граничной функцией $v_+(\xi)$ для внешней задачи. Последние требования вновь являются условиями на плотность $\mu(\eta)$ потенциала простого слоя. Можно показать, что потенциал простого слоя является непрерывной функцией во всем пространстве. Однако его нормальная производная имеет скачок при переходе через поверхность. Более точно, предельные значения нормальной производной потенциала (22.13) на поверхности $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+(\xi, k)$ (извне ∂G) и $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-(\xi, k)$ (изнутри ∂G) выражаются формулами

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_\pm(\xi, k) = \mp \frac{1}{2}\mu(\xi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \mu(\eta) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|} dS_\eta. \quad (22.14)$$

Таким образом, плотность потенциала простого слоя (22.13) должна обеспечивать выполнение условий

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_\pm(\xi, k) = v_\pm(\xi). \quad (22.15)$$

Подстановка (22.15) в (22.14) дает два интегральных уравнения на плотность потенциала простого слоя $\mu(\xi)$:

$$(K' + I)\mu(\xi) = 2v_-(\xi) \quad (22.16)$$

для внутренней задачи Неймана и

$$(K' - I)\mu(\xi) = 2v_+(\xi). \quad (22.17)$$

для внешней задачи Неймана. Через I обозначен единичный оператор, интегральный оператор K' действует на функцию, заданную на поверхности ∂G по правилу

$$K'\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(\eta) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|} dS_\eta. \quad (22.18)$$

Ясно, что ядро этого оператора является союзным к ядру оператора K (см. (22.11) и (22.12)):

$$K'(\xi, \eta) = K(\eta, \xi), \quad (22.19)$$

и мы имеем две пары союзных интегральных уравнений. Первую пару составляют уравнения (22.16) и (22.9) порожденные внутренней задачей Неймана и внешней задаче Дирихле соответственно. Вторая пара состоит из интегральных уравнений (22.10) и (22.17), к которым мы пришли исходя из внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана соответственно.

Особенностью полученных интегральных уравнений является тот факт, что спектральный параметр k входит в сами ядра этих уравнений. Поэтому при анализе разрешимости полученных уравнений мы выделим четыре случая. Они состоят в том, что рассматриваемое значение $k^2: 1$) не совпадает с собственными числами внутренней задачи Дирихле для

оператора Лапласа; 2) не совпадает с собственными числами внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа; 3) является собственным числом внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа; 4) является собственным числом внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа.

Напомним, что значение k^2 является собственным числом задачи Дирихле для оператора Лапласа в области G , если у однородного уравнения Гельмгольца (22.1) существует нетривиальное решение, удовлетворяющее однородному условию Дирихле (22.2) ($u_- \equiv 0$). Значение k^2 является собственным числом задачи Неймана для оператора Лапласа в области G , если у однородного уравнения Гельмгольца (22.1) существует нетривиальное решение, удовлетворяющее однородному условию Неймана (22.3) ($v_- \equiv 0$). Свойства собственных чисел обеих задач обсуждались в разделе 18.1 настоящего конспекта. В разделе 20.2 был приведен пример построения собственных чисел и собственных функций для двумерной области, именно для круга.

Рассмотрим случай 1). Очевидно, что в этом случае однородное интегральное уравнение $(K - I)\gamma(\xi) = 0$ имеет только тривиальные решения: $\gamma(\xi) \equiv 0$. Тогда согласно теоремам Фредгольма союзное однородное уравнение $(K' - I)\mu(\xi) = 0$ также имеет только тривиальное решение и неоднородные уравнения $(K - I)\gamma(\xi) = 2u_-(\xi)$ и $(K' - I)\mu(\xi) = 2v_+(\xi)$ разрешимы при любых свободных членах $u_-(\xi)$ и $v_+(\xi)$ соответственно.

Отсюда получаем, что если k^2 не является собственным числом внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, то внутренняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции $u_-(\xi)$ в виде потенциала двойного (22.6), плотность которого удовлетворяет уравнению (22.10). Внешняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца в этом случае разрешима при любой непрерывной граничной функции $v_+(\xi)$ в виде потенциала простого слоя (22.13), плотность которого удовлетворяет уравнению (22.17).

Рассмотрение случая 2) происходит абсолютно аналогично рассмотрению случая 1) при замене пары союзных интегральных уравнений (22.10) и (22.17) на пару союзных интегральных уравнений (22.16) и (22.9). Следствием является утверждение. Если k^2 не является собственным числом внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа, то внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца разрешимы в виде потенциалов простого (22.13) и двойного (22.6) слоя соответственно при любых непрерывных граничных функциях $v_-(\xi)$ и $u_+(\xi)$. Плотность потенциала простого слоя для внутренней задачи Неймана удовлетворяет интегральному уравнению (22.16). Плотность потенциала двойного слоя для внешней задачи Дирихле удовлетворяет интегральному уравнению (22.9).

Рассмотрение случаев 3) и 4) является более деликатным. В случае 4), когда k^2 является собственным числом внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа, однородное уравнение $(K' + I)\mu(\xi) = 0$ имеет нетривиальные решения. Согласно четвертой теореме Фредгольма, условия разрешимости неоднородного уравнения $(K' + I)\mu(\xi) = 2v_-(\xi)$ выписываются в терминах решений однородного союзного уравнения. Можно доказать, что любое решение $\psi_j(\xi, k)$ однородного союзного уравнения $(K' + I)\psi_j(\xi, k) = 0$ является значением на границе ∂G собственной функции $\psi_j(x, k)$, $j = 1, \dots, m$, внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа, отвечающей собственному числу k^2 кратности m . Таким образом, условия разрешимости неоднородного интегрального уравнения $(K' + I)\mu(\xi) = 2v_-(\xi)$ принимают вид:

$$\int_{\partial G} v_-(\xi)\psi_j(\xi, k)dS_\xi = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Следовательно, эти условия являются условиями разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (22.1) и (22.3). Решение при этом дается потенциалом простого слоя с плотностью, удовлетворяющей интегральному уравнению (22.16). Полученное условие разрешимости содержит как частный случай условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа, которое получится, если положить $k^2 = 0$. Как уже отмечалось в разделе 18.1, $k^2 = 0$ является собственным числом задачи Неймана для уравнения Лапласа и ему отвечает собственная функция, равная константе. Поэтому в случае уравнения Лапласа выписанные выше условия разрешимости внутренней задачи Неймана сведутся к условию

$$\int_{\partial G} v_-(\xi) dS_\xi = 0.$$

Напомним, что это условие было получено другим способом в разделе 18.1 при обсуждении разрешимости внутренних задач для уравнения Лапласа.

Рассмотрение случая 3) происходит аналогично. Если k^2 является собственным числом внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, то однородное уравнение $(K - I)\gamma(\xi) = 0$ имеет нетривиальные решения. Можно доказать, что любое решение $\mu(\xi)$ однородного союзного уравнения $(K' - I)\mu(\xi) = 0$ имеет вид $\mu(\xi) \equiv \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(\xi, k) \right)$, то есть равно граничному значению нормальной производной собственной функции $\varphi_j(x, k)$, $j = 1, \dots, l$, внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, отвечающей собственному числу k^2 кратности l . Согласно четвертой теореме Фредгольма, неоднородное уравнение $(K - I)\gamma(\xi) = 2u_-(\xi)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $u_-(\xi)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{\partial G} u_-(\xi) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(\xi, k) \right) dS_\xi = 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

Следовательно, эти условия являются условиями разрешимости внутренней задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца (22.1) и (22.2), решение которой при этом дается потенциалом двойного слоя с плотностью, удовлетворяющей интегральному уравнению (22.10). Полученное условие разрешимости также должно содержать как частный случай условие разрешимости внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, которое можно получить, если положить $k^2 = 0$. Но, как уже отмечалось в разделе 18.1, $k^2 = 0$ не является собственным числом задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Поэтому в случае уравнения Лапласа внутренняя задача Дирихле разрешима единственным образом при любой неоднородности в граничных условиях. Этот результат также был получен в разделе 18.1 при обсуждении теорем единственности для внутренних задач для уравнения Лапласа.

При обсуждении случаев 3) и 4) мы не коснулись внешней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле соответственно. Напомним, что если k^2 не является собственным числом ни одной из внутренних задач для уравнения Лапласа, было показано, что внешние задачи для уравнения Гельмгольца однозначно разрешимы в виде потенциала двойного слоя для задачи Дирихле и потенциала простого слоя для задачи Неймана. Оказывается, что если k^2 является собственным числом внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, то решение внешней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца следует искать в виде суммы потенциала простого слоя и линейной комбинации потенциалов двойного слоя со специальными плотностями. Такой подход дает возможность определить коэффициенты линейной комбинации потенциалов двойного слоя, выписать интегральное уравнение на плотность потенциала простого слоя и гарантирует однозначную разрешимость внешней

задачи Неймана в этой ситуации. Если k^2 является собственным числом внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа, то решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца следует искать в виде суммы потенциала двойного слоя и линейной комбинации потенциалов простого слоя со специальными плотностями. Такой подход также гарантирует однозначную разрешимость внешней задачи Дирихле в рассматриваемом случае. Однако, формульное описание указанных подходов к решению внешних задач выходит за рамки настоящего текста. Сформулируем лишь заключительное утверждение: при сделанных предположениях относительно границы области и граничных функциях внешние задачи для уравнения Гельмгольца разрешимы и притом единственным образом.

ЛИТЕРАТУРА К §§21–24

1. М. Л. Краснов, *Интегральные уравнения. (Введение в теорию)*, М, Наука, 1975.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. IV, М, Наука, 1981.
3. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, *Интегральные уравнения (задачи и упражнения)*, М, Наука, 1976.
4. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М, Наука, 1988.
5. Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*, М, Мир, 1987.