ЛЕКЦИИ

Ряды

Числовые ряды: Сходимость и сумма числового ряда. Критерий Коши. Расходимость гармонического ряда. Признаки для знакоположительных рядов: сравнения, Коши, Даламбера. Доказательство теоремы о том, что признак Коши сильнее признака Даламбера. Интегральный признак Коши. Теорема Лейбница о сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Абеля и Дирихле. Действия над рядами. Теорема Римана (формулировка).

Функциональные ряды: Равномерная сходимость и критерий Коши. Признаки Вейсрштрасса, Абеля, Дирихле. Теоремы о предельном переходе (непрерывности), почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Степенные ряды:. Радиус сходимости. Формула Коши - Адамара. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда, почленное интегрирование и дифференцирование. Достаточное условие разложимости функций в степенные ряды, разложение в ряд Тейлора элементарных функций, область сходимости.

Ряды Фурье: Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Комплексная форма ряда Фурье, нахождение коэффициентов ряда. Пример: разложение пилообразной функции в ряд Фурье. Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Фурье-образ волнового пакета (кусок синусоиды). Преобразование Фурье для производной.

Векторный и тензорный анализ

Вращения векторов и тензоров: Преобразование компонент трехмерного вектора при вращении системы координат, ортогональность матрицы вращения. Определение тензора n-го ранга. Алгебра тензоров: внешнее произведение, теорема о свертке. Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} (символ Леви-Чивита) и теория детерминантов. Векторное и смешанное произведение векторов как свертка с ε_{ijk}. Свойства. Геометрический смысл. Свертки $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$, формула BAC-CAB. Отражение системы координат. Тензоры и псевдотензоры. Скаляры и псевдоскаляры.

Вращения полей: Скалярные поля (преобразование, индуцированное инвариантностью). Векторные поля (закон преобразования). Градиент - векторное поле, дивергенция - скалярное поле. Геометрический смысл. Ротор, примеры вычисления.

Криволинейные и поверхностные интегралы I-го и II-го рода: Приемы вычисления. Теорема Гаусса. Теорема Стокса. Физический смысл ротора. Три условия потенциальности поля. Ортогональные криволинейные системы координат. Выражения для градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в криволинейной ортогональной системе координат.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифф--го и интегрального исчисления. Т.1-3,1970.
2. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ, т.1-2, 1973.
3. Рудин У. Основы математического анализа, 1975.
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды, 1967.
5. Сокольников И.С. Тензорный анализ. И его применения 1971. 2007
6. Арфкен Г. Математические методы в физике, 1970.
7. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу, 1990.
8. Батыгин В.В., Топтыгин Н.Н. Сборник задач по электродинамике, 1970.
9. Мангазеев Б.В., Афанасьев А.Д. Векторный анализ для физиков. Методич. пособие, ИГУ, 1992.
10. Никольский С.М., Математический анализ, т.1-2, 1975.
11. Гелбаум, Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе, 1967.
12. Мак-Коннел Дж. Введение в векторный и тензорный анализ.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+C+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$, так как: $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1)$, и: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=C$.

Математич. Анализ –II:|| $\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right)=\frac{\sigma}{(n+\vartheta)^{\sigma+1}}$, $\frac{\sigma}{(n-\vartheta)^{\sigma+1}}=\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right)$, $0<\vartheta<1$,

I. Ряды: Демидович: №№: || т.к. для $f(x)=x^{-\sigma}$: $f'(x)=(-\sigma)x^{-\sigma-1}$; $\frac{2}{\pi}z\le\sin z\le z$, при $0\le z\le\frac{\pi}{2}$.

Частичные суммы: 2546-2549➔Если: $a_n=u_n-u_{n+1}$, то $S_N=\sum_{n=m}^{N}a_n=u_m-u_{N+1}$ ➔2552, *2554+2556+2555*;

Приз. сравн: $\frac{f(x\pm1)-f(x)}{(\pm1)}=f'(x\pm\vartheta)$➔ $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right)\le\frac{1}{n^{\sigma+1}}\le\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right)$ **←2 Мент➔** $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$

2557--2565, 2568, 2569, 2570+2571,] **== 1-е;** **[Д**: 2547-2552, 2555-2564, 2574, 2575.1,2578-2585.1,2590,2591**]**

Крит. Коши–эквивал: $\left(\lim_{n\to\infty}S_n=S\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\text{, такое, что: } n>N(\varepsilon)\Rightarrow|S-S_n|\equiv|R_n|<\varepsilon\right)$ 2573, **2575**,

Невып. Кр.К: $\exists\varepsilon>0$, такое, что: $\forall N>1,\exists p=p(N)$, и $\left|S_{N+p(N)}-S_N\right|>\varepsilon$, 2576←2220, 2577.1. **Признаки Даламбера и Коши ➔ сравнен. с** q^n**:** 2578-2584, 2586-2590! **==2-е;** **Д и К для немонотонных**: 2592+2593+2594➔2597, 2597.1

Признаки сравнения (со всеми): 2606(н)←*3102*➔2605+2600, 2610,2611, 2613, 2614, 2617.**Интегральный признак**: *2623*+**замена перем**: 2620, 2618, 2622! **==3-е;** **[Д**:(**без Рабе**-Гаусса):2595-2604(н) 2626-2627-2629-2630-2631-2645**]**
2623, Знакопер-ные: Лейбниц: 2660➔*2657*➔2661←*2656+2220+146+75+147*, 2665, 2666, 2666.1, 2671, 2673, 2675➔2677!+ 2681.**==4-е;** *2674*←*2606(н)*+2699+2689, 2672! *+2705+*2687,**2657**: $\left|S_L(a)-S_{p_n}(a)\right|<q\max_j\left|a_j\right|,<\left|A_n\right|$; $L,\ j\in\left[p_n+1,p_{n+1}\right]$➔
➔2662(б)+*2704*←2658, 2693(q=p), 2703(S<1,1<p). **Знакопер-ные:** Суммир. по частям➔Абель+Дирихле➔Лейбниц.**==5-е**
[Д: 2676-2680, 2683-2685,**2687**, 2688, 2704+**2662(а)**←2694➔**2695! 2696], [Д**: 2668,2673.1,2686, **2690! 2703(*p*<1)←2623]**

$\left|\sum_{l=1}^{n}\sin lx=\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)[\sin(x/2)]^{-1}\right|\le|\sin(x/2)|^{-1}$ ➔2698←*2697*, 2698.1(а,б,в=2682), 2668, 2703.1(а,**б**).

Действия над рядами: формула умножения: 2712+2711(н), 2714➔2713, *2715!* **==6-е; [Д**: 2707—2715, 2716-2736**]**.
Функциональные ряды: Область сходимости: 2717-2719-2722-2724-2726, 2728, 2730, 2735!, 2736. **Равномерн. сходимость:** послед-ти: 2741+2746+2743+2747+2748+2753,2758, 2783!**== 7-е; Область**, ряды: 2769+2767+2770+ 2768➔Признак Веерштраса: 2774(а,и,г,л,к,м) [Д: 2752,2767, 2745+ 2768.1-2773,2774] **[Не]Равн-рная** сход-сть: **Кр. Коши.,** Остат. ряда: 2777, 2779, 2776! Дирихле+Абель: 2782, **2781**, 2775!**== 8-е Непр-ность** 2807+*2794*. **Диффер-мость:** 2792, 2797, 2809, 2811; **Интегр-мость:** 2810! [Д:2778-2780, **2787** ,2795,2798,2805-2808**]. Степенные ряды:** радиус, интервал сходимости 2812, 2816, 2819, 2820, 2821, 2828, 2830! 2832! **== 9-е; Разложение и действия над степенными рядами**: 2839, 2840+2877, 2855+2860, 2862.1, 2867,2868, 2869, 2871, (перемножить)➔2715! 2888➔ ➔2884. **Разложение в ряды Тейлора**: **оператор**➔2874(а), 2894! 2849. **[Д:** 2813--2837, 2841-2844, 2849, 2851,2854**]**
[Д: 2857, 2870, 2878, 2879, 2882-2890, 2894!**,** 2874 (б)**] ←➔ [➔]** [*Производящая функция Чисел Фибоначчи*:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ \sum_{n=2}^{\infty}x^n\otimes\left(F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\right)\Rightarrow f-x=xf+x^2f\text{, откуда, при } R=q_-:\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=x\otimes\underline{2861}=$$

$$=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(q_++x)(q_--x)}=\frac{x}{(1+xq_-)(1-xq_+)}=\left[\frac{1}{(1-xq_+)}-\frac{1}{(1+xq_-)}\right]\frac{1}{(q_++q_-)},\quad q_+-q_-=1,\ q_+q_-=1,$$

$$q_\pm=\frac{\sqrt5\pm1}{2},\quad q_++q_-=\sqrt5,\ F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[(q_+)^n-(-1)^n(q_-)^n\right],\quad \frac{F_{n-1}}{F_n}\to\frac{1}{q_+}=q_-=\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b}=\textit{золотое сечение.}]$$

==10-е; Суммирование рядов: 3018+3019, 2913+*3012*,2906, 2909, *2908*, 2990. Оценка остатка, 2744. Численные примеры: 2921+ 2922(б), 2901+2932(а), 3044! **[Д:** 2906-2908, 2911,2912, 2986--2999, 3008,3012, 2924,2932(б-г)**]**
==11-е; Ряды Фурье: 2940(в лоб)➔2941+3018➔2962+2961! (ср.$7п.1), 2963(а,б)!← ($L^2$ базис)➔2945 (резонанс) 2948.
==12-е; 2965,2966**(*q*)**+*2551(а)*+*2864*, 2976, 2978, 2984, 2985 **[Д:** 2936-2930,2949,2958,2968,2970-2973,2975**] Интеграл Фурье:** дельта-функция: $e^{\pm i\lambda x}$ - преобр. Фурье из ряда: $n=(l/\pi)\nu$ при $n,l\to\infty$: $(l/\pi)\delta_{n\,m}\mapsto\delta(\nu-\mu)$ **==13-е;**
3896➔3890➔3885➔3886 [➔3895!]➔3897,3898➔3893➔3894, 3889! (резонанс), 3899 [Д: 3891-3895, 3900] **==14-е;**

Контрольная работа после 13-го; (не позднее 1-го ноября (20 декабря)) **== 15-е**

Примечания: Подчеркнутые №№ необходимо сделать на занятиях. *причем, №№ делать/обсуждать быстро*.
Указаны лишь некоторые домашние задания [Д: №--№], **к ним же относятся и не сделанные на занятиях.**
№➔№, №←№, № +№ - означает общую идею или логически связанные задачи (порядок важен). Связаны выделенные одним цветом по вертикали. №! – наиболее поучительные задачи. Подсказки.+←*№№.*

II. Векторн. и тензорн. анализ: № задач: Мангазев--Афанасьев, {Демидович} или [БТ] :

1) Повороты, Векторы, Тензоры: Начать с [1]: $\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $(\vec{n}\cdot\vec{n}') = ?$

δ_{jk} :4,1,3,*17*+9, 8, 5э, 10: $(\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{y}) \equiv (\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{Z})$,11**==1-е;** 18,13+34,14=33🡐19,**12.** ε_{jkl} :15+ $\varepsilon_{\alpha\beta\ldots\xi}$ [24]🡒22 **==2-е;**

(или [БТ]: [17] [20] **(Д: 2=[16] , 5, 6, 7, 8U, 10, 11)** [8] [7] [9] **(Д:** $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{jkl}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\lambda\gamma}$)[24] [27])

$\varepsilon_{\ldots}|\hat{a}| = \varepsilon_{\ldots}a\ldots a$ 🡒**20,** $|\hat{a}|^2 = 1$, $\det(\hat{a}\hat{T}\hat{a}^T) = \det(\hat{T})$,21🡒 $(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$+23=det🡒27=[30]🡒 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{jkl}$
+24(а,б)= [2], 26(а,б)= [28] **==3-е;** (или [БТ]: [27] **(Д: 26(б)=[28], 30, 31=[34], 35 🡒 все до 36)**) (ориентирован?)

$\vec{\mathrm{x}}' = -\vec{\mathrm{x}}$ 🡒 $\varphi'(\vec{\mathrm{x}}') = \varphi(\vec{\mathrm{x}})$, $\psi'(\vec{\mathrm{x}}') = -\psi(\vec{\mathrm{x}})$, 31+32, $\vec{\mathrm{x}}' = \hat{a}\vec{\mathrm{x}}$ 🡒 $\vec{A}'(\vec{\mathrm{x}}') = \hat{a}\vec{A}(\vec{\mathrm{x}})$, 35, **28!**🡒29+30+25+ d^3x =inv.**==4-е;**
(или [БТ]:т.е🡒 $\varphi' = \varphi$,$\updownarrow$ $\psi' = -\psi$, **[25]** [34][35] $\varphi'(\vec{\mathrm{x}}' = \hat{a}\vec{\mathrm{x}}) = \varphi(\vec{\mathrm{x}})$ $\updownarrow$ $\psi'(\vec{\mathrm{x}}') = \psi(\vec{\mathrm{x}})$, [31] [32][33] [14] (psevdo?))

2) Дифференциальные операции набла, градиент, ротор в декартовых координатах:

1. Начать с:↓ Набла $\vec{\nabla}$ -- при вращениях преобразуется как вектор, то есть: $d\Phi(\vec{\mathrm{x}}) = (d\vec{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\nabla}_x\Phi(\vec{\mathrm{x}}))$=inv.
$dF(u(\vec{x}), v(\vec{x}), w(\vec{x}))$ +51🡒37, 38!🡒39+40+56(а,б)+[46], div grad $= \vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}) = \Delta$, $(\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)) = u\vec{\nabla}^2v - v\vec{\nabla}^2u$,
$\vec{\nabla}^2uv = v\vec{\nabla}^2u + 2(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v) + u\vec{\nabla}^2v$ ([39][40] или [БТ] [46]) **(Д:те №)** На гладких полях rot grad= $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})$=0🡐div rot.**==5-е;**

2. **Вычисления:**: [37]+41+55+45(а)🡐(42=53) +43+45(б)+ $4\pi\delta_3(\vec{x})$, 44, 46. **(Д: 47--50, 52, 54--56(б)) ==6-е;**

(или [БТ]: [37] [41] [42] [43] [45] [44]) **(Д: [45] [43], а также уметь все из {4408--4440})**

3) Теоремы Гаусса и Стокса, поверхностные и криволинейные интегралы
1-го и 2-го рода, способы их вычисления: нужны и {Демидович}, и М-А обязательно!!

Гаусс==> 4 занятия: Ориентированный элемент площади: $d\vec{S}(\vec{\mathrm{x}}) = (d\vec{\mathrm{x}}\times d\vec{\mathrm{x}}') = \vec{e}_j\varepsilon_{jlk}dx_l dx'_k$, $d\vec{\mathrm{x}}, d\vec{\mathrm{x}}'$ -- разные!

Начать с II-го рода=потоку $d\Phi_A(dS) = (\vec{A}(\vec{\mathrm{x}})\cdot d\vec{S}(\vec{\mathrm{x}}))$, $d\vec{S} = \vec{N}(\vec{\mathrm{x}})\,|\,d\vec{S}\,| \mapsto (dydz, dzdx, dxdy)$, $dS_j \Rightarrow \varepsilon_{jlk}dx_l dx'_k$, где

$\varepsilon_{jlk} \Rightarrow 1$без суммы! {4363}🡒57={4362=4382}🡒§16, 58={4381},60, 62={4380🡒§15,**A=(*P,Q,R*)**},59={4390}, 61**==7-е;**

63, {4379 = 4393a+4394}+87+86, $F_S(x,y,z) = 0 = dF(\vec{\mathrm{x}}) = (d\vec{\mathrm{x}}\cdot\vec{\nabla}F(\vec{\mathrm{x}}))$, $\vec{N} = \vec{\nabla}F/|\vec{\nabla}F|$ 🡒{4362}+ 64(а,б). **==8-е;**

(или [БТ]:**Другие**⥣ **формы**⥣ **Гаусса** [51][50]) **(Д: 61, 64 (в, г) -- без поворота, {4376, 4387,4393+4394+4395+4396})**

{4365+4446+§14-1°,2°}🡒 $d\vec{S}(\vec{\mathrm{x}}) = (d\vec{\mathrm{x}}\times d\vec{\mathrm{x}}') = (\dot{\vec{\mathrm{x}}}_u(\vec{\mathrm{x}})\times\dot{\vec{\mathrm{x}}}_v(\vec{\mathrm{x}}))dudv$; 64(в)-без пов. (в,г)-пов.: $\vec{A}'(\vec{\mathrm{x}}') = \hat{a}\vec{A}(\hat{a}^{-1}\vec{\mathrm{x}}')$ **= 9-е;**

{4366,4376=4388🡒4445.1+сфер. коорд.,4378=4391🡒4392🡐 $dS_\perp = dS\cos(\vec{N},\vec{n}_\perp)$, $d\Omega(\vec{n}) = dS_\perp/R^2 \leftrightarrow 4\pi\delta_3(\vec{x})$,
I-го рода **р**авен массе: 4358, 4357}**(Д:{4357, 4364-4366, 4377+4442--4387-4389!-4390-4400, 4441-4449})** **== 10-е;**

Стокс==>3 занятия: абс. величина $dS = |(\dot{\vec{\mathrm{x}}}_u\times\dot{\vec{\mathrm{x}}}_v)|dudv = \sqrt{\dot{\vec{\mathrm{x}}}_u^2\dot{\vec{\mathrm{x}}}_v^2 - (\dot{\vec{\mathrm{x}}}_u\cdot\dot{\vec{\mathrm{x}}}_v)^2}\,dudv = \dfrac{dxdy}{\cos\gamma} = \dfrac{dzdx}{\cos\beta} = \dfrac{dydz}{\cos\alpha}$ **, т.е.**

$dS_\perp = dS\cos(\vec{N},\vec{n}_\perp)$ **{§15[(*P,Q,R*)🡒A]=4380}=62+{§14-1°,2°}** $l \mapsto S_l$, $d\vec{x} = \vec{\tau}dl$, $\vec{\tau}\mapsto\vec{N}$,65,70+{4367}🡒71+{4369}
68+{4307+78а,б🡒4455}. Произвольность S_l - из теоремы Гаусса **(Д: 66,72,73,76 ,77,{4329,4371,4452-4460}) ==11-е;**
67+69, **4-ре условия потенциальности векторного поля**:🡒*75=78в +74+76+77*, {4370+4368}, *73, 66* **== 12-е;**
{4371+4372! Другой вид Стокса: **4340=4375!**+**4392, 4456!**, §17 п. 1°--5°}🡒*66*🡒(граница границы =0) **== 13-е;**

4) Криволинейные ортогональные системы координат=>2 з. Цилиндрические и Сферические:

Коэффициенты Ламе. grad $\phi = \vec{\nabla}\phi$,div $\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$, rot $\vec{A} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})$, $\vec{\nabla}^2$ -- в цилиндр. координ.: 79+80, 82(цил). **== 14-е;**

Сферич. координ.: 81, 83, $\vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})$, $\vec{\nabla} = \vec{n}\partial_r + (1/r)\vec{\partial}_{\vec{n}}$,84+85,82(с), **72**; **== 15-е;** Формулы Френе. Повторение:
66,{4358, 4357, 4329, 4364, 4389! 4400! 4377+4442}. Давление на заряженную поверхность металла. Электрический заряд в поле магнитного монополя. **(Д: 79-82-85, {4440.1, 4440.2}) == 16-е;?**

Контрольная работа == 17-е;? **Зачет (== 18-е;?)**

Примечания: Подчеркнутые №№ необходимо успеть на занятиях, *причем, №№ делать быстро.*
Указаны лишь некоторые домашние задания **(Д: №--№), к ним же относятся и не сделанные на занятиях.**
№🡒№, №🡐№, №+№ -- означает общую идею или логически связанные задания (порядок важен!). Связаны и соседние по вертикали, выделенные одним цветом. №! – весьма поучительные задания. №=№ -- означает разные формулировки одной и той же задачи. (План доц. Коренблита С.Э.)