

А. Д. АФАНАСЬЕВ, Б. В. МАНГАЗЕЕВ

**ВЕКТОРНЫЙ
АНАЛИЗ
ДЛЯ ФИЗИКОВ**

Иркутский государственный университет

Б.В.Малгасов, А.Д.Афанасьев

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
ДЛЯ ФИЗИКОВ

Учебное пособие

Иркутск 1991

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

УДК 514.724.4

Мангазеев Б.В., Афанасьев А.Д. Векторный анализ для физиков:
учеб. пособие.-Иркутск: Иркут. ун-т, 1991.- 91с.

Рассмотрена алгебра тензоров в случае ортогональных преобразований трехмерного пространства. Операции векторного анализа определены с помощью теоремы о свертке, что подчеркивает их инвариантный смысл. Интегральные соотношения векторного анализа обсуждаются на физическом уровне строгости. Выражения для основных дифференциальных операций над векторными и скалярными полями записаны в ортогональной криволинейной системе координат. Ко всему теоретическому материалу подобраны задачи и упражнения, которые снабжены указаниями к решению и ответами. Учебное пособие предназначено для студентов младших курсов физических факультетов университетов и может быть использовано как справочник студентами старших курсов.

Библиогр. 12 назв. Ил. 32.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Л.В. Фильков,
канд. физ.-мат. наук Ю.Э. Линке

© Иркутский государственный
университет, 1991

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Ортогональные преобразования. Понятие вектора	4
§ 2. Понятие тензора. Тензор ϵ_{ijk} и теория детерминантов	16
§ 3. Алгебраические операции над векторами	28
§ 4. Дифференциальные операции над векторными и скалярными полями	34
§ 5. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода.	43
Теорема Гаусса	
§ 6. Теорема Стокса	51
§ 7. Три условия потенциальности векторного поля	57
§ 8. Криволинейные системы координат	61
§ 9. Выражения для градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в криволинейной ортогональной системе координат	69
§ 10. Задача о поле равномерно заряженного шара	74
Задачи и упражнения	77
Указания к задачам. Ответы	88
Рекомендуемая литература	91

Б1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Для описания геометрических и физических объектов и соотношений между ними с помощью методов математического анализа в пространстве удобно ввести декартову ортонормированную систему координат¹.

Обсудим вначале более простой (но важный) случай плоскости, где введена система OXY с осями i и j (рис. I).

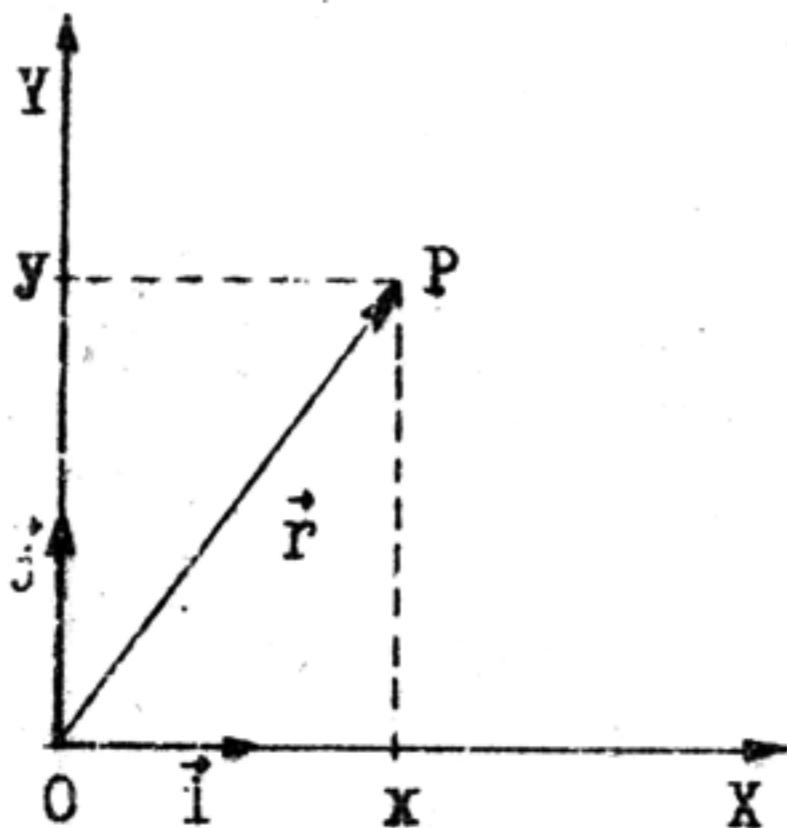


Рис. I. Декартова ортонормированная система координат

Орты (от греч. ортоς - прямой) являются единичными, взаимно перпендикулярными отрезками, направленными из начала координат O по осям OX и OY соответственно. Каждой точке плоскости P поставим во взаимно однозначное соответствие пару вещественных чисел (x, y) . Эти два числа называются декартовыми координатами (от лат. со - совместно и ordinatus - упорядоченный, определенный) точки P в системе координат OXY .

Можно ввести альтернативный язык для такого описания плоскости. Будем считать, что с каждой точкой плоскости P связан отрезок \vec{r} , направленный из начала координат в эту точку (отрезок \vec{r} называется радиусом-вектором² этой точки), а координаты точки $P(x, y)$ являются проекциями этого отрезка на оси OX и OY и называются компонентами радиуса-вектора \vec{r} (от лат. componens,

¹ Эта система координат названа по имени Р. Декарта, хотя в его сочинении "Геометрия" (1637) система координат сводилась к оси абсцисс с началом отсчета и системе параллельных наклонных ординат, а расстояния по оси и до оси могли быть только положительными числами. Но уже в издании 1659-1661 гг. к "Геометрии" приложена работа И. Гудде, в которой впервые допускаются как положительные, так и отрицательные значения координат. Пространственную декартову систему координат ввел Ф. Лайр (1679); он же впервые применил термин "начало" (фр. origin)-стюда, видимо, обозначение O для начала координат /T/.

² Термин "радиус-вектор" (от лат. radius - спица колеса, луч) ввел О. Коши (1853), ему же принадлежит представление (I. T.).

род. п. componentis – составляющие). Компоненты радиуса-вектора \vec{r} удобно записывать в виде столбца $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда компоненты ортов \vec{i} и \vec{j} записутся как $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответственно. И, наконец, определим, как обычно, операции умножения радиуса-вектора на вещественное число a и сложения радиусов-векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 :

$$a \vec{r} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \vec{r}_3,$$

где радиус-вектор $a\vec{r}$ направлен одинаково с \vec{r} , но имеет длину, измененную в a раз, а радиус-вектор $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, как легко видеть, получается из радиусов-векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 по правилу параллелограмма. Тогда любой радиус-вектор легко разложить по ортам:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (I, I)$$

Таким образом, можно дать однозначное описание плоскости как геометрического объекта в терминах множества пар вещественных чисел.

Теперь можно рассматривать геометрические объекты (как математические образы соответствующих физических объектов) на плоскости и развивать, пользуясь методами математического анализа, теории, описывающие свойства этих объектов и связи между ними. Однако в этот момент следует сделать простое и очень важное замечание, которое лежит в основе векторного анализа. Конечно, выбранная декартова система OXY не единственная возможная. Можно ввести любую другую, полученную из исходной поворотом на некоторый угол φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), например $O'X'Y'$ на рис.2. Ясно, что "новая" система координат $(O'X'Y')$ ничем не хуже, чем "старая" (OXY) . Понятно, что геометрические (и физические) объекты и соотношения между ними не зависят от способа описания (т. е. от выбора той или иной системы координат). Это требование инвариантности является важнейшим в построении теории векторов и более общей теории тензоров – основного математического аппарата современной физики.

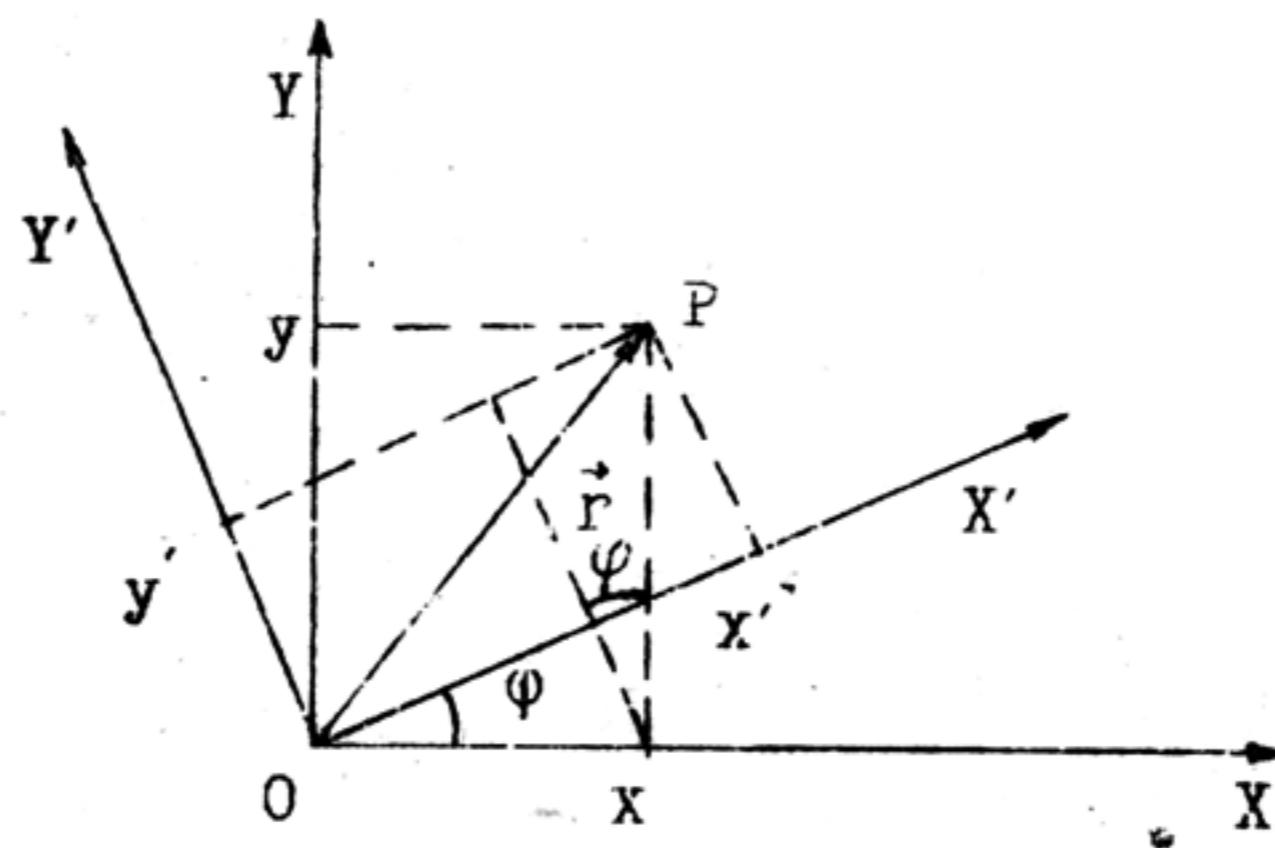


Рис. 2. Поворот декартовой системы координат на плоскости

И это требование должно быть удовлетворено при построении любой конкретной математической или физической теории. Посмотрим, к чему оно приводит в рассматриваемом случае декартовых ортогонормированных систем координат на плоскости.

Радиус-вектор \vec{r} в системе OXY имеет компоненты $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, в системе $OX'Y'$ тому же самому геометрическому объекту \vec{r} соответствуют компоненты $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Как видно из рис. 2, связь между компонентами радиуса-вектора \vec{r} в старой и новой системах координат записывается в виде:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Более наглядно эта связь записывается в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (I.2)$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (I.3)$$

называется матрицей двумерного поворота. Преобразование (I.2) – это преобразование поворота, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие координат (x, y) точки плоскости в системе

OXY и координат $(x' y')$ той же самой точки в повернутой системе $OX'Y'$. Параметром преобразования является угол ϕ .

Схематически переходы от системы к системе с помощью преобразования (I.2) представим следующим образом:

$$\begin{array}{c} \text{системы координат} \\ \text{OXY} \leftrightarrow OX'Y' \leftrightarrow OX''Y'' \leftrightarrow \dots \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{компоненты радиуса-} \\ \text{вектора } \vec{r} \\ \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x'' \\ y'' \end{array} \right] \leftrightarrow \dots \end{array}$$

Радиус-вектор \vec{r} можно представлять себе как направленный из начала координат в данную точку плоскости отрезок, но необходимо иметь в виду, что задавать радиус-вектор компонентами следует в фиксированной системе координат, а его компоненты в любой другой системе вычислять по формуле (I.2).

По аналогии с радиусом-вектором теперь определим двухмерный вектор³ (от лат. vector, букв. - несущий) \vec{A} как двухкомпонентную величину $\left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right]$ (любой размерности, а не обязательно размерности длины), преобразующуюся при поворотах по формуле, аналогичной формуле (I.2):

$$\left[\begin{array}{c} A'_x \\ A'_y \end{array} \right] = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right].$$

Соответствие компонент $\left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right]$ данного вектора \vec{A} и системы координат, в которой компоненты вычисляются, можно схематически представить в виде:

$$\begin{array}{c} \text{системы координат} \\ \text{OXY} \leftrightarrow OX'Y' \leftrightarrow OX''Y'' \leftrightarrow \dots \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{компоненты вектора } \vec{A} \\ \left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} A'_x \\ A'_y \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} A''_x \\ A''_y \end{array} \right] \leftrightarrow \dots \end{array}$$

³ Термин "вектор" ввел У. Гамильтон (ок. 1845), обозначение \vec{A} - Ж. Арган (1806).

"Понятие вектора возникло как математическая абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, например: перемещение, скорость, напряженность электрического или магнитного полей" /1/. Вектор как геометрический объект является направленным отрезком. Компоненты вектора в фиксированной системе координат ОХУ – это проекции отрезка на оси ОХ и ОУ. "Длина" отрезка, которая обозначается как $|\vec{A}|$ и называется модулем⁴ (от лат. modulus – мера) вектора, согласно теореме Пифагора равна:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

Договоримся считать, как это принято в векторном анализе, что начальная точка вектора (точка приложения) в отличие от начальной точки радиуса-вектора ничем не фиксирована и может быть выбрана свободно⁵.

Очевидно, что если два вектора равны в какой-нибудь одной системе координат, то они равны и в любой другой. Это обстоятельство обуславливает особенную ценность векторного анализа для построения физических теорий, так как запись физических законов в виде векторных уравнений делает их автоматически инвариантными относительно вращений. Мы еще раз обсудим это в дальнейшем.

Кроме преобразования вращения можно также осуществить преобразование сдвига (рис.3), которое может быть записано в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Но это преобразование весьма тривиально и не требует подробного рассмотрения, хотя оно играет важную роль, например при выводе закона сохранения импульса в теоретической механике.

Теперь перейдем от плоскости к трехмерному пространству. Конечно же, понятие трехмерного вектора легко ввести по аналогии. Получим формулу, определяющую трансформационные свойства трехмерного вектора при вращении системы координат,

⁴ Размерность компонент вектора не обязательно длина. Термин "модуль" вектора ввел Ж.Арган (1806).

⁵ Такие векторы иногда называют свободными.

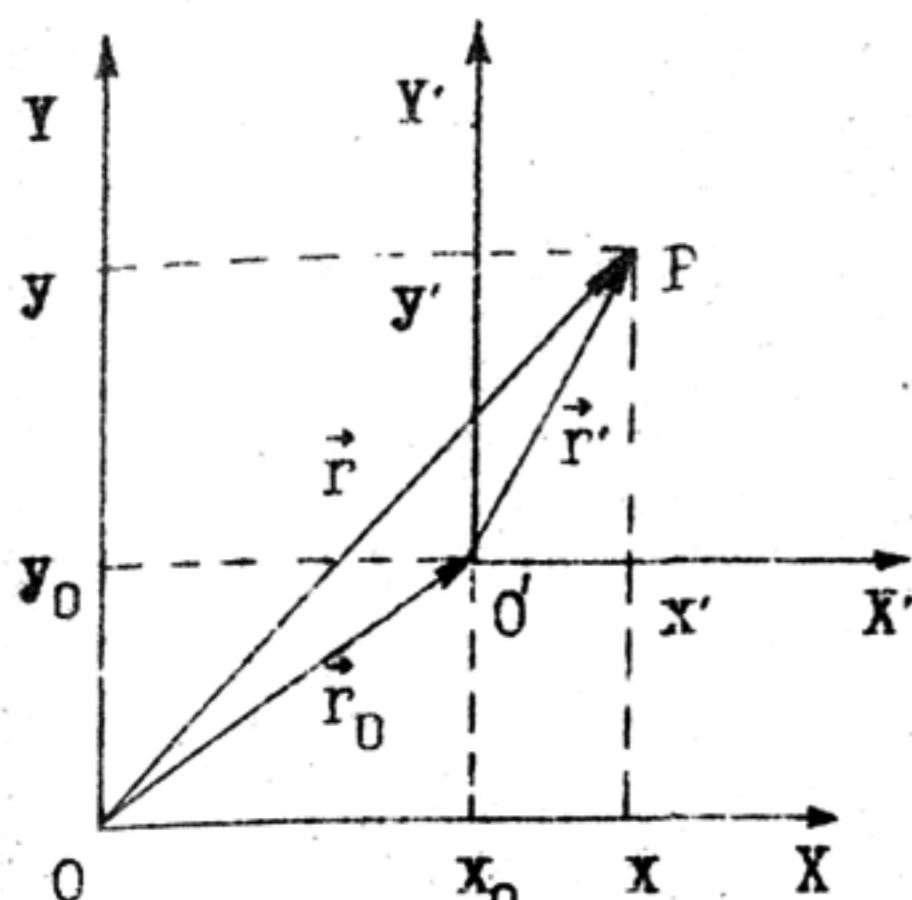


Рис.3. Сдвиг декартовой системы координат на плоскости

компонент вектора (A_x, A_y, A_z) ⁶. Вектор - это направленный отрезок, проекции которого на соответствующие оси и есть компоненты. Квадрат модуля вектора есть сумма квадратов его компонент:

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \quad (I.4)$$

Для всех дальнейших выкладок удобно сделать следующее переобозначение, используемое в тензорном анализе:

$$\begin{array}{lll} x \rightarrow x_1 & \vec{i} \rightarrow \vec{i}_1 & A_x \rightarrow A_1, \\ y \rightarrow x_2 & \vec{j} \rightarrow \vec{i}_2 & A_y \rightarrow A_2, \\ z \rightarrow x_3 & \vec{k} \rightarrow \vec{i}_3 & A_z \rightarrow A_3. \end{array} \quad (I.5)$$

Разложение вектора \vec{A} по базису тогда записывается как

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3 = \sum_{j=1}^3 A_j \vec{i}_j. \quad (I.6)$$

Тензорные обозначения (I.5) позволили звёсти знак суммы по компонентам. Дальнейшее упрощение достигается введением общепринятого соглашения о суммировании. Договоримся впредь опускать знак суммы в выражениях, где индекс суммирования встречается дважды (правило суммирования Эйнштейна)⁷. Теперь (I.6) и

⁶ Здесь их приходится висить в строку, так как столбец из трех чисел написать в тексте затруднительно.

⁷ Такое соглашение о суммировании было применено А.Эйнштейном в работе "Основы общей теории относительности" (1916).

соответствующую формуле (I.2) двухмерного случая.

Фиксируем в трёхмерном пространстве декартову ортонормированную систему координат $OXYZ$, представляющую собой три взаимно перпендикулярные оси OX , OY и OZ . Обозначим орты через \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} соответственно (эти векторы называются базисом /от греч. βασις - основание/). В данной системе координат вектор \vec{A} представляет собой тройку вещественных чисел -

(I.4) имеют совсем простой вид:

$$\vec{A} = A_j \vec{i}_j, \quad |\vec{A}|^2 = A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_3 = \sum_{i=1}^3 A_i A_i = A_i A_i. \quad (I.7)$$

В качестве отступления приведем несколько примеров на использование правила суммирования в выражениях с индексами. Очевидно, что выражение не зависит от обозначения индекса суммирования. Например:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_j b_j = a_m b_m = \dots \quad (I.8)$$

Поэтому индекс суммирования иногда называют "немым". Выражение $a_{ij} x_j$ представляет собой три линейные формы⁸:

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned} \quad (I.9)$$

Индекс i встречается в выражении один раз, по нему нет суммирования. Такие индексы называются "свободными". Договоримся, что свободные индексы и индексы суммирования пробегают значения 1, 2, 3, так как мы работаем с трехмерным пространством.

Вдумчивый читатель отметит идентичность (I.9) с правилом умножения матрицы a_{ij} на столбец x_j :

$$\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Выражение $a_{ij} x_i x_j$ – это квадратичная форма:

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \\ & + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + \\ & + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3. \end{aligned}$$

Матрица 3x3 – это просто a_{ij} , причем

$$a_{ij} = a_{ji}^T, \quad (I.10)$$

где a^T – транспонированная матрица, т. е. матрица, полученная из исходной перестановкой строк и столбцов.

⁸ $a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3.$

Симметричные и антисимметричные матрицы определяются соответственно: симметричная $a_{ij} = a_{ji}$ или $a = a^T$, антисимметричная $a_{ij} = -a_{ji}$ или $a = -a^T$.

Просто записывается правило умножения двух матриц:

$$c_{im} = a_{ij} b_{jm} = a_{i1} b_{1m} + a_{i2} b_{2m} + a_{i3} b_{3m}.$$

В самом деле, например, для $i = 2, m = 3$ имеем: $c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}$, т.е. элемент c_{23} матрицы c есть сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы a и третьего столбца матрицы b :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & b_{13} \\ \cdot & b_{23} \\ \cdot & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Заметим, между прочим, что из $c = ab$, т.е. $c_{ij}^b = a_{i\ell} b_{\ell j}$, следует после применения (I.10), что $c_{ji}^T = a_{j\ell}^T b_{\ell i}^T = b_{\ell i}^T a_{j\ell}^T$, и, значит, $c^T = b^T a^T$.

Введем, наконец, единичную матрицу

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для ее элементов имеется специальное обозначение δ_{ij} :

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Символ δ_{ij} называется дельта Кронекера⁹ и имеет два очевидных часто используемых свойства:

а) симметричность: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; б) $\delta_{ij} a_j = a_i$. (I.11)

Определение обратной матрицы $a^{-1}a = I$ записывается в компонентах с помощью дельты Кронекера так:

$$(a^{-1}a)_{ij} = (a^{-1})_{i\ell} a_{\ell j} = \delta_{ii}.$$

Вернемся теперь к выводу формулы преобразования компонент трехмерного вектора при вращении системы координат. Разложим вектор \vec{A} по базису $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ системы координат OXYZ (старой сис-

⁹ Введен Л. Кронекером (1866).

тёмы) и по базису $\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{i}_3'$ повернутой (новой) системы координат $OX'Y'Z'$:

$$\vec{A} = A_{\ell} \vec{i}_{\ell} = A_k' \vec{i}_k'. \quad (I.12)$$

Разложим также орты старого базиса \vec{i}_{ℓ} по новому базису \vec{i}_k' :

$$\vec{i}_{\ell} = b_{\ell k} \vec{i}_k', \quad b_{\ell k} = \cos(\vec{i}_{\ell} \wedge \vec{i}_k'), \quad (I.13)$$

где коэффициенты $b_{\ell k}$, очевидно, равны косинусу угла между \vec{i}_{ℓ} и \vec{i}_k' , так как по смыслу они являются проекциями орта \vec{i}_{ℓ} старой системы на направление, задаваемое ортом \vec{i}_k' новой системы. Разумеется, углы между новыми и старыми осями заданы, именно они и определяют поворот.

Подставляя (I.13) в (I.12), получаем: $A_k' \vec{i}_k' = A_{\ell} \vec{i}_{\ell} = A_{\ell} b_{\ell k} \vec{i}_k'$. Отсюда $A_k' \vec{i}_k' - A_{\ell} b_{\ell k} \vec{i}_k' = (A_k' - A_{\ell} b_{\ell k}) \vec{i}_k' = 0$, но нулевой вектор имеет нулевые компоненты $A_k' - A_{\ell} b_{\ell k} = 0$, т.е. $A_k' = A_{\ell} b_{\ell k} = b_{\ell k} A_{\ell} = b_{\ell k}^T A_{\ell}$. Вводя для удобства обозначение

$$a_{k\ell} = b_{\ell k}^T = b_{\ell k} = \cos(\vec{i}_{\ell} \wedge \vec{i}_k') = \cos(\vec{i}_k' \wedge \vec{i}_{\ell}), \quad (I.14)$$

получим закон преобразования компонент трехмерного вектора:

$$A_k' = a_{k\ell} A_{\ell}. \quad (I.15)$$

Его можно записать и в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота не является произвольной¹⁰. Она обладает одним важным свойством, к изучению которого мы перходим. Это свойство следует из очевидного геометрического требования неизменности квадрата модуля вектора \vec{A}^2 (I.7) при вращении системы координат:

$$|\vec{A}|^2 = A_i A_i = A_k' A_k'. \quad (I.16)$$

Иначе говоря, преобразование (I.15) должно быть таким, что в какой бы системе координат мы ни вычисляли квадрат модуля вектора по формуле (I.7), мы должны получить одно и то же число $|\vec{A}|^2$, которое равно квадрату "длины" вектора \vec{A} .

Подставим (I.15) в (I.16):

$$A_i A_i = A_k' A_k' = (a_{ki} A_i)(a_{kj} A_j) = a_{ki} a_{kj} A_i A_j = a_{ik}^T a_{kj} A_i A_j. \quad (I.17)$$

¹⁰ Уже потому, что модуль любого ее элемента согласно (I.14) неизменен или равен единице.

Здесь введены два разных индекса суммирования: i и j (в /I.15/ индекс суммирования обозначен через $!$), для того, чтобы они не "перепутались". В индексном выражении пользя допускать появления четырех одинаковых индексов, каждую пару индексов суммирования нужно обозначать по-своему; это возможно благодаря тому, что индекс суммирования "нёмой" (см./I.8/). Теперь, используя свойство (I.11), перепишем равенство (I.17):

$$\delta_{ij} A_i A_j = A_i A_i = a_{ik}^T a_{kj} A_i A_j. \quad (I.18)$$

Так как вектор \vec{A} произволен, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых комбинациях $A_i A_j$ в (I.18), получаем¹¹:

$$a_{ik}^T a_{kj} = \delta_{ij}, \quad (I.19)$$

или, в матричном виде:

$$a^T a = I \text{ или } a^T = a^{-1}. \quad (I.20)$$

т.е. для матрицы вращения транспонированная матрица совпадает с обратной¹². Матрицы, удовлетворяющие такому свойству, называются ортогональными, а эквивалентные условия (I.19), (I.20) – условиями ортогональности. Соответственно, преобразования вращения часто называют ортогональными преобразованиями. В большинстве случаев нет необходимости выписывать явный вид матрицы вращения, достаточно уметь пользоваться условием ортогональности (I.19). Однако с теоретической и практической точки зрения важно выразить элементы матрицы вращения через независимые параметры по аналогии с (I.3) для матрицы двумерного вращения. Переидем к рассмотрению этого вопроса.

¹¹ Более точным, на наш взгляд, является следующее рассуждение. Перепишем (I.18) в виде: $(\delta_{ij} - a_{ik}^T a_{kj}) A_i A_j = 0$. Матрица в левой части равенства a , определяющая квадратичную форму по компонентам вектора \vec{A} , симметрична, так как $a_{ki} a_{kj} = \cos(i_k i_j) \times \cos(j_k j_j)$ и δ_{ij} – симметричные матрицы. Мы видим, таким образом, что квадратичная форма задаваемая симметричной матрицей коэффициентов, обращается в нуль, следовательно, ее коэффициенты тождественно равны нулю, откуда вытекает (I.19). Замечание о симметричности существенно, так как в общем случае из равенства нулю квадратичной формы следует лишь автосимметричность матрицы определяющих ее коэффициентов, а отнюдь не обращение ее в нулевую.

¹² Матричное умножение некоммутативно, но так как $a^T = a^{-1}$ и $a^{-1} a = a a^{-1} = I$, (I.20) можно записать также в виде: $a a^T = I$.

Итак, инвариантность модуля вектора (I.16) относительно преобразований вращения (I.15) приводит к зависимости (I.19) между матричными элементами матрицы вращения. Матричное равенство (I.19) дает шесть различных уравнений для элементов матрицы:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0, \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Так как на девять элементов матрицы наложено шесть условий, то ясно, что матрица вращения определяется тремя независимыми параметрами. В качестве таких параметров выбирают так называемые углы Эйлера¹³.

Углы Эйлера описывают переход от системы координат OXYZ к любой другой — OX'Y'Z', посредством трех последовательных поворотов. Повороты проводятся в следующем порядке:

1. Вращение на угол φ вокруг оси Z. Ему соответствует переход от системы OXYZ к новой системе OξηZ (рис. 4, а), при этом преобразование координат имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (I.21)$$

2. Вращение на угол θ вокруг оси ξ . Ему соответствует переход от системы OξηZ к новой системе Oξη'Z' (рис. 4, б), преобразование координат имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{bmatrix}. \quad (I.22)$$

3. Вращение на угол ψ вокруг оси Z' . Ему соответствует переход от системы Oξη'Z' к системе OX'Y'Z' (рис. 4, в); третье преобразование имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (I.23)$$

¹³ Введены Л. Эйлером (1748).

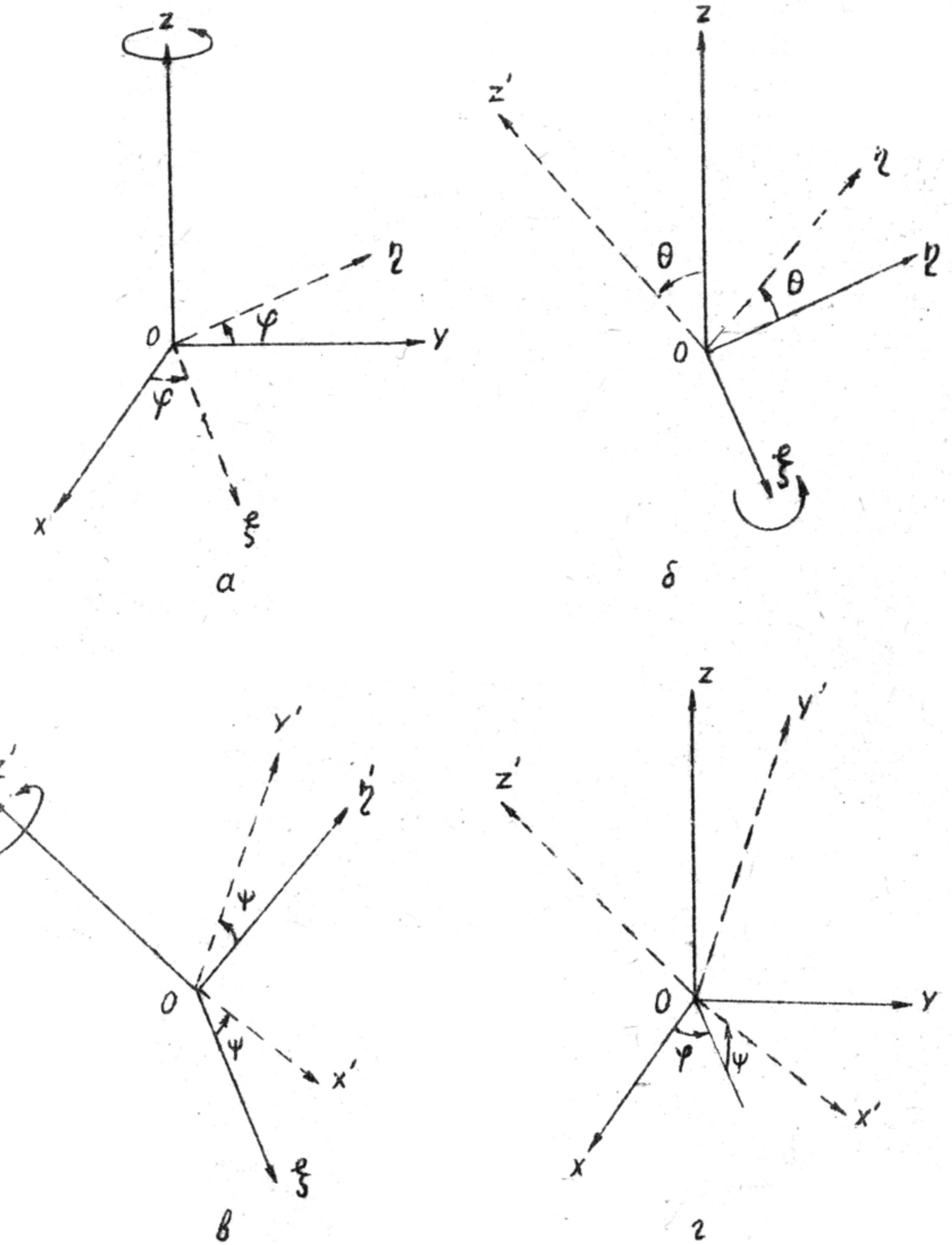


Рис. 4. Параметризация преобразования вращения системы координат углами Эйлера

Скончательный результат осуществления этих трех поворотов показан на рис. 4,г. Матрица перехода от системы ОХYZ к системе ОХ'Y'Z', очевидно, является произведением трех матриц преобразований (I.21), (I.22), (I.23):

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (I.24)$$

Вычисляя произведение матриц, получим:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (I.25)$$

Выражение (I.25) и есть результат параметризации матрицы вращения a_{ij} углами Эйлера. Легко видеть¹⁴, что эта матрица автоматически удовлетворяет условию ортогональности и поэтому матрица обратного преобразования получается из нее просто транспонированием.

5.2. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА. ТЕНЗОР ϵ_{ijk} И ТЕОРИЯ ДЕТЕРМИНАТОВ

Преобразование (I.15) лежит в основе векторного анализа и обеспечивает независимость содержания векторного анализа от используемой системы координат.

По аналогии с векторами могут быть построены более общие объекты – тензоры. Теория тензоров (тензорный анализ) является более общей теорией и позволяет дать координатно независимую формулировку физических законов. Именно в такой формулировке заинтересован физик. Это сделало тензорный анализ основным математическим аппаратом современной физики. При наиболее глубоком и общем построении тензорного анализа рассматривают произвольные непрерывно дифференцируемые функциональные преобразования

¹⁴ Обозначим матрицы в (I.24) через b , c , d соответственно. Каждая из них ортогональна, $a = bcd$ и $a^T a = (b c d)^T (b c d) = d^T c^T b^T b c d = I$.

п-мерного евклидова пространства¹⁵, что позволяет продемонстрировать замечательную эффективность тензорного аппарата в изучении законов природы /2,3/. Для первоначального знакомства мы ограничимся рассмотрением только ортогональных преобразований координат в трехмерном пространстве. В этом простом случае легко дать определение тензора и построить алгебру тензоров. В качестве простого применения алгебры тензоров мы дадим определения алгебраических и дифференциальных операций векторного анализа, полученные "естественным образом" с помощью теоремы о свертке. Эти определения вскрывают инвариантный смысл соотношений векторного анализа и делают вычисления при дифференцировании векторных и скалярных полей простыми, наглядными и весьма компактными.

С другим достаточно простым, но очень важным построением можно встретиться при изучении электродинамики /4/, где исследуются преобразования четырехмерного псевдоевклидова пространства: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct$ (c – скорость света, t – время), оставляющие инвариантным квадрат "длины" четырехмерного радиуса-вектора:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (ct)^2 = x'_1^2 + x'_2^2 + x'_3^2 - (ct')^2.$$

Полученные преобразования /4/ называются преобразованиями Лоренца. Инвариантность законов природы относительно этих преобразований является основным требованием специальной теории относительности, так что все физические величины этой теории являются векторами или тензорами относительно преобразований Лоренца.

Вернемся к трехмерным вращениям и дадим определение тензора. Возьмем два вектора \vec{A} и \vec{B} и в каждой системе координат составим набор из девяти чисел, являющихся произведениями компонент векторов. В системе $OXYZ$ это $A_i B_j$, в системе $O'X'Y'Z'$ это $A'_\ell B'_k$ и т.д., причем согласно правилу преобразования векторов (I.15) $A'_\ell = -a_{\ell i} A_i$, $B'_k = a_{kj} B_j$. Таким образом,

$$A'_\ell B'_k = a_{\ell i} A_i a_{kj} B_j = a_{\ell i} a_{kj} A_i B_j \quad (2.1)$$

¹⁵ То есть рассматриваются очень общего вида криволинейные системы координат (определение и обсуждение криволинейных систем координат в трехмерном пространстве см. в §8).

Из (2.1) видно, что двухиндексная величина $A_i B_j$ преобразуется при вращениях так, как будто "каждый из индексов преобразуется по некоторому закону". Вообще двухиндексную величину T_{ij} , преобразующуюся при вращениях по закону $T'_{ij} = a_{in} a_{jm} T_{nm}$, назовем тензором (от лат. *tendo* - растягиваю) второго ранга относительно преобразования вращения. Аналогично записывается закон преобразования тензора третьего ранга: $T'_{ijk} = a_{in} a_{jn} a_{kp} T_{mnp}$, и тензора любого n -го ранга:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (2.2)$$

Ясно, что в такой терминологии вектор является тензором первого ранга, а скаляр естественно назвать тензором нулевого ранга¹⁶. Скаляр - величина однокомпонентная, вектор имеет три компонента, тензор второго ранга - $3 \times 3 = 9$ компонент, тензор n -го ранга - 3^n компонент.

Сформулируем и докажем основные теоремы алгебры тензоров.

Теорема I. Сумма и разность тензоров одинакового ранга являются тензором того же ранга. Возьмем, например, два тензора третьего ранга:

$$T'_{ijk} = a_{i_1 j_1} a_{k_1 l_1} T_{l_1 m_1 n_1}, \quad (2.3)$$

$$S'_{ijk} = a_{i_1 j_1} a_{k_1 l_1} S_{l_1 m_1 n_1}.$$

Складывая или вычитая равенства (2.3), получим: $(T'_{ijk} \pm S'_{ijk}) = a_{i_1 j_1} a_{k_1 l_1} (T_{l_1 m_1 n_1} \pm S_{l_1 m_1 n_1})$, что и требовалось доказать. Очевидно, что если тензор умножается на константу, то он остается тензором, так что линейная комбинация тензоров одинакового ранга есть тензор того же ранга.

Теорема 2. Если все компоненты тензора обращаются в нуль в одной координатной системе (такой тензор называется нулевым), то они обращаются в нуль и во всех других координатных системах.

Доказательство очевидно, теорема следует из закона преобразования тензора (2.2). "Эта теорема имеет глубокое значение в формулировке физических законов. Она констатирует, по существу, что если какой-либо закон выводится из исчезновения компонент тензора в одной частной системе координат, то это значит, что правила преобразования компонент тензора гарантируют их

¹⁶ Определение скаляра как тензора нулевого ранга следует из теоремы о свертке (см. далее).

исследование во всех координатных системах. Физик мало заинтересован в формулировке закона, который мог бы иметь силу лишь в какой-либо одной частной системе отсчета. И, действительно, понятие инвариантности и универсальности физических законов — краеугольный камень, на котором строится "математическая физика" [2].

Следствие теоремы 2. Если тензорное уравнение $S_{i_1 i_2 \dots i_n} = T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ выполняется в какой-нибудь одной координатной системе, то оно выполняется и во всех других.

В самом деле, пользуясь теоремой 1, находим: $S_{i_1 i_2 \dots i_n} - T_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$. Применив теорему 2, получаем: $S'_{i_1 i_2 \dots i_n} - T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ и $S'_{i_1 i_2 \dots i_n} = T'_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Теорема 3. Из двух тензоров $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и $S_{i_1 i_2 \dots i_m}$ рангов n и m можно составить внешнее произведение $T_{i_1 i_2 \dots i_n} \times S_{j_1 j_2 \dots j_m}$, которое будет тензором ранга $n + m$, что немедленно следует из закона преобразования тензоров (3.2).

Теорема 4. О внутреннем произведении (свертке). Если взять тензор n -го ранга, приравнять в нем два индекса и просуммировать по ним, полученная величина с $n-2$ свободными индексами будет тензором ранга $n-2$.

Для простоты приведем доказательство для тензора четвертого ранга $T_{ijk\ell}$. Закон преобразования записывается в виде:

$$T_{ijk\ell} = \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kp} \delta_{\ell r} T_{nmpq} \quad (3.4)$$

Приравняем в (3.4) индексы i и k и просуммируем по ним:

$$T_{kjk\ell} = \delta_{kn} \delta_{jm} \delta_{kp} \delta_{\ell r} T_{nmpq} = \delta_{kn} \delta_{kp} \delta_{jm} \delta_{\ell r} T_{nmpq} = \quad (3.5)$$

$$\delta_{nk} \delta_{kp} \delta_{jm} \delta_{\ell r} T_{nmpq} = \delta_{pr} \delta_{jm} \delta_{\ell r} T_{nmpq} = \delta_{jm} \delta_{\ell r} T_{nmpq}.$$

Т.е. двумидексная величина $T_{kjk\ell}$ (величина с двумя свободными индексами) действительно является тензором второго ранга. При выводе (3.5) использованы условие ортогональности матрицы вращения $\delta_{nk} \delta_{kp} = \delta_{pr}$ и свойство дельты Кронекера $\delta_{pr} T_{nmpq} = T_{nmpq}$. Стандартное приравнивание двух индексов в тензоре (в силу соглашения о суммировании Эйнштейна по ним автоматически возникает суммирование) называется сверткой тензора по этим индексам и приводит к уменьшению ранга тензора на 2.

Из тензора $T_{ijk\ell}$ с помощью теоремы о свёртке можно составить следующие тензоры: $T_{iik\ell}, T_{ijil}, T_{ijk\ell}, T_{ijjl}, T_{ijkj}, T_{ijkk}$ – тензоры второго ранга, и $T_{iikk}, T_{ijij}, T_{iiji}$ – тензоры нулевого ранга (скаляры).

В качестве важного практического применения алгебры тензоров в §3,4 будут обсуждаться определения алгебраических и дифференциальных операций векторного анализа. Прежде, однако, необходимо подробно рассмотреть некоторую трехиндексную величину ϵ_{ijk} , тесно связанную с теорией детерминантов и часто встречающуюся в приложениях тензорного анализа. Далее мы увидим, что ϵ_{ijk} – тензор. ϵ_{ijk} называется трехиндексным символом Леви-Чивита¹⁷ и определяется как единичный полностью антисимметричный объект с тремя индексами. Полная антисимметрия обозначает, что при перестановке двух любых рядом стоящих индексов ϵ_{ijk} меняет знак:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \text{ и } \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}; \quad (2.6)$$

Слово "единичный" в определении соответствует выбору

$$\epsilon_{123} = +1. \quad (2.7)$$

Легко видеть, что это эквивалентно такому определению:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ \text{все остальные } \epsilon_{ijk} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.8)$$

т.е. для четных перестановок чисел 1,2,3 (таких перестановок три) $\epsilon_{ijk} = +1$, для нечетных перестановок (их тоже три) $\epsilon_{ijk} = -1$. Когда же какие-нибудь два индекса совпадают (27-6=21 случай), $\epsilon_{ijk} = 0$. В самом деле, например $\epsilon_{322} = -\epsilon_{322}$ согласно (2.6), но тогда $2\epsilon_{322} = 0$ и, значит, $\epsilon_{322} = 0$.

Введение символа Леви-Чивита совместно с правилом суммирования Эйнштейна позволяет изложить теорию детерминантов исключительно компактно и наглядно. Мы будем рассматривать матрицы размерности 3×3 , но, конечно, все полученные результаты элементарно обобщаются на матрицы произвольной размерности $n \times n$.

¹⁷ Введен Т.Леви-Чивита – итальянским математиком (1873-1941). Т.Леви-Чиви в совместно с Г.Риччи-Курбетро привел в систему тензорный анализ (1901).

Детерминант¹⁸ квадратной матрицы а размерности 3×3 – это число. Оно вычисляется суммированием всех возможных произведений, состоящих из трех элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Произведения входят в сумму с определенным знаком согласно правилу, приведенному далее:

$$\det(a) = |a| = \sum \pm a_{i1} a_{j2} a_{k3}. \quad (2.9)$$

В этой формуле суммирование производится по всем перестановкам i, j, k чисел 1, 2, 3 и перед членом суммы берется знак "+", если перестановка i, j, k четна, и знак "-", если эта перестановка нечетна. Таким образом, детерминант содержит $3! = 6$ членов, из которых $3!/2 = 3$ берутся со знаком "+" и $3!/2 = 3$ – со знаком "-". Распишем (2.9) подробно: $|a| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

Определение ϵ_{ijk} (2.6), (2.7) или эквивалентное ему (2.8) позволяет записать (2.9) в более удобном виде:

$$|a| = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}. \quad (2.10)$$

Здесь, как всегда, подразумевается правило суммирования Эйнштейна. Из определения детерминанта очевидно, что (2.10) можно переписать эквивалентным образом:

$$|a| = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (2.11)$$

Формула (2.10) допускает простое и весьма полезное обобщение. Если в ней заменить индексы столбцов 1, 2, и 3 на произвольные свободные индексы α , β и γ , то мы получим более общее соотношение:

$$|a| \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{ijk} a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma}. \quad (2.12)$$

Докажем это равенство. В самом деле, при $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ из (2.12) получается соотношение (2.10). Если же в правой части (2.12) переставить индексы α и β (или β и γ), выражение $\epsilon_{ijk} a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma}$ изменит знак: $\epsilon_{ijk} a_{i\beta} a_{j\alpha} a_{k\gamma} = \epsilon_{ijk} a_{j\alpha} a_{i\beta} a_{k\gamma} = -\epsilon_{ijk} a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma}$. Здесь использовано переобозначение индексов суммирования i на j и j на i во втором равенстве. Таким образом, это выражение с тремя свободными индексами α , β и γ полностью антисимметрично по этим индексам и, следовательно, обязано быть пропорционально символу

¹⁸ Термин "детерминант" в современном его значении ввел О. Коши.

ϵ_{ijk} . Коэффициент пропорциональности согласно (2.10), конечно, как раз детерминант матрицы a , и (2.12) доказано.

Очевидно, что так же можно обобщить (2.11):

$$|\epsilon| \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.13)$$

Едем называть (2.12) и (2.13) основной формулой теории детерминантов, хотя, может быть, это является некоторой вольностью в терминологии. Но эта вольность может быть оправдана тем, что из (2.12), (2.13) немедленно получаются все результаты теории детерминантов. Неречислим их.

Детерминант не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами (т.е. детерминант матрицы a равен детерминанту транспонированной матрицы a^T). Это следует из сравнения (2.10) и (2.11).

Детерминант меняет знак, если поменять местами любые две строки (или столбца) матрицы. Действительно, переставим, например, в детерминанте первую и вторую строки и воспользуемся формулой (2.13):

$$\epsilon_{ijk} a_{1i} a_{1j} a_{1k} = |\epsilon| \epsilon_{213} = -|\epsilon|,$$

где ϵ — детерминант матрицы с переставленными строками.

Общий множитель всех элементов любой строки (или столбца) можно вынести за знак детерминанта (очевидно из определения).

Детерминант равен нулю, если элементы двух строк (или двух столбцов) матрицы равны (или пропорциональны). Действительно, пусть, например, вторая и третья строки матрицы совпадают, тогда с помощью (2.13) приходим к выводу, что $\epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = |\epsilon| \epsilon_{122} = 0$.

Другие обычно рассматриваемые свойства настолько очевидны, что их не стоит и обсуждать.

Остановимся, однако, подробно на двух важных и весьма нетривиальных соотношениях теории детерминантов. Докажем сначала, что детерминант произведения двух матриц равен произведению детерминантов этих матриц.

Итак, пусть $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$, тогда, используя (2.10) и (2.12), получаем:

$$\begin{aligned} |\epsilon| \cdot \epsilon_{ijk} c_{1i} c_{2j} c_{3k} &= \epsilon_{ijk} a_{1i} b_{1i} a_{2j} b_{2j} a_{3k} b_{3k} = \\ &= \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} b_{1i} b_{2j} b_{3k} = |\epsilon| \epsilon_{\alpha\beta\gamma} b_{\alpha 1} b_{\beta 2} b_{\gamma 3} = |\epsilon| |\epsilon| b_1. \end{aligned}$$

Более лаконичный читатель скажет оценить правильность эффективность,

компактность и наглядность этого вывода.

Вторым пунктом обсуждения будет разложение Лапласа и понятие обратной матрицы. Удобно рассматривать детерминант матрицы в размерности $n \times n$:

$$|A| = \epsilon_{ijk\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} \cdots a_{np}, \quad (2.14)$$

Проведём разложение детермианта, скажем, по третьей строке. Для этого просто перенесем сомножитель a_{3k} на первое место в правой части (2.14): $|A| = \epsilon_{ijk\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{4l} \cdots a_{np} = a_{3k} A_{3k}$. Это и есть разложение Лапласа, причем

$$A_{3k} = \epsilon_{ijk\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{4l} \cdots a_{np}^d \quad (2.15)$$

называется алгебраическим дополнением к элементу матрицы a_{3k} . Остается лишь убедиться, что (2.15) совпадает с обычным известным из высшей алгебры определением алгебраического дополнения. Для наглядности перенесем в правой части (2.15) индекс k у символа Леви-Чивита $\epsilon_{ijk\ldots p}$ на первое место:

$$A_{3k} = (-1)^{3-1} \epsilon_{kij\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{4l} \cdots a_{np}. \quad (2.16)$$

Детерминант матрицы, полученной из A вычёркиванием третьей строки и k -го столбца, называется минором M_{3k} . Очевидно, что $\epsilon_{kij\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{4l} \cdots a_{np}$ - это минор со знаком $(-1)^{k-1}$, потому что $\epsilon_{k\ldots k\ldots} = 0$ (по k нет суммирования) и $\epsilon_{k123\ldots k-1k+1\ldots p} = (-1)^{k-1}$. Итак, $\epsilon_{kij\ldots p} a_{1i} a_{2j} a_{4l} \cdots a_{np} = (-1)^{k-1} M_{3k}$. Подставив это выражение в (2.16), получим: $A_{3k} = (-1)^{3-1} (-1)^{k-1} M_{3k} = (-1)^{3+k} M_{3k}$.

Таким образом, алгебраическое дополнение к элементу матрицы a_{ij} - детерминант матрицы, полученной из A вычёркиванием i -й строки и j -го столбца, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Легко записать разложение детермианта по i -й строке:

$$|A| = a_{(i)k} A_{(i)k}, \quad (2.17)$$

Здесь i фиксирован, по нему нет суммирования. Чтобы отметить это обстоятельство, он взят в скобки. Это разложение Лапласа по i -й строке.

Интересно и небесполезно обобщить формулу (2.17). Спросим себя, что будет, если в (2.17) умножать элементы i -й строки матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов j -й строки ($i \neq j$): $a_{ik} A_{ik}$. В $A_{(i)k}$ нет элементов j -й строки, но

элементы i -й, конечно, есть, так что

$$\begin{aligned} a_{ik} A_{jk} &= a_{(i)k} \epsilon_{...k...r...} a_{(i)r} = \\ &= -(-1)^{|r-k|} \epsilon_{...kr...} a_{(i)k} a_{(i)r} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь индексы k и r поставлены рядом, за счет чего из-за антисимметрии символа Леви-Чивита появился знак $"-"$, сомножитель $a_{(i)k}$ поставлен рядом с сомножителем $a_{(i)r}$. Теперь легко видеть, что выражение (2.18) равно нулю, так как это свертка антисимметричного по индексам k и r объекта с симметричным:

$$\begin{aligned} \epsilon_{...kr...} a_{(i)k} a_{(i)r} &= -\epsilon_{...rk...} a_{(i)r} a_{(i)k} = \\ &= -\epsilon_{...kr...} a_{(i)k} a_{(i)r} \end{aligned}$$

В первом равенстве переставлены местами индексы k и r и сомножители $a_{(i)k}$ и $a_{(i)r}$, во втором равенстве произведено переобозначение индексов суммирования r на k и k на r . Мы убедились, что выражение (2.18) равно самому себе с обратным знаком, следовательно, оно равно нулю. С учетом (2.17) мы получаем: $a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \text{lat}$, но тогда

$$a_{ik} \frac{A_{kj}}{\text{lat}} = \delta_{ij}. \quad (2.19)$$

И оказывается, что в (2.19) матрица $\frac{A_{kj}}{\text{lat}}$ играет роль правой обратной матрицы для матрицы a_{ik} :

$$a a^{-1} = T, \text{ где } (a^{-1})_{kj} = \frac{A_{kj}}{\text{lat}}.$$

Так что обратная матрица получается из матрицы алгебраических дополнений после транспонирования и деления на детерминант a (если, конечно, он не равен нулю).

Разумеется, что если бы мы брали в качестве исходного определение детерминанта (2.10), то получили бы разложение Лапласа в виде: $a_{ki} A_{kj} = \delta_{ji} \text{lat}$, что можно переписать как $\frac{A_{jk}}{\text{lat}} a_{ki} = \delta_{ji}$. Поэтому левая обратная матрица для a_{ik} строится точно так же, как правая, и совпадает с правой обратной матрицей¹⁹.

$$a^{-1}a = a a^{-1} = T, \text{ где } (a^{-1})_{jk} = \frac{A_{jk}}{\text{lat}}.$$

¹⁹ Этим фактом мы уже пользовались в сноске 12. Конечно, для доказательства равенства левой обратной матрицы a_l^{-1} и правой обратной матрицы a_p^{-1} можно воспользоваться ассоциативностью матричного умножения $a_l^{-1} = a_l^{-1}(a_p a_l^{-1}) = (a_l^{-1} a_l)a_p^{-1} = a_p^{-1}$.

Применим в заключение полученные в теории детерминантов результаты к ортогональным матрицам. Вычисляя детерминант в левой и правой частях условия ортогональности $a a^T = I$, получим: $|a a^T| = |a| |a^T| = |a|^2 = 1$ и, следовательно, для ортогональной матрицы $|a| = \pm 1$.

В §3 показано, что знак "+" соответствует преобразованию вращения декартовой системы координат, знак "-" - преобразованию отражения или преобразованию отражения с последующим вращением. Пока мы рассматриваем только чистые вращения, поэтому $|a| = +1$. Основная формула теории детерминантов (2.13) в этом случае записывается следующим образом:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} \epsilon_{ijk}. \quad (2.20)$$

Сравним это соотношение с законом преобразования тензора третьего ранга

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} \epsilon'_{ijk}. \quad (2.21)$$

Видно, что символ Леви-Чивита ϵ_{ijk} является тензором третьего ранга, причем он обладает тем специальным свойством, что его компоненты остаются неизменными при вращении системы координат. Иначе говоря, если преобразовать ϵ_{ijk} по закону (2.21), его компоненты в новой системе координат, как видно из (2.20), будут теми же самыми, что и в старой системе координат: $\epsilon'_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$; для произвольного тензора это, конечно, не так.

Есть еще один тензор, обладающий таким свойством - дельта Кронекера δ_{ij} . В самом деле, $\delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha i} a_{\beta j} \delta_{ij} = a_{\alpha i} a_{\beta i} = a_{\alpha i} a_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Здесь использовано условие ортогональности $a_{\alpha i} a_{i\beta}^T = \delta_{\alpha\beta}$. Таким образом, δ_{ij} - действительно тензор, причем

$$\delta'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha i} a_{\beta j} \delta_{ij}. \quad (2.22)$$

Интересно отметить, что задачу можно обратить. Оказывается, что всякий тензор второго ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ij} , тензор третьего ранга - ϵ_{ijk} . Единственный тензор первого ранга (вектор), обладающий таким свойством, - это нулевой вектор.

5.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

В настоящем параграфе алгебраические операции векторного анализа определяются с помощью теоремы о свертке (теорема 4 б2), что подчеркивает их инвариантный смысл и делает вычисления с векторами простыми, наглядными и весьма компактными.

Из двух векторов \vec{A} и \vec{B} можно составить скаляр. Внешнее произведение векторов A_i, B_j дает тензор второго ранга, свертка по индексам i и j дает тензор нулевого ранга — скаляр, в котором легко узнать обычное скалярное произведение двух векторов²⁰:

$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \vec{AB} = (\vec{AB}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$. Скалярная природа этой комбинации обеспечивается теоремой о свертке, так что, конечно, $A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = AB = A'_i B'_i$. Легко доказать все обычные свойства скалярного произведения:

$$\vec{AB} = \vec{BA}, \vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{AB} + \vec{AC}, (\alpha \vec{A}) \vec{B} = \alpha(\vec{AB}),$$

$$\vec{AA} = |\vec{A}|^2, |\vec{AB}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}|, \cos(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\vec{AB}}{\sqrt{(\vec{AA})(\vec{BB})}}.$$

Заметим, что свертка векторов \vec{A} и \vec{B} с тензором δ_{ij} не дала бы ничего нового. В самом деле,

$$\delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i = \vec{AB}. \quad (3.1)$$

Итак, число $(\vec{AB}) = A_i B_i = A'_i B'_i$ не меняется, в какой бы системе координат его не вычисляли. Выясним его геометрический смысл. Для этого выберем систему координат, в которой ось ОХ направлена по вектору \vec{A} , а вектор \vec{B} лежит в плоскости XY (рис.5).

²⁰ Понятие скалярного произведения и его название введено У. Гамильтоном (1853); обозначение $a \cdot b$ введено Дж. Гиббом (1881), который придал векторному анализу современный вид.

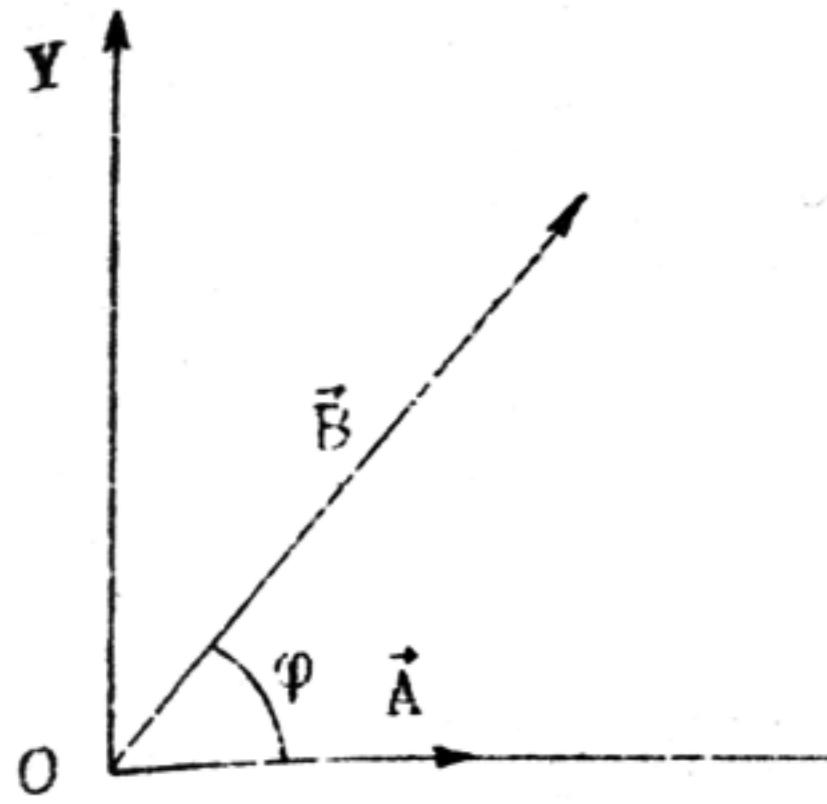


Рис. 5. К определению скалярного произведения

В этой системе вектор \vec{A} имеет компоненты $(|\vec{A}|, 0, 0)$, а вектор \vec{B} — компоненты $(|\vec{B}| \cos \varphi, |\vec{B}| \sin \varphi, 0)$. Тогда $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами \vec{A} и \vec{B} . По этому скалярное произведение векторов равно произведению модулей векторов за косинус угла между ними. Если вектор \vec{A} — единичный (т.е. $|\vec{A}| = 1$), то $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| \cos \varphi$ — это проекция вектора \vec{B} на направление, задаваемое вектором \vec{A} .

Прежде чем обсуждать понятия векторного и смешанного произведений векторов, остановимся на определении правой и левой декартовых систем координат²¹. Тройку некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ назовем правой, если наблюдатель, находящемуся внутри трехгранных телесного угла, образуемого этими векторами, обход концов векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном порядке кажется совершающимся против часовой стрелки²² (рис. 6, а); в противоположном случае $\vec{e}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка (рис. 6, б). Правая (левая) тройка векторов располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, не согнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

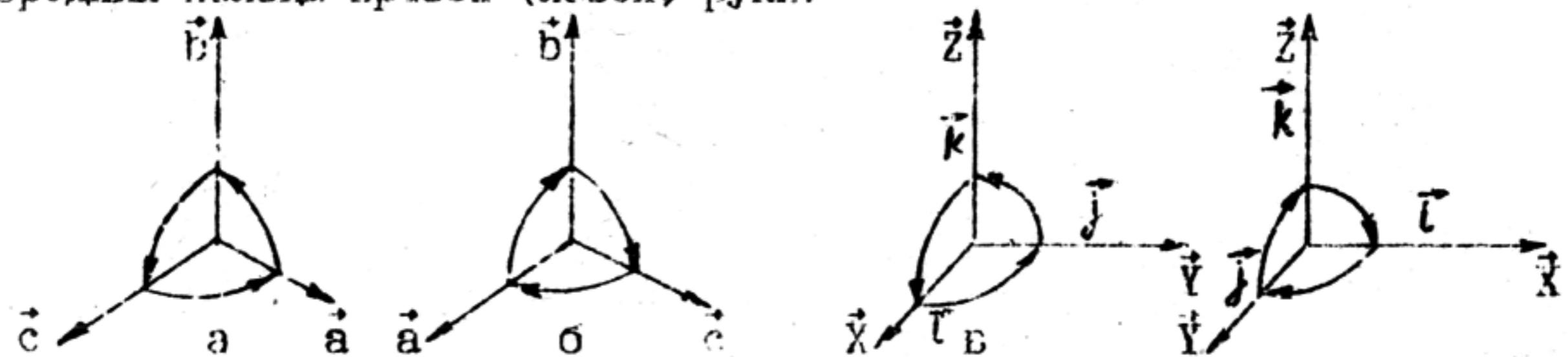


Рис. 6. Декартова система координат: а — правая тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; б — левая тройка векторов $\vec{e}, \vec{b}, \vec{c}$; в — правая декартова система координат; г — левая декартова система координат

²¹ Современные названия "правая" и "левая" система предложены Дж. Маккордликом (1873).

²² Иначе говоря, для наблюдателя, находящегося в общем начале векторов, обход векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке; в противном случае $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка.

Декартова система координат называется правой, если орты \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} образуют правую тройку (рис. 6, в); в противоположном случае система координат называется левой (рис. 6, г). В дальнейшем для определенности в соответствии с общепринятым в векторном анализе соглашением мы будем пользоваться только правыми декартовыми системами координат.

Перейдем к определению векторного произведения векторов. Из компонент векторов \vec{A} и \vec{B} и тензора ϵ_{ijk} можно составить вектор. Внешнее произведение этих величин дает тензор пятого ранга $\epsilon_{ijk} A_m B_n$, свертка по индексам j , i , m , k и n понижает ранг тензора на четыре. В получившемся векторе

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (3.2)$$

легко узнать векторное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} . Запишем вектор \vec{C} в виде разложения по базису $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$:

$$\vec{C} = C_1 \vec{i}_1 = \epsilon_{ijk} A_j B_k \vec{i}_1 = \epsilon_{ijk} \vec{i}_1 A_j B_k = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{A} \times \vec{B}.$$

Здесь использовано определение детерминанта (2.11). Представляем читателю доказательство основных свойств векторного произведения: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$, $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$, $(\alpha \vec{A}) \times \vec{B} = \alpha (\vec{A} \times \vec{B})$, $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, $\vec{A} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$.

Сравним определение (3.2) с "обычным" определением векторного произведения векторов:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(B_x A_z - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - B_x A_y)$$

$$\text{или } C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = B_x A_z - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - B_x A_y. \quad (3.3)$$

Запишем (3.3) в повернутой (штрихованной) системе координат:

$C'_x = A'_y B'_z - A'_z B'_y$, $C'_y = B'_x A'_z - A'_x B'_z$, $C'_z = A'_x B'_y - B'_x A'_y$. Читатель, понимающий, что компоненты вектора в различных системах координат связаны жестко определенным законом, вправе задать вопрос: "Закон преобразования компонент векторов \vec{A} и \vec{B} задан. Как доказать, что величины C'_x , C'_y , C'_z выражаются через C_x , C_y , C_z по закону преобразования компонент грахмерного вектора?" Действительно, мы

обязаны ответить на этот вопрос, чтобы убедиться в том, что трехкомпонентная величина, определяемая соотношениями (3.3), является вектором. Конечно, доказывать этот факт в "обычных" обстоятельствах – дело неблагодарное. Определение же (3.2) является очень удобным и избавляет нас, благодаря теореме о свертке, от трудов по доказательству векторной природы величины C_i ; кроме того, оно весьма удобно при вычислениях.

Докажем, например, известную формулу для двойного векторного произведения (известную формулу "баз минус цаб"):

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (3.4)$$

1-я компонента левой части соотношения (3.4), по определению (3.2), выражается через компоненты векторов \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} следующим образом:

$$\begin{aligned} [A \times (B \times C)]_i &= \epsilon_{ijk} A_j (B \times C)_k = \\ &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{k\ell m} B_\ell C_m = \epsilon_i \epsilon_{k\ell m} A_j B_\ell C_m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь возникла свертка тензоров ϵ_{ijk} $\epsilon_{k\ell m}$ по индексу k . Такое выражение всегда встречается при вычислении двойного векторного произведения. Оно может быть упрощено:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} = \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{j\ell} \delta_{im} \quad (3.6)$$

Естественно, что тензор четвертого ранга $\epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m}$ выражается через **внешнее произведение** дельта Кронекера, которое тоже является тензором четвертого ранга, ведь дельта Кронекера, как и тензор ϵ_{ijk} , обладает свойством не менять своих компонент при вращении системы координат (см. /2.20/ и /2.22/). Но все же необходимо доказательство соотношения (3.6). Распишем левую часть этого соотношения по правилу суммирования:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} = \epsilon_{ij1} \epsilon_{1\ell m} + \epsilon_{ij2} \epsilon_{2\ell m} + \epsilon_{ij3} \epsilon_{3\ell m}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что она обращается в нуль, за исключением случая, когда i и j различны, а ℓ и m есть перестановка i и j . Если $i=\ell$ и $j=m$, то (3.7) имеет значение $+1$; если $i=m$ и $j=\ell$, то (3.7) принимает значение -1 . Правая часть (3.6) при указанных комбинациях индексов, которые исчерпывают все возможные комбинации, принимает такие же значения, как и левая, следовательно, (3.6) доказано.

Используем (3.6) для упрощения (3.5):

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lm} A_j B_l C_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}) A_j B_l C_m =$$

$$= B_i A_m C_n - C_i A_l B_l = [\vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})]_i,$$

где применено свойство $\delta_{il} \delta_{jm} = \delta_{ij} \delta_{lm}$ и т.д. Найдем теперь для тренировки квадрат модуля векторного произведения:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{ilm} A_l B_m =$$

$$= \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm} A_j B_k A_l B_m = \begin{vmatrix} \delta_{ij} \delta_{jm} \\ \delta_{kl} \delta_{km} \end{vmatrix} A_j B_k A_l B_m = A_j A_j B_k B_k - A_j B_j A_k B_k = \quad (3.8)$$

$$= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A}\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 (1 - \cos^2 \hat{\vec{A}}\vec{B}) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2 \hat{\vec{A}}\vec{B}.$$

Выясним геометрический смысл векторного произведения. Для этого выберем систему координат (правую), в которой вектор \vec{A} направлен по оси Ox , а вектор \vec{B} находится в плоскости XY (рис. 7).

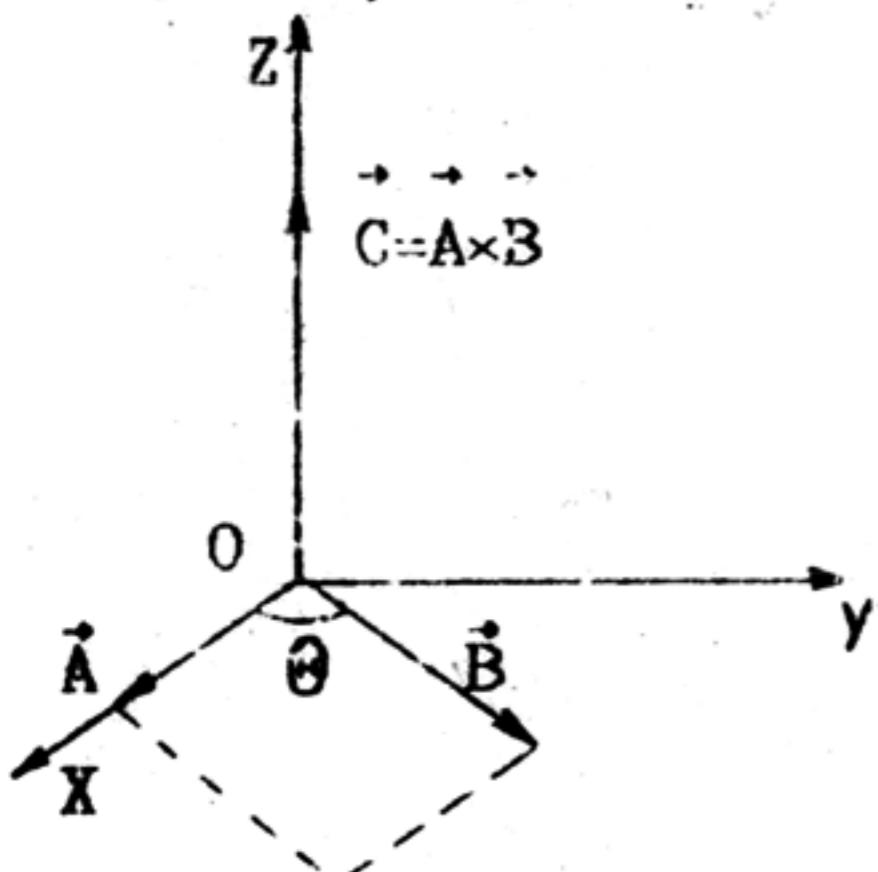


Рис. 7. Геометрический смысл векторного произведения

перпендикулярный \vec{A} и \vec{B} и направленный так, что тройка векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}$ – правая.

Модуль $\vec{A} \times \vec{B}$ был вычислен нами в (3.8) и равен "площади" параллелограмма²³, построенного из векторах \vec{A} и \vec{B} , так как $|\vec{A}| \sin \theta$ – "высота" этого параллелограмма. Направление вектора $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ можно определять эквивалентным образом по правилу буравчика (правого винта): при вращении буравчика по направлению от \vec{A} к \vec{B} на угол $\theta = \hat{\vec{A}}\vec{B} < \pi$ буравчик вкручивается по направлению вектора $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

В этой системе $\vec{A} = (|\vec{A}|, 0, 0)$, $\vec{B} = (|\vec{B}| \times \cos \theta, |\vec{B}| \sin \theta, 0)$, где $\theta = \hat{\vec{A}}\vec{B}$ – угол между векторами \vec{A} и \vec{B} , $-\pi \leq \theta \leq \pi$; так что

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ |\vec{A}| & 0 & 0 \\ |\vec{B}| \cos \theta & |\vec{B}| \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = 0i + 0j + |\vec{B}| |\vec{B}| \sin \theta k, \text{ т.е. } C_x = 0, C_y = 0, C_z = |\vec{B}| |\vec{B}| \sin \theta = |\vec{C}| \text{ (при } C_z > 0, \text{ иначе } |\vec{C}| = -C_z).$$

Таким образом, векторное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} есть вектор, модуль которого равен произведению их модулей на синус угла между ними.

²³ Напомним, что размерность вектора может быть любой.

В приложениях часто встречается смешанное произведение векторов

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = A_i (B \times C)_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k$$

$$= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Из определения легко увидеть основные свойства смешанного произведения: при перестановке двух векторов смешанное произведение меняет знак, при равенстве двух векторов смешанное произведение обращается в нуль и, наконец, смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов: $\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}(\vec{A} \times \vec{B})$. Смешанное произведение можно записать в виде: $\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = |\vec{A}| |\vec{B} \times \vec{C}| \cos \theta = |\vec{B} \times \vec{C}| |\vec{A}| \cos \theta$, где θ – угол между вектором \vec{A} и вектором $\vec{B} \times \vec{C}$ ($0 \leq \theta < \pi$) (рис.8). Но $|\vec{B} \times \vec{C}|$ – это "площадь" параллелограмма, который является основанием параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, а $|\vec{A}| \cos \theta$ – "высота" этого параллелепипеда. Так что смешанное произведение для правой тройки векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ – объем этого параллелепипеда, а для левой тройки – объем, взятый со знаком "-".

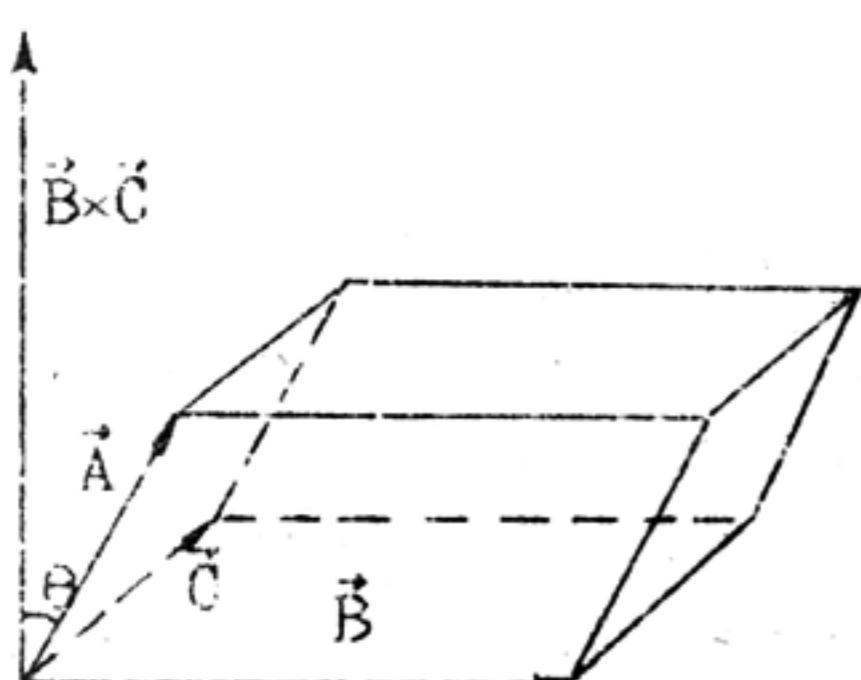


Рис. 8. Геометрический смысл смешанного произведения

левой системой) изображен на рис.9. Компоненты радиуса-вектора в

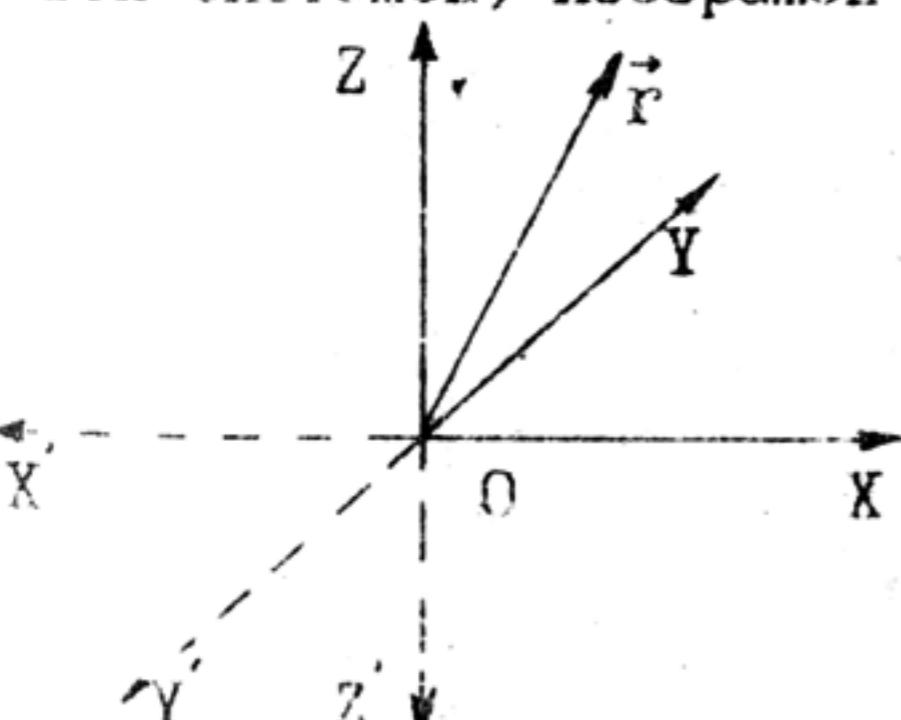


Рис. 9. Отражение декартовой системы координат

новой системе координат (x'_1, x'_2, x'_3) выражаются через старые компоненты следующим образом:

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad (3.9)$$

или, в матричном виде:

$$x'_i = a_{i,j} x_j, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{i,j} = -\delta_{ij}$ называется матрицей

отражения. Соотношения (3.9) часто выражают иным образом: говорят, что при отражении системы координат радиус-вектор меняет знак: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, т.е. при рассмотрении того же самого радиуса-вектора из отраженной системы координат мы видим, что все его компоненты изменили знак: $x_i \rightarrow -x_i$. Радиус-вектор \vec{r} и все другие векторы²⁴, которые ведут себя таким образом при отражении системы координат, называются полярными, истинными векторами или просто векторами.

Скалярное произведение (свертка) двух истинных векторов \vec{A} и \vec{B} при отражении не меняет знак: $A_i B_i \rightarrow A_i B_i$. Назовем величину, являющуюся скаляром относительно вращений и не меняющую знак при отражении системы координат, истинным скаляром.

Внешнее произведение двух истинных векторов $A_i B_j$ не меняет знак при отражении системы координат; соответственно, и истинный тензор второго ранга не меняет знак при отражении: $T_{ij} \rightarrow T_{ij}$. Истинный тензор третьего ранга T_{ijk} меняет знак и т.д. Короче говоря, компоненты истинного тензора n -го ранга при отражении системы координат преобразуются по формуле (2.2), в которой $a_{ij} = -\delta_{ij}$ — матрица отражения:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} = \\ = (-\delta_{i_1 j_1})(-\delta_{i_2 j_2}) \dots (-\delta_{i_n j_n}) T_{j_1 j_2 \dots j_n} = (-1)^n T_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (3.10)$$

Имеются, однако, объекты, преобразующиеся при преобразованиях вращения как тензоры, а при преобразованиях отражения приобретающие знак, противоположный знаку истинного тензора (3.10) такого же ранга. Такие объекты называются псевдотензорами.

Рассмотрим все тот же символ Леви-Чивита ϵ_{ijk} . Перепишем основную формулу теории детерминантов в виде:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = |a|^{-1} a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} \epsilon_{ijk}. \quad (3.11)$$

Если a — это матрица отражения, то $|a|=-1$, и мы получаем $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = (-1) a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} \epsilon_{ijk} = (-1)(-\delta_{\alpha i})(-\delta_{\beta j})(-\delta_{\gamma k}) \epsilon_{ijk} = (-1)^{3+1} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Так что, интерпретируя (3.11) как закон преобразования в отраженную систему координат: $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = |a|^{-1} a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} \epsilon_{ijk} = (-1)^{3+1} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, приходим к выводу, что ϵ_{ijk} является

²⁴ Например, скорость $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$, импульс $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, сила $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{r}''/dt^2$, электрическое поле \vec{E} .

псевдотензором третьего ранга²⁵, его знак при отражении не меняется в отличие от случая истинного тензора третьего ранга.

Векторное произведение двух истинных векторов \vec{A} и \vec{B} является псевдотензором первого ранга, т.е. псевдовектором, так как при отражении системы координат $A_j \rightarrow -A_j$, $B_k \rightarrow -B_k$, $C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \rightarrow C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$.

Псевдотензоры, в частности аксиальные (осевые) векторы, часто встречаются в физике потому, что они возникают при описании процессов, связанных с вращением. Например, угловая скорость $\vec{\omega}$, момент импульса $\vec{i} = \vec{r} \times \vec{p}$, момент силы $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, магнитное поле \vec{H} . В правой системе координат вектором $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ характеризуется вращение, которое связано с правилом буравчика (правилом правой руки). В левой, отраженной, системе это вращение становится левым (рис.10).

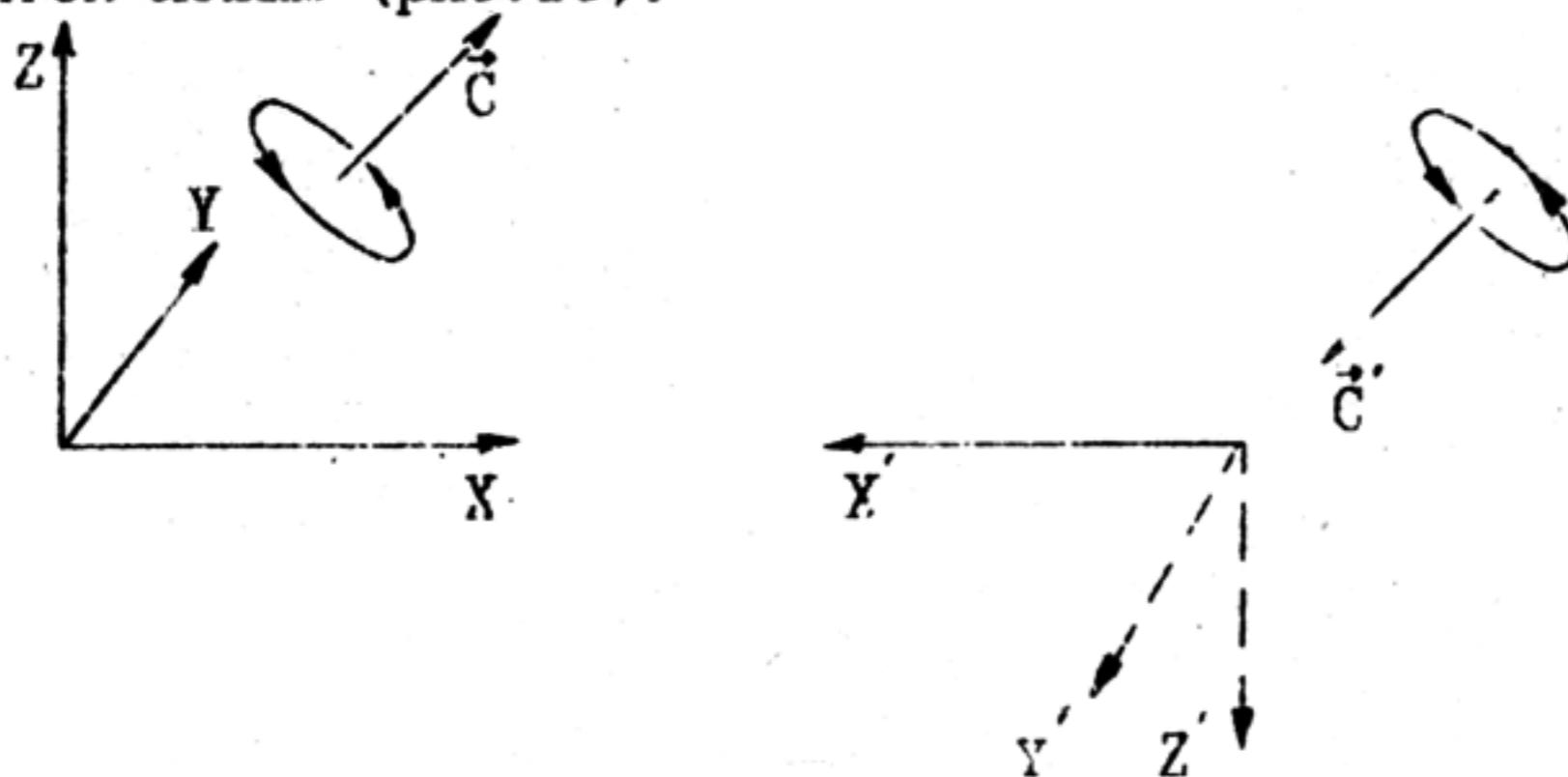


Рис. 10. Преобразование аксиального вектора при отражении декартовой системы координат

Смешанное произведение трех истинных векторов, конечно, будет псевдоскаляром: $\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \rightarrow \vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = -\epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$. Вообще, псевдотензор n -го ранга преобразуется при отражении по формуле $P_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^{n+1} P_{i'_1 i'_2 \dots i'_n}$.

Различие между тензорами и псевдотензорами, которое проявляется при отражении системы координат, необходимо понимать при изучении классической физики; в квантовой же физике оно

²⁵ Такое рассмотрение может показаться несколько искусственным. В общем случае, когда определяется понятие тензора относительно преобразований криволинейных систем координат, вводится понятие относительного тензора и приведенная аргументация становится существенно более убедительной /2,5/.

становится особенно важным в связи с так называемым законом сохранения четности. Экспериментальное открытие нарушения этого закона стало одним из важнейших достижений физики XX в.

В заключение докажем, что матрица чистого вращения имеет детерминант, равный +1 (этим фактом мы воспользовались ранее в формуле /2.20/), а детерминант матрицы, осуществляющей вращение и отражение, равен -1. В самом деле, матрица вращения A может быть параметризована углами Эйлера φ, θ, ψ ; элементы матрицы являются непрерывными функциями этих углов. Детерминант $|A(\varphi, \theta, \psi)|$ — тоже непрерывная функция углов. При этом детерминант матрицы тождественного преобразования

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

равен +1, а так как детерминант ортогональной матрицы равен +1 или -1, то при вращении в силу непрерывности детерминант не может скачком измениться с +1 на -1. И лишь при включении операции отражения, которая определяется матрицей $-\delta_{ij}$ и переводит правую систему координат в левую, детерминант матрицы приобретает знак "-".

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРНЫМИ И СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Скаляры и векторы, встречающиеся в физических задачах, являются обычно функциями точки пространства. Например, температура и плотность какого-нибудь физического тела, потенциал системы зарядов являются скалярными функциями точки пространства; скорость движущейся жидкости, напряженность магнитного поля, сила, действующая на заряд в электрическом поле, — векторные функции точки пространства. Если до сих пор мы обсуждали трансформационные и алгебраические свойства векторов и скаляров, то теперь при рассмотрении скалярных и векторных функций мы можем применить мощный аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Уточним прежде определения скалярного и векторного полей. Пусть $S(P)$ — скалярная функция точки P трехмерного пространства (скалярное поле). Значения $S(P)$ зависят только от точки P и не зависят от системы координат. Определение скалярной функции

навязывает закон изменения вида функции при преобразованиях системы координат. Если в некоторой декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ функция $S(P)$ имеет вид $f(x_1, x_2, x_3)$, то после вращения системы координат

$$y_i = a_{ij}x_j \quad (4.1)$$

она примет вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3)) = \\ &= f(a_{1i}^{-1}y_i, a_{2i}^{-1}y_i, a_{3i}^{-1}y_i) = g(y_1, y_2, y_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Действительно, в новой системе $OY_1Y_2Y_3$ скалярная функция $S(P)$ должна быть выражена в новых независимых переменных y_1, y_2, y_3 , причем так, чтобы ее значение в любой точке пространства P оставалось неизменным. Чтобы удовлетворить это требование, мы должны выразить старые координаты точки P через ее новые координаты: $x_1 = x_1(y_1, y_2, y_3)$, $x_2 = x_2(y_1, y_2, y_3)$, $x_3 = -x_3(y_1, y_2, y_3)$. Это возможно, так как $|a| = 1$, т.е. $|a| \neq 0$. Разрешим (4.1) относительно x_1, x_2, x_3 , умножив это соотношение слева и справа на $a_{\ell i}^{-1}$ и просуммировав по i : $a_{\ell i}^{-1}y_i = a_{\ell i}^{-1}a_{ij}x_j = \delta_{\ell j}x_j = x_\ell$, т.е.

$$x_\ell = a_{\ell i}^{-1}y_i. \quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.3) в функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, получим функцию $g(y_1, y_2, y_3) = f(a_{1i}^{-1}y_i, a_{2i}^{-1}y_i, a_{3i}^{-1}y_i)$, представляющую то же самое скалярное поле $S(P)$ в новой системе координат $OY_1Y_2Y_3$. Преобразование (4.2) называется преобразованием, индуцированным инвариантностью. Следует понимать, что вид функции, представляющей скалярное поле, зависит от того, в какой системе координат мы это поле рассматриваем, но для удобства эту функцию часто обозначают одной и той же буквой для всех систем координат:

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3)) = f(y_1, y_2, y_3).$$

Векторная функция $\vec{V}(P)$ (векторное поле) — это трехкомпонентная величина $V_j(P)$, зависящая от точки пространства P , т.е. при задании векторного поля в каждой точке пространства P задается вектор $\vec{V}(P)$. В фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ векторное поле $\vec{V}(P)$ имеет вид $(V_1(x_1, x_2, x_3), V_2(x_1, x_2, x_3), V_3(x_1, x_2, x_3))$. При вращении системы координат $y_i = a_{ij}x_j$ векторное поле \vec{V} преобразуется по векторному закону

$$V'_i(y_1, y_2, y_3) = a_{ij} V_j(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3)), \quad (4.4)$$

где $x_1 = a_{1i}^{-1} y_i$, $x_2 = a_{2i}^{-1} y_i$, $x_3 = a_{3i}^{-1} y_i$. Закон преобразования (4.4) аналогичен закону преобразования вектора (1.15) и отражает наше геометрическое представление о векторе как о направленном отрезке, который остается неизменным при вращении системы координат, в то время как его компоненты изменяются. Важно отметить, что и координаты точки P, в которой задан вектор, надо выразить через новые переменные согласно соотношениям (4.3).

Из скалярного поля $\varphi(P)$ можно весьма естественным образом сконструировать векторное поле с помощью дифференциальных операторов частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Рассмотрим набор частных производных от скалярной функции $\varphi(P)$ в системе координат $Ox_1 x_2 x_3$:

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$$

Докажем, что эта трехкомпонентная величина является векторным полем. В самом деле, если $y_i = a_{ij} x_j$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3))}{\partial y_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ &= a_{ji}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = a_{ji}^T \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = a_{ij} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь использованы соотношения $x_j = a_{j\ell}^{-1} y_\ell$ и

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} a_{j\ell}^{-1} y_\ell = a_{j\ell}^{-1} \frac{\partial y_\ell}{\partial y_i} = a_{j\ell}^{-1} \delta_{\ell i}^{26} = a_{ji}^{-1}, \text{ а также } a^{-1} = a^T$$

Как видно из (4.5), набор частных производных преобразуется по закону (4.4) и, следовательно, является векторным полем. Полученное векторное поле называется градиентом φ (от лат. *gradiens*, род.п. *gradientis* – шагающий) и обозначается $\nabla \varphi$.

Удобно ввести оператор “набла” (от греч. *иавла* – арфа, форма которой напоминает символ ∇)²⁷: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{i}_3$ (оператор Гамильтона). Градиент φ есть результат действия оператора ∇ на функцию φ , т.е. $\nabla \varphi$. Оператор ∇ – дифференциальный

²⁶ Очевидно равенство $\frac{\partial y_\ell}{\partial y_i} = \delta_{\ell i}$ мы будем неоднократно использовать в далее.

²⁷ Оператор и его обозначение введен У.Гамильтоном (1853), название “набла” дал О.Хэвисайд (1892).

оператор, но в то же время он обладает векторными свойствами:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} = g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где подразумевается, что левая и правая части равенства действуют на скалярную функцию φ (см. /4.5/).

Геометрический смысл градиента выясняется при рассмотрении скалярного произведения $\nabla\varphi$, вычисленного в точке P , и бесконечно малого вектора перемещения $d\vec{r}$ (рис. II):

$$\nabla\varphi d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = d\varphi.$$

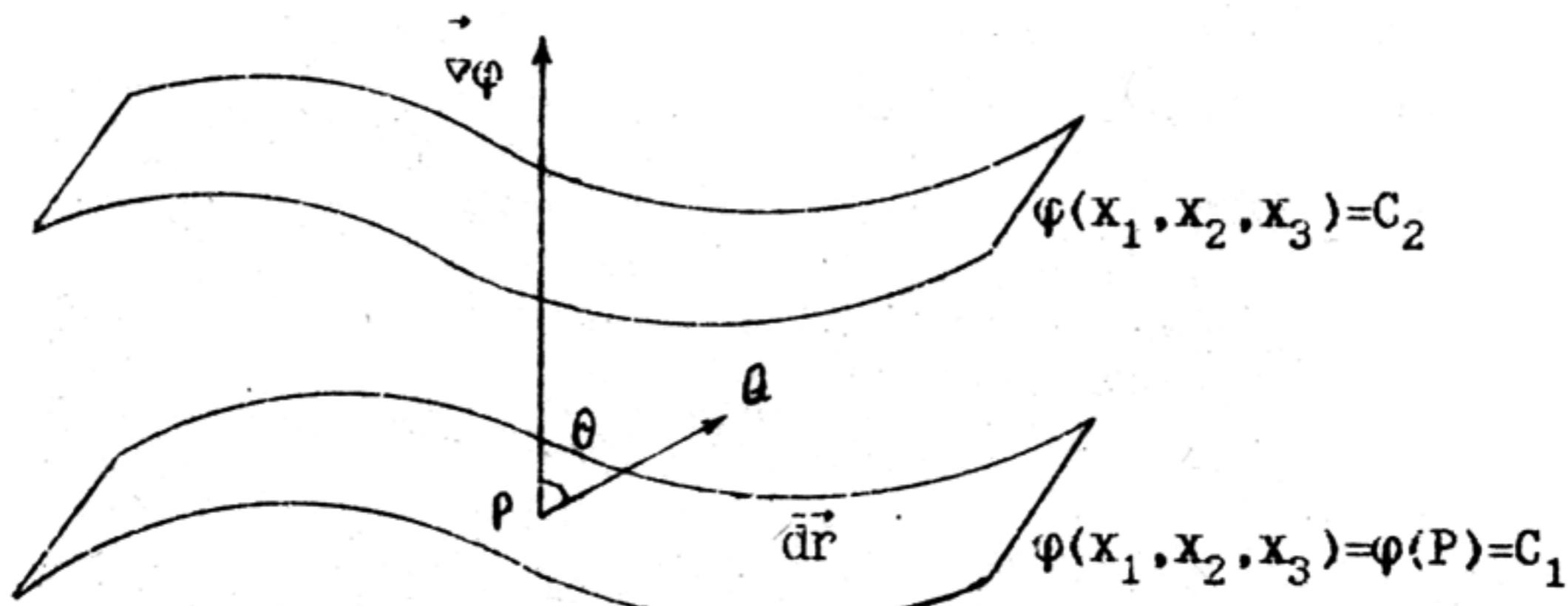


Рис. II. К обсуждению геометрического смысла градиента

Оно оказывается равным дифференциалу $d\varphi$. Так что $d\varphi = \nabla\varphi d\vec{r}$ – это изменение²⁸ функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ при переходе из точки P в точку Q (рис. II), т.е.

$$\varphi(Q) - \varphi(P) = \Delta\varphi = d\varphi = \nabla\varphi d\vec{r} = |\nabla\varphi| |d\vec{r}| \cos \theta, \quad (4.6)$$

где θ – угол между $\nabla\varphi$ и $d\vec{r}$. Фиксируем $|d\vec{r}|$; тогда согласно (4.6), если $d\vec{r}$ параллелен $\nabla\varphi$ ($\theta=0$), $d\varphi$ принимает максимальное значение, а его модуль $|\nabla\varphi|$ равен $d\varphi_{\max}/|d\vec{r}|$ – скорости возрастания функции в этом направлении. В случае, когда $d\vec{r}$ перпендикулярен $\nabla\varphi$ ($\theta=\pi/2$), дифференциал φ равен нулю, т.е., если мы “холим” с точкой Q в

²⁸ Точнее, главная часть приращения в соответствии с определением дифференциала.

направлении, перпендикулярном $\nabla\phi$, то $d\phi=0$ или $\phi(Q) = \phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(P) = \text{const}$. Уравнение $\phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ задает в трёхмерном пространстве поверхность, называемую поверхностью уровня (если ϕ имеет смысл потенциала, это эквипотенциальная поверхность). Таким образом, градиент перпендикулярен поверхности уровня. На рис. II для наглядности изображены две поверхности уровня.

Докажем теперь формулу для вычисления градиента от произведения двух скалярных функций

$$\nabla(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = v \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial v}{\partial x_i} = v \nabla u + u \nabla v.$$

Вычисление, конечно, нужно проводить в компонентах. В первом равенстве от векторной записи $\nabla(uv)$ мы перешли к покомпонентной $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)$, затем провели дифференцирование и, наконец, в последнем равенстве мы от покомпонентной формы вернулись к векторным обозначениям.

Вычислим градиент модуля радиуса-вектора, т.е. скалярного поля

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1 x_1}, \\ \nabla r &\equiv \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{x_1 x_1}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_1}} \frac{\partial x_1 x_1}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} x_1 \right) \\ &= \frac{1}{2r} (x_1 \delta_{1i} + \delta_{1i} x_1) = \frac{1}{2r} (x_i + x_i) = \frac{x_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r}.\end{aligned}$$

Результат вычислений²⁹ $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ соответствует нашему пониманию геометрического смысла градиента: градиент сферически-симметричного скалярного поля $\phi(\vec{r})=r$, поверхности уровня которого — сферы, оказывается равным вектору нормали к сфере $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$ в каждой точке пространства.

Вычислим также градиент произвольного сферически-симметричного скалярного поля $\phi(r)$:

²⁹ Мы будем часто использовать соотношение $\partial r / \partial x_i = x_i / r$ дальнейшем.

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{x_i}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\hat{r}}{r}.$$

В частности,

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{d(1/r)}{dr} \frac{\hat{r}}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\hat{r}}{r}.$$

Векторный дифференциальный оператор ∇ можно использовать для определения дифференциальных операций с векторными полями. скалярное произведение оператора ∇ и векторного поля \vec{A} дает скалярное поле, называемое дивергенцией (от латин. *divergentia* – расхождение):

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Скалярный характер этого выражения гарантирует теорема о свертке:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Для выяснения физического смысла дивергенции векторного поля рассмотрим стационарное движение сжимаемой жидкости. Это движение определяется плотностью потока $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где $\vec{v}(x, y, z)$ – векторное поле скоростей жидкости, а $\rho(x, y, z)$ – плотность жидкости в данной точке (x, y, z) . Подсчитаем баланс количества жидкости в бесконечно малом прямоугольном параллелепипеде с ребрами dx, dy, dz (рис. 12), т.е.

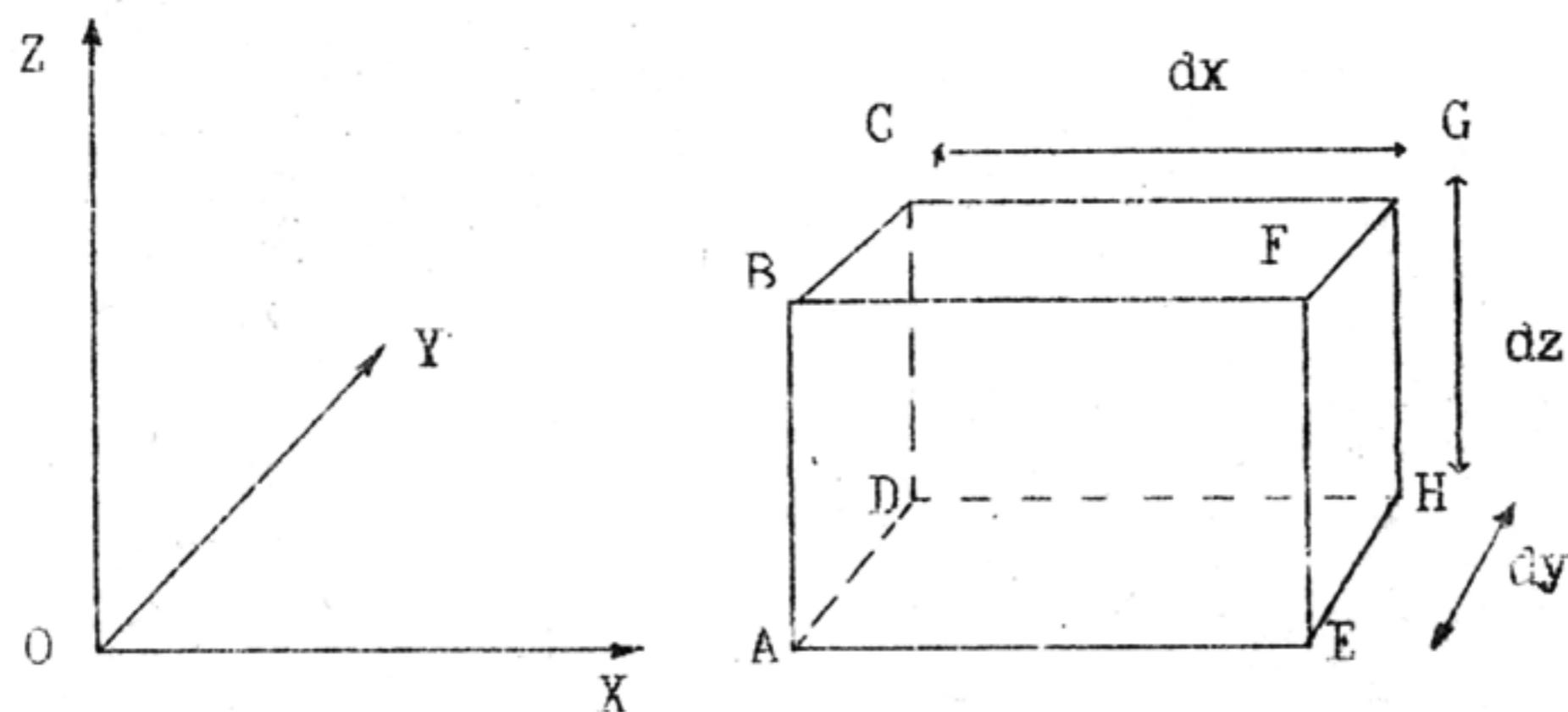


Рис. 12. К обсуждению физического смысла дивергенции
разница между количеством вытекающей и втекающей жидкости. Через грани ABCD за единицу времени втекает количество жидкости, равное

$\rho V_x dy dz$, через грань EFGH вытекает $(\rho V_x + \frac{\partial \rho V}{\partial x} dx) dy dz$ жидкости³⁰.

Разность этих двух величин показывает, сколько жидкости добавилось после прохождения через параллелепипед. Найдем количество дополнительной жидкости, вытекающей в единицу времени через все грани:

$$\left[\frac{\partial \rho V}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho V}{\partial z} \right] dx dy dz = \operatorname{div} \rho V dv. \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что дивергенция $\vec{j} = \rho \vec{V}$ имеет смысл плотности источников поля \vec{j} . Действительно, если в бесконечно малом объеме dv $\operatorname{div} \vec{j} > 0$, то в нем имеется источник жидкости мощностью $\operatorname{div} \vec{j} dv$; в случае $\operatorname{div} \vec{j} < 0$ – соответственно отрицательный источник или сток. Поле без источников удовлетворяет соотношению $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Такая терминология применяется для любого векторного поля \vec{A} , и $\operatorname{div} \vec{A}$ – это плотность источников векторного поля.

Порядок вычислений с дивергенцией такой же, как с градиентом. Например:

$$\operatorname{div} (f \vec{A}) = \frac{\partial f A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} A_i + f \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = (\vec{A} \vec{\nabla} f) + f (\vec{\nabla} \vec{A}) = (\vec{A} \operatorname{grad} f) + f \operatorname{div} \vec{A}. \quad (4.8)$$

Найдем для примера также дивергенцию кулоновского поля $\frac{\vec{r}}{r^3}$:

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r^3} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \frac{1}{r^3} + x_i \frac{\partial (1/r^3)}{\partial x_i} = \frac{3}{r^3} + x_i (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} x_i \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} \frac{r^2}{r} = 0. \quad (4.9)$$

Итак, $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$, кулоновское поле – это поле без источников (4.9) справедливо при $r \neq 0$; в начале координат имеется источник, но он требует особого рассмотрения, так как поле при $r=0$ имеет расходимость).

Еще одна естественно возникающая дифференциальная операция векторного анализа – это векторное произведение оператора $\vec{\nabla}$ и век-

³⁰ Разложение $\rho V_x(x, y, z)$ в ряд Тейлора в точке A имеет вид:
 $\rho V_x(x_A + dx, y_A, z_A) = \rho V_x(x_A, y_A, z_A) + \frac{\partial \rho V_x(x_A, y_A, z_A)}{\partial x} dx + \dots$

торного поля \vec{A} . Полученное таким образом векторное поле $\nabla \times \vec{A}$ называется ротором³¹ (от лат. rotor - вращаю/сь/) или вихрем векторного поля \vec{A} :

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

или

$$\text{rot } \vec{A} = (\text{rot } \vec{A})_i = (\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

Векторный характер выражения (4.10) обеспечивает теорема сверху.

Физический смысл ротора выясняется с помощью известного интегрального соотношения векторного анализа³² - теоремы Стокса (см. § 6). Однако некоторое указание можно получить из следующего примера. Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, определяемой единичным вектором $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$ (рис. I3). Поле линейных скоростей тела имеет вид $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

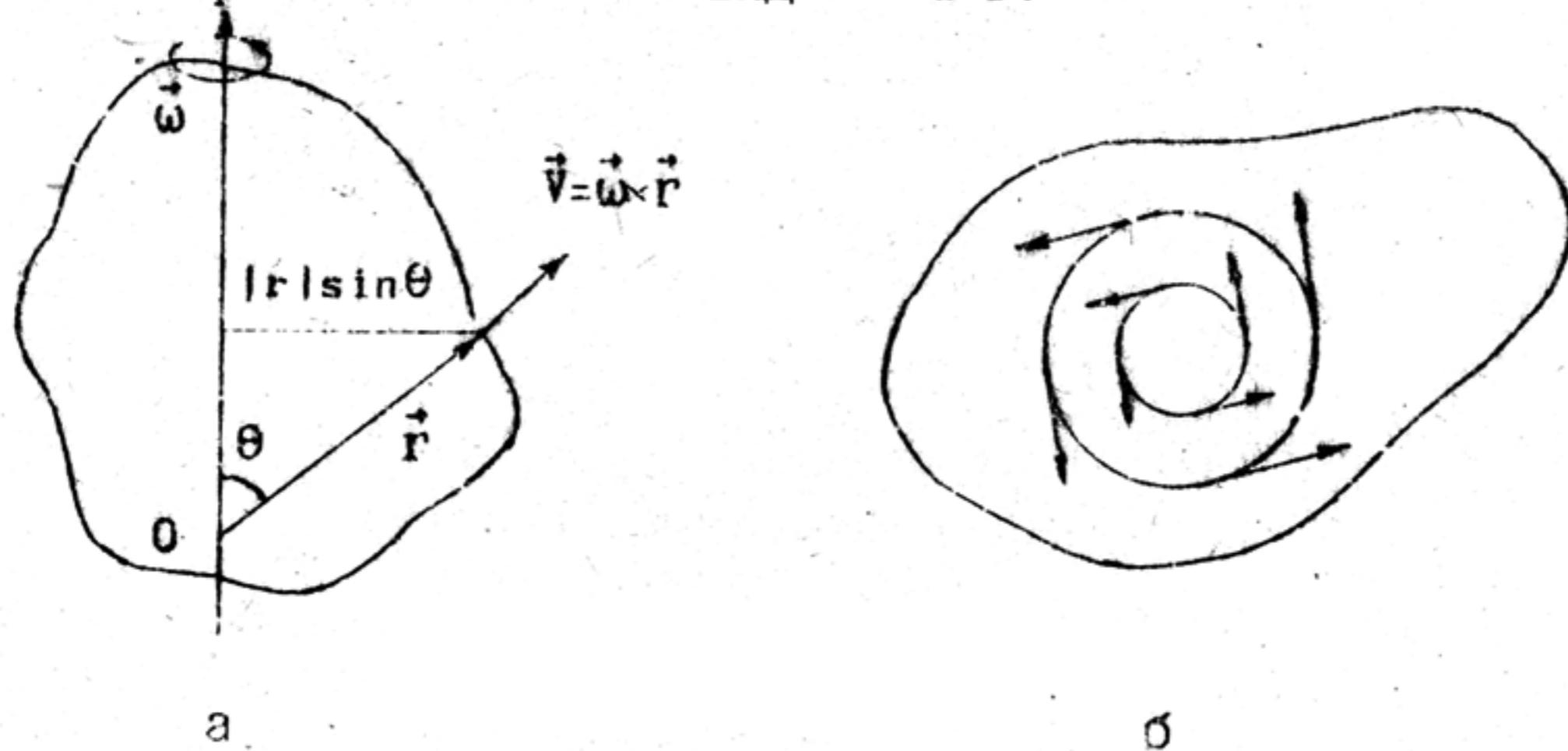


Рис. I3. Поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$:
а - вид сбоку; б - вид сверху

Действительно, $|V| = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin \theta$, причем $|\vec{r}| \sin \theta$ – расстояние от оси вращения до точки с радиусом-вектором \vec{r} ; направление вектора \vec{V} определяется по правилу буравчика.

³¹ Обозначение rot применял Дж.Максвелл (1855).

Вычислим ротор поля скоростей \vec{V} :

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{V} &= \text{rot } (\vec{\omega} \times \vec{r}) = [\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r})]_i = [\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_i = \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \omega_l x_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lkm} \omega_l \frac{\partial x_m}{\partial x_j} \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \omega_l \delta_{mj} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}) \omega_l \delta_{mj} = \\
 &= (\delta_{il} \delta_{mm} - \delta_{ml} \delta_{im}) \omega_l = (3\delta_{il} - \delta_{il}) \omega_l = \\
 &= 2\delta_{il} \omega_l = 2\omega_i = 2\vec{\omega}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь константы ϵ_{lkm} и ω_l вынесены из-под знака дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и использованы известные нам простые соотношения $\frac{\partial x_m}{\partial x_j} = \delta_{mj}$, $\delta_{ll} = 3$. Оказывается, что ротор поля скоростей $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ равен удвоенной угловой скорости вращения $2\vec{\omega}$.

Для тренировки докажем несколько формул векторного анализа.

$$\begin{aligned}
 \text{rot } f \vec{A} &= (\nabla \times f \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} f A_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_j} A_k + \epsilon_{ijk} f \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \\
 &= (\nabla f \times \vec{A})_i + f (\nabla \times \vec{A})_i = \text{grad } f \times \vec{A} + f \text{rot } \vec{A}. \\
 \text{rot grad } \varphi &= [\nabla \times (\nabla \varphi)]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \varphi)_k = \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Здесь $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$ — симметричный тензор второго ранга (так как из

математического анализа известно, что смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$ равны) и, конечно, свертка $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$ с антисимметричным тензором ϵ_{ijk} дает нуль.

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{A} \times \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} B_k + \epsilon_{ijk} A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_i} = \\
 &= B_k \epsilon_{kij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_j \epsilon_{jik} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} = B_k (\text{rot } A)_i - A_j (\text{rot } B)_j = \\
 &= \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B},
 \end{aligned}$$

где использованы соотношения $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ и $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} (\vec{A} \times \vec{B}) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} A_l B_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_l B_m) = \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_l B_m) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j} (A_l B_m) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} A_i B_j - \frac{\partial}{\partial x_j} A_j B_i = B_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_i + A_i \frac{\partial}{\partial x_j} B_j - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\vec{B} \cdot \nabla$ — дифференциальный скалярный оператор $B_j \frac{\partial}{\partial x_j} = B_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$
 $+ B_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$; разумеется, $(\vec{B} \cdot \nabla) \neq (\nabla \cdot \vec{B})$.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= [\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m = \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} = \\
 &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_l \partial x_j} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — дифференциальный скалярный оператор Лапласа. Он часто обозначается через $\Delta \equiv \nabla^2$ и называется лапласианом.

Проведенное в этом параграфе обсуждение позволяет оценить синтаксу применения методов дифференциального исчисления в векторном анализе. Теперь перейдем к применению интегрального исчисления для рассмотрения свойств векторных и скалярных полей.

3.5. КРИВОЛИНИЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА. ФОРМУЛА ГЛУССА

Интегрирование в данном параграфе обзор различных типов интегралов следует рассматривать как краткое сведение, которое

позволяет "почувствовать" соответствующие определения интегралов на физическом уровне строгости и сразу перейти к практическим применением интегральных соотношений векторного анализа. Строгие определения и многочисленные подробности содержатся в известных курсах математического анализа /6-II/.

Основное соотношение интегрального исчисления – формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

связывает интегральное и дифференциальное исчисления и сводит вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, который имеет геометрический смысл площади под кривой $y = f(x)$ в пределах от a до b , к нахождению первообразной функции $F(x)$ ($dF(x)/dx = f(x)$).

Эта площадь (т.е. $\int_a^b f(x)dx$) может быть определена как предел сумм Римана:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mu_i) \Delta x_i, \quad (5.1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_i, x_{i-1}]$ разбиения $[a, b]$; $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$, $\mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Если рассматривать функцию двух переменных $f(x, y)$, то можно определить объект, аналогичный однократному определенному интегралу, – двойной интеграл:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum f(\mu_i, \sigma_i) \Delta S_i, \quad (5.2)$$

где D – область на плоскости (x, y) , ограниченная кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (рис. I.4). Предел берется по все более мелким разбиениям области D ; ΔS_i – площадь i -го куска из разбиения, (μ_i, σ_i) – некоторая произвольная точка этого куска. Как и в случае однократного интеграла (5.1), известно, что для непрерывных функций предел (5.2) существует. Геометрический смысл двойного интеграла, как видно из определения и рис. I.4, – это объем тела ("торта"), ограниченного сверху областью D , сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и цилиндрической криволинейной поверхностью, образующие линии которой перпендикулярны плоскости (x, y) и проходят по границе области D . Двойной интеграл может быть вычислен посредством сведения к повторному:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy. \quad (5.3)$$

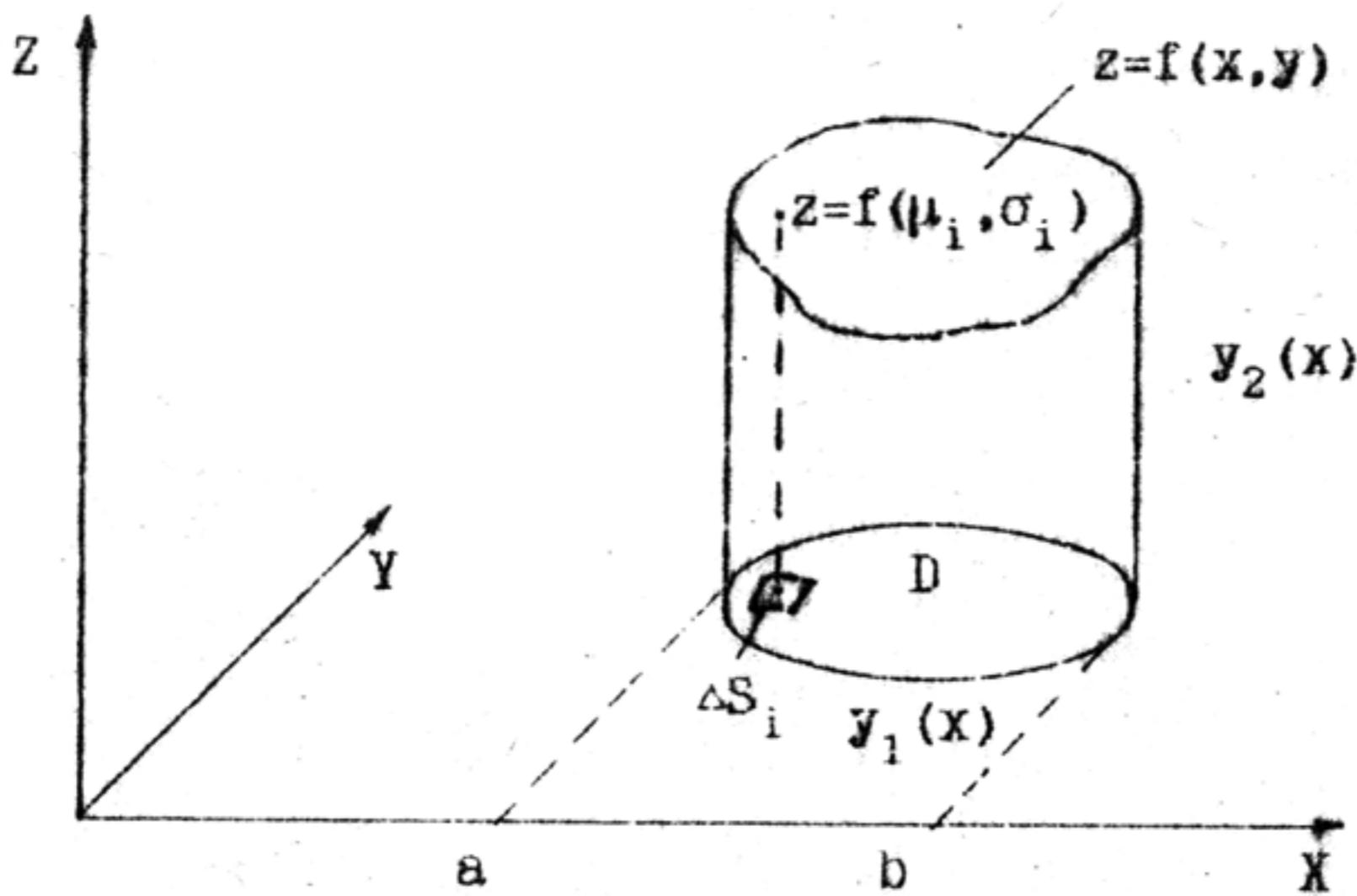


Рис. I4. Геометрическая интерпретация двойного интеграла

Соотношение (5.3) становится очевидным, если учесть, что $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$ – это объем, вырезанный из "торта" на рис. I4 плоскостями $x = \text{const}$ и $x+dx = \text{const}$.

Наконец, для функции трех переменных $f(x,y,z)$ тройной интеграл определяется как

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_V f(x,y,z) dV = \lim_{\substack{\rightarrow \\ V}} \sum F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

где V – область (объем) в трехмерном пространстве; предел берется по все более мелким разбиениям этой области. Если $f(x,y,z)$ описывает неоднородную плотность тела V , то тройной интеграл – это его масса. Тройной интеграл также сводится к повторному:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz,$$

где $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ – поверхности, ограничивающие объем V ; $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – кривые, ограничивающие область V , являющиеся проекцией V на плоскость (x,y) .

Перейдем теперь к обсуждению двух важнейших типов интегралов, применяемых в векторном анализе – криволинейного интеграла второго рода и поверхностного интеграла второго рода.

Пусть заданы векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ и кривая (контуры) L (рис. 15).

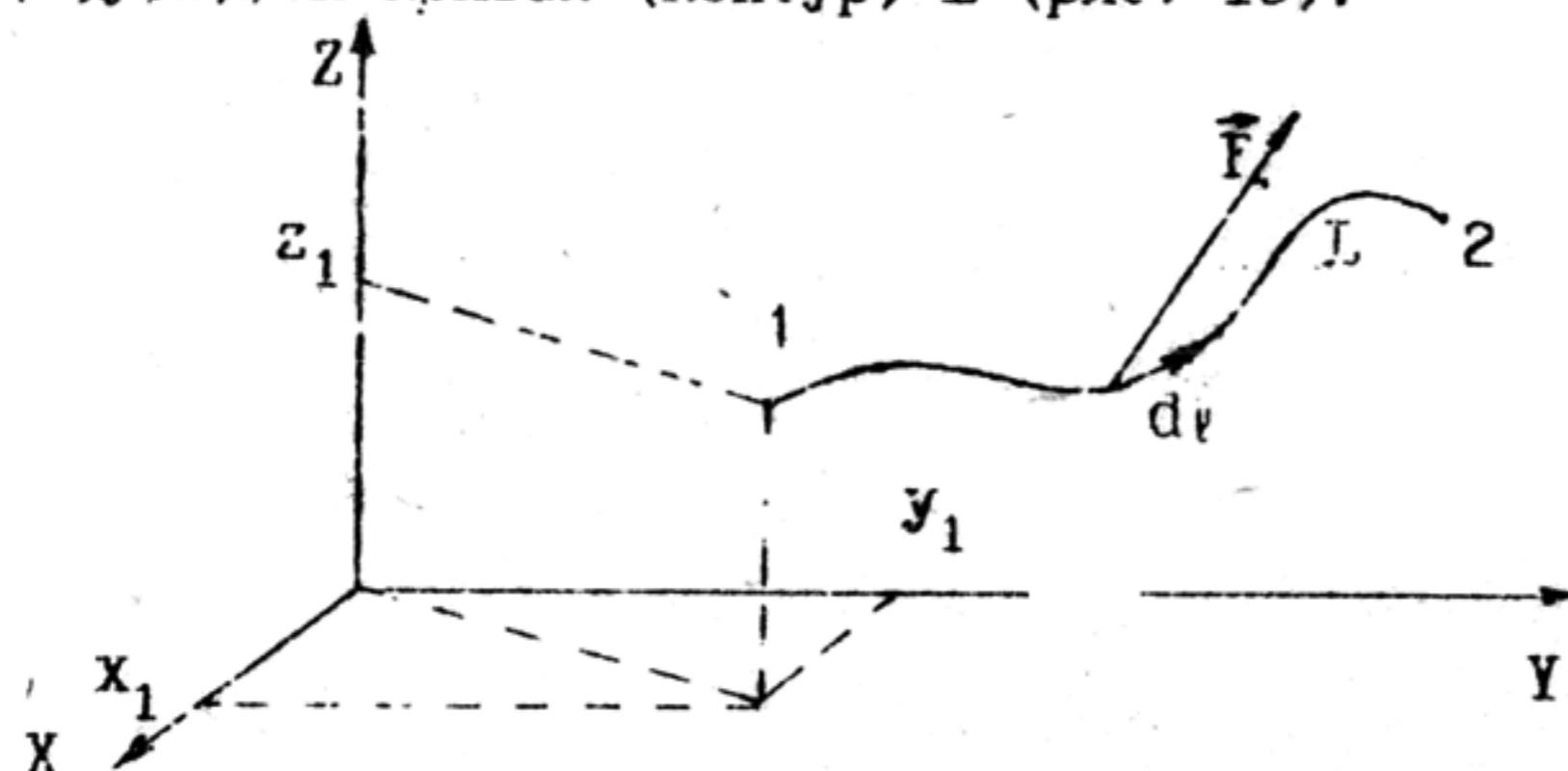


Рис. 15. К определению криволинейного интеграла

Будем считать \vec{F} полем сил, действующих на некоторое тело исчезающие малых размеров (материальную точку). Подсчитаем работу по перемещению тела по контуру L от точки 1 до точки 2. Для этого разобьем контур L на достаточно мелкие части; любая i -я часть в силу малости практически совпадает с отрезком, который мы обозначим через $\Delta \vec{r}_i$ (направление этого вектора совпадает с направлением перемещения по контуру). Тогда суммарная работа с хорошей степенью точности записывается как

$$A \approx \sum \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta \vec{r}_i,$$

где (x_i, y_i, z_i) – точка, принадлежащая $\Delta \vec{r}_i$, а скалярное произведение $\vec{F} \Delta \vec{r}_i = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}_i| \cos(\vec{F}, \Delta \vec{r}_i)$ – это работа по перемещению тела на $\Delta \vec{r}_i$. Для точного определения работы, конечно, надо взять предел по все более мелким разбиениям: $\max |\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0$. Этот предел существует для непрерывных функций \vec{F} (и кусочно-гладких контуров L) и называется криволинейным интегралом второго рода:

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \lim_{\max |\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta \vec{r}_i. \quad (5.4)$$

Для того, чтобы вычислить этот интеграл, кроме векторного поля \vec{F} следует задать контур L . Кривая L обычно задается в параметрическом виде:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2, \quad (5.5)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - дифференцируемые функции параметра t . Например, функции $x = a \cos 2\pi t$, $y = a \sin 2\pi t$, $z = ht$, $-\infty < t < \infty$, задают бесконечную винтовую линию с радиусом a и шагом h .

Если контур задан выражениями (5.5), криволинейный интеграл (5.4) легко сводится к однократному:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{F} d\vec{l} &= \int_L F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + \\ &\quad F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt}] dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Если контур, по которому ведется интегрирование, замкнут, то такой интеграл по замкнутому контуру $\oint_L \vec{F} d\vec{l}$ называется также циркуляцией векторного поля \vec{F} по контуру L .

Может случиться так, что выражение под интегралом в (5.6) окажется полным дифференциалом некоторой функции трех переменных $U(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz &= dU(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \end{aligned}$$

т.е.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Подробнее такая возможность обсуждается в §7. А здесь, как видно из (5.6), можно сказать, что интеграл $\oint_L \vec{F} d\vec{l}$ берется в этом случае элементарно:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{F} d\vec{l} &= \int_L F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_L \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(x(t_2), y(t_2), z(t_2)) - U(x(t_1), y(t_1), z(t_1)), \end{aligned} \quad (5.7)$$

и просто равен разности значений функции $U(x, y, z)$ в конечной и начальной точках контура (аналогично формуле Ньютона - Лейбница для однократного интеграла).

Ясно также, что циркуляция векторного поля \vec{F} по любому замкнутому контуру в этом случае равна нулю.

Для получения основных интегральных соотношений векторного анализа необходимо ввести еще один тип интеграла – поверхностный интеграл второго рода. Прибегнем спать к наглядной физической аналогии. Пусть векторное поле $\vec{v}(x, y, z)$ – это поле скоростей несжимаемой жидкости плотности ρ . Подсчитаем количество жидкости, проходящей в единицу времени через некоторую поверхность S . Рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности площади dS . Пусть \hat{n} – нормаль к нему, тогда $v_n = \vec{v} \cdot \hat{n}$ – нормальная компонента скорости, которая переносит жидкость через элемент dS . Ясно, что в единицу времени через dS пройдет объем жидкости, равный $v_n dS$, т.е. масса $\rho v_n dS$ (рис. I6). Векторное поле $j = \rho \vec{v}$ – это плотность потока жидкости. Суммарная масса жидкости, проходящая через поверхность S в единицу времени, записывается как

$$\iint_S \rho v_n dS = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \iint_S j \hat{n} dS = \iint_S j d\vec{S}, \quad (5.8)$$

где введено обозначение $d\vec{S} = \hat{n} dS$. Векторный элемент поверхности $d\vec{S}$ равен по модулю площади бесконечно малой части поверхности dS , по направлению совпадает с нормалью к ней.

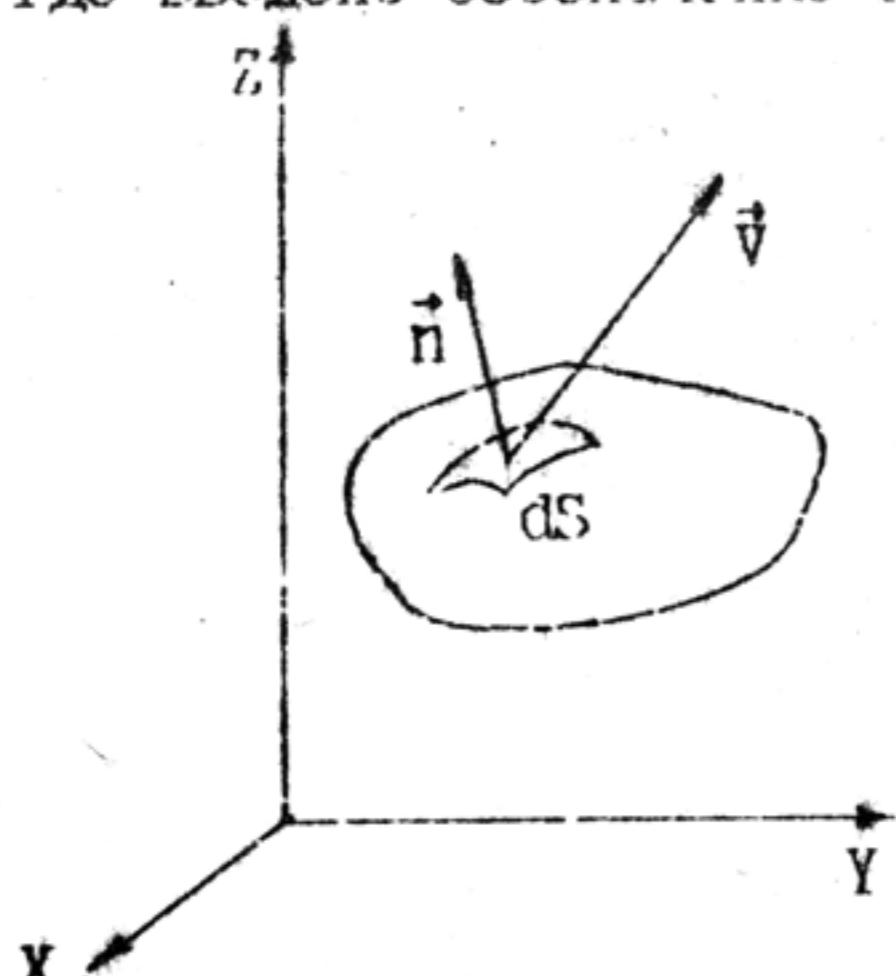


Рис. I6. К определению поверхностного интеграла

Как видно из приведенного рассуждения, поверхностный интеграл второго рода $\iint_S j d\vec{S}$ имеет смысл потока векторного поля через поверхность. Легко дать определение поверхностного интеграла второго рода через предел соответствующих сумм Римана. Этот интеграл существует для любых (непрерывных) векторных полей.

Интеграл (5.8) можно свести к двойному. Для этого запишем его в виде

$$\iint_S j d\vec{S} = \iint_S j_x dS_x + j_y dS_y + j_z dS_z, \quad (5.9)$$

где $dS_z = n_z dS = \cos(\hat{n} \cdot \hat{z}) dS = \cos \alpha dS$; dS_z равен элементу площади поверхности dS , умноженному на косинус угла $\alpha = \hat{n} \cdot \hat{z}$ между направлением \hat{n} и осью z . Так что, как видно из рис. I7, dS_z равен

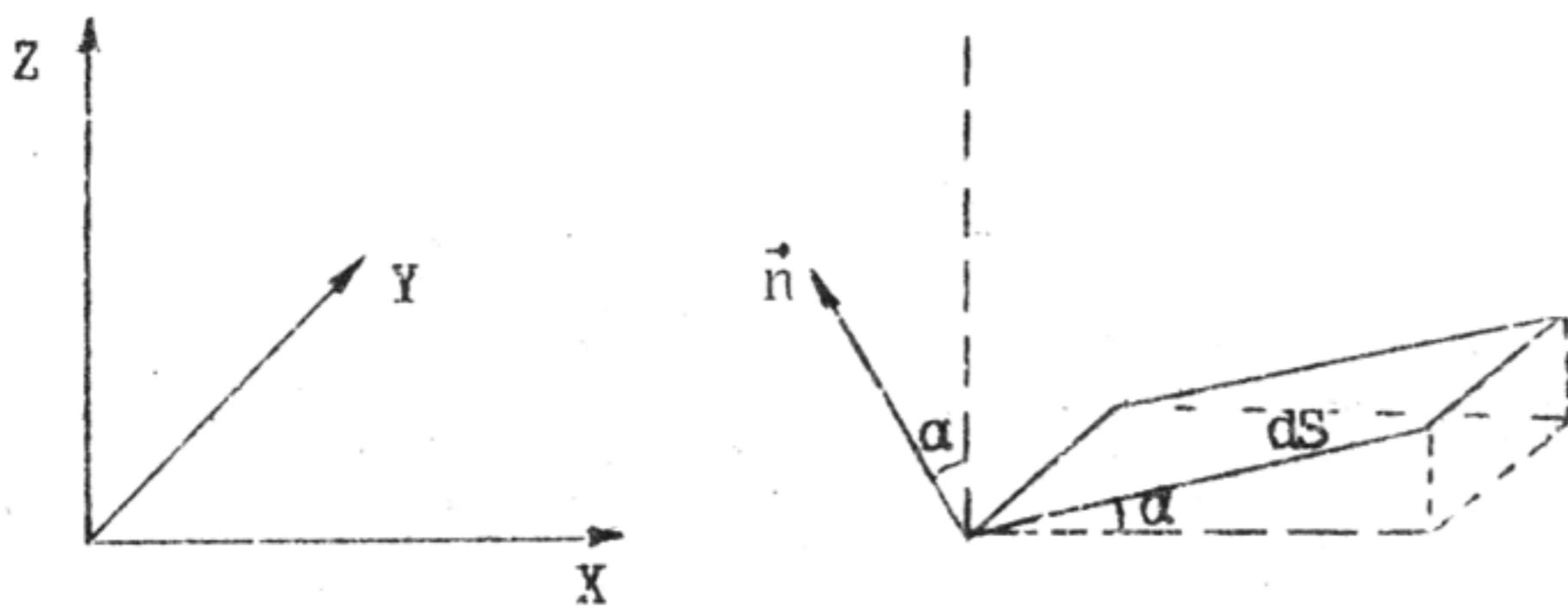


Рис. I7. Иллюстрация к расчету компонент векторного элемента поверхности $d\vec{S}$

площади проекции dS на плоскость (x, y) . Для элемента площади на плоскости (x, y) у нас принято обозначение $dxdy$, поэтому $dS_z = dxdy$. Проводя аналогичные рассуждения для dS_x , dS_y , получаем: $dS_x = dydz$, $dS_y = dx dz$. Поверхностный интеграл (5.9) сводится к сумме трех двойных интегралов:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = \iint_S j_x dS_x + j_y dS_y + j_z dS_z = \iint_{D_1} j_x(x(y, z), y, z) dy dz + \\ + \iint_{D_2} j_y(x, y(x, z), z) dx dz + \iint_{D_3} j_z(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

где D_1, D_2, D_3 - проекции поверхности S на плоскости (y, z) , (x, z) и (x, y) соответственно; $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$ - уравнения поверхности S с "точки зрения" независимых координат (y, z) , (x, z) , (x, y) . Соотношение (5.10) соответствует нашему пониманию $\iint \vec{j} d\vec{S}$ как потока векторного поля через поверхность S . Действительно, j_x интегрируется как раз с проекцией площади dS на плоскость, перпендикулярную к направлению x , т.е. плоскость (y, z) , и т.д.

Теперь легко доказать на физическом уровне строгости одно из основных соотношений векторного анализа - теорему Гаусса. Вспомним физический смысл дивергенции $\operatorname{div} \vec{j}$ (см. /4.7/). Дивергенция плотности потока жидкости $\vec{j} = \rho \vec{v}$ описывает плотность источников \vec{j} , т.е., если взять малый объем dV и умножить его на значение дивергенции \vec{j} в этом объеме, мы получим массу жидкости, производимой в этом объеме и вытекающей через его поверхность в единицу времени³²: $dm = \operatorname{div} \vec{j} dV$.

³² Если $\operatorname{div} \vec{j} > 0$ - масса появляется (источник); если $\operatorname{div} \vec{j} < 0$ - масса исчезает (сток).

Рассмотрим теперь конечный объем V . В единицу времени в нем появляется и вытекает из него масса, равная $\iiint_V \vec{j} dV$. Но вытекающая в единицу времени масса – это как раз и есть поток векторного поля \vec{j} через поверхность S , ограничивающую объем, т.е. $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$ и, следовательно,

$$\iint_V \vec{j} dV = \iint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (5.II)$$

Это и есть теорема Гаусса, которую можно прочесть следующим образом: “Дивергенция векторного поля, проинтегрированная по некоторому объему V , равна потоку этого векторного поля через поверхность, ограничивающую объем”. Конечно, эта теорема справедлива для любых векторных полей и ее содержание никак не зависит от того, что при ее доказательстве была использована наглядная физическая картина движения жидкости. Надо думать, что понимание физического смысла теоремы (5.II) для физика важнее детальных и строгих доказательств, приводимых в руководствах по математическому анализу.

Теорема Гаусса используется в многочисленных физических приложениях. В качестве примера рассмотрена задача о поле равномерно заряженного шара (см. §10).

Соотношение (5.II) позволяет дать еще одно определение дивергенции. Вычислим дивергенцию векторного поля \vec{A} в некоторой точке пространства P следующим образом: заключим рассматриваемую точку в малый объем ΔV , ограниченный поверхностью S . Применим к объему ΔV теорему Гаусса (5.II):

$$\iint_{\Delta V} \vec{j} dV = \iint_S \vec{A} d\vec{S}.$$

Так как $\text{div } \vec{A}$ (непрерывная функция точки пространства) мало меняется в объеме ΔV , ее можно вынести за знак интеграла:

$$\text{div } \vec{A} \iint_{\Delta V} dV = \text{div } \vec{A} \Delta V = \iint_S \vec{A} d\vec{S}. \quad (5.I2)$$

Соотношение (5.I2) тем точнее, чем меньше объем ΔV . Таким образом, стягивая объем к точке P , получаем, что

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (5.I3)$$

Так что $\text{div } \vec{A}$ – это поток векторного поля из се конечно малого

объема, отнесенный к этому объему, т.е. плотность источников поля.

66. ТЕОРЕМА СТОКСА

Следующее важное интегральное соотношение векторного анализа теорема Стокса. Она устанавливает своеобразную связь поверхностного и криволинейного интегралов второго рода.

Заметим прежде всего, что у поверхности имеются две стороны и, соответственно, поле нормалей к поверхности может быть выбрано двумя способами. Поверхности, имеющие две стороны, называются ориентируемыми (патологические случаи односторонних поверхностей типа листа Мебиуса здесь нет необходимости рассматривать). Ориентацию (направление обхода) контура, ограничивающего поверхность, принято выбирать следующим образом: при движении нормали (неправленной в соответствии с выбором поля нормалей) по контуру поверхность должна оставаться слева. На рис. 18 приведены два возможных случая выбора поля нормалей и соответствующего направления обхода контура.

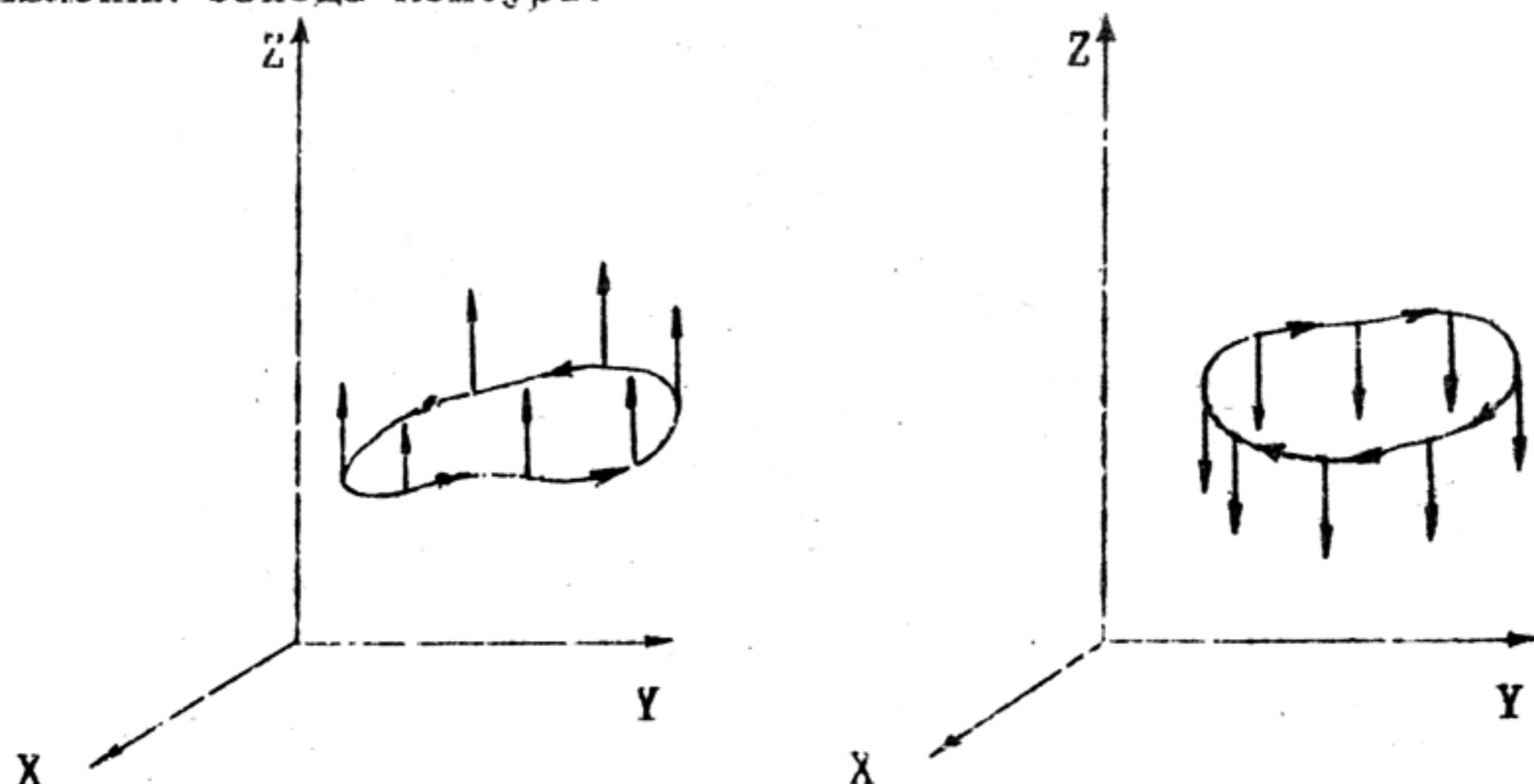


Рис. 18. Выбор поля нормалей и направления обхода контура

Теперь теорема Стокса может быть записан следующим образом:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.1)$$

или, иначе говоря, поток ротора векторного поля через поверхность равен циркуляции поля по контуру, ограничивающему эту поверхность.

Для доказательства формулы (6.1) выберем поле нормалей и направление обхода контура, как показано на рис. I9. Такой выбор

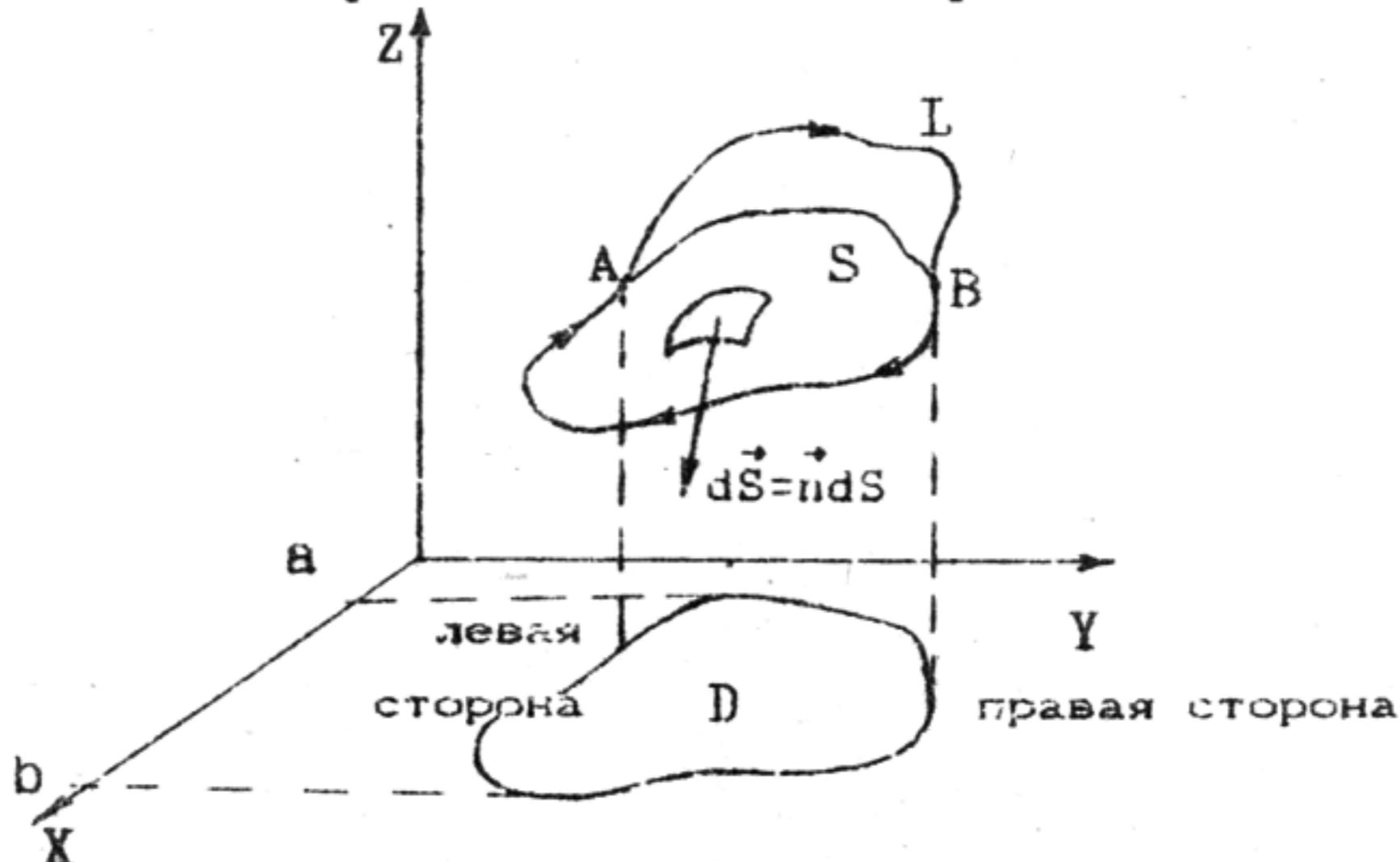


Рис. I9. К доказательству теоремы Стокса

удобен из методических соображений, но, конечно, не является принципиальным для доказательства. Так как нормаль к поверхности направлена "против" оси Z, проекции векторного элемента поверхности $d\vec{S}$ равны:

$$dS_z = n_z dS = \cos(\hat{n} \cdot \hat{z}) dS = -dx dy,$$

$$dS_y = n_y dS = \cos(\hat{n} \cdot \hat{y}) dS = dx dz,$$

$$dS_x = n_x dS = \cos(\hat{n} \cdot \hat{x}) dS = dy dz.$$

Докажем теперь теорему Стокса, последовательно преобразуя левую часть выражения (6.1) в правую:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} &= \iint_S (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S} = \iint_S d\vec{S} (\nabla \times \vec{A}) = \\ &= \iint_S \left| \begin{array}{ccc} dS_x & dS_y & dS_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{array} \right| \cdot \iint_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dS_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dS_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS_z. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В (6.2) использовано выражение смешанного произведения $d\vec{S} (\nabla \times \vec{A})$ через детерминант. Будем далее преобразовывать под интегралом только слагаемые с A_x , заменив остальные слагаемые многоточием:

$$\iint_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dS_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dS_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS_z = \quad (6.3)$$

$$\iint_S \frac{\partial A_x}{\partial x} dS_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} dS_z + \dots = \iint_S \frac{\partial A_x}{\partial z} dx dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy + \dots$$

Следующий момент является принципиальным в доказательстве теоремы Стокса. Разрежем нашу поверхность плоскостью фиксированного x ($x=\text{const}$). Получится некоторая кривая AB на поверхности S (см. рис. I9). Поверхностный интеграл

$$\iint_S \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dx dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy \right] = \iint_S dx \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right]$$

можно рассматривать теперь следующим образом: вначале берется

криволинейный интеграл $\int_A^B \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right]$ по кривой AB (x фиксирано), а затем он умножается на dx и интегрируется по всем возможным x :

$$\iint_S dx \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right] = \int_a^b dx \int_A^B \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right], \quad (6.4)$$

где a и b – минимальное и максимальное возможные значения x (см. рис. I9, область D – проекция поверхности S на плоскость XY). При этом внутренний интеграл в (6.4) легко берется. Так как на AB $x=\text{const}$, т.е. $dx=0$, подынтегральное выражение можно записать в виде:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz = dA_x,$$

т.е. оно является полным дифференциалом от A_x и, значит, криволинейный интеграл в (6.4) равен разности значений A_x в точке B и в точке A (см. /5.7/):

$$\int_a^b dx \int_A^B \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right] = \int_a^b dx \int_A^B dA_x = \int_a^b dx (A_x(B) - A_x(A)). \quad (6.5)$$

В этот момент снято внутреннее интегрирование. Рассмотрим внимательно оставшийся интеграл. В точке B dx равен x -й проекции векторного элемента $d\ell$ контура L , а в точке A знаки dx и $d\ell_x$ противоположны (рис. 20):

$$d\ell_x = dx \text{ (в точке } B), d\ell_x = -dx \text{ (в точке } A).$$

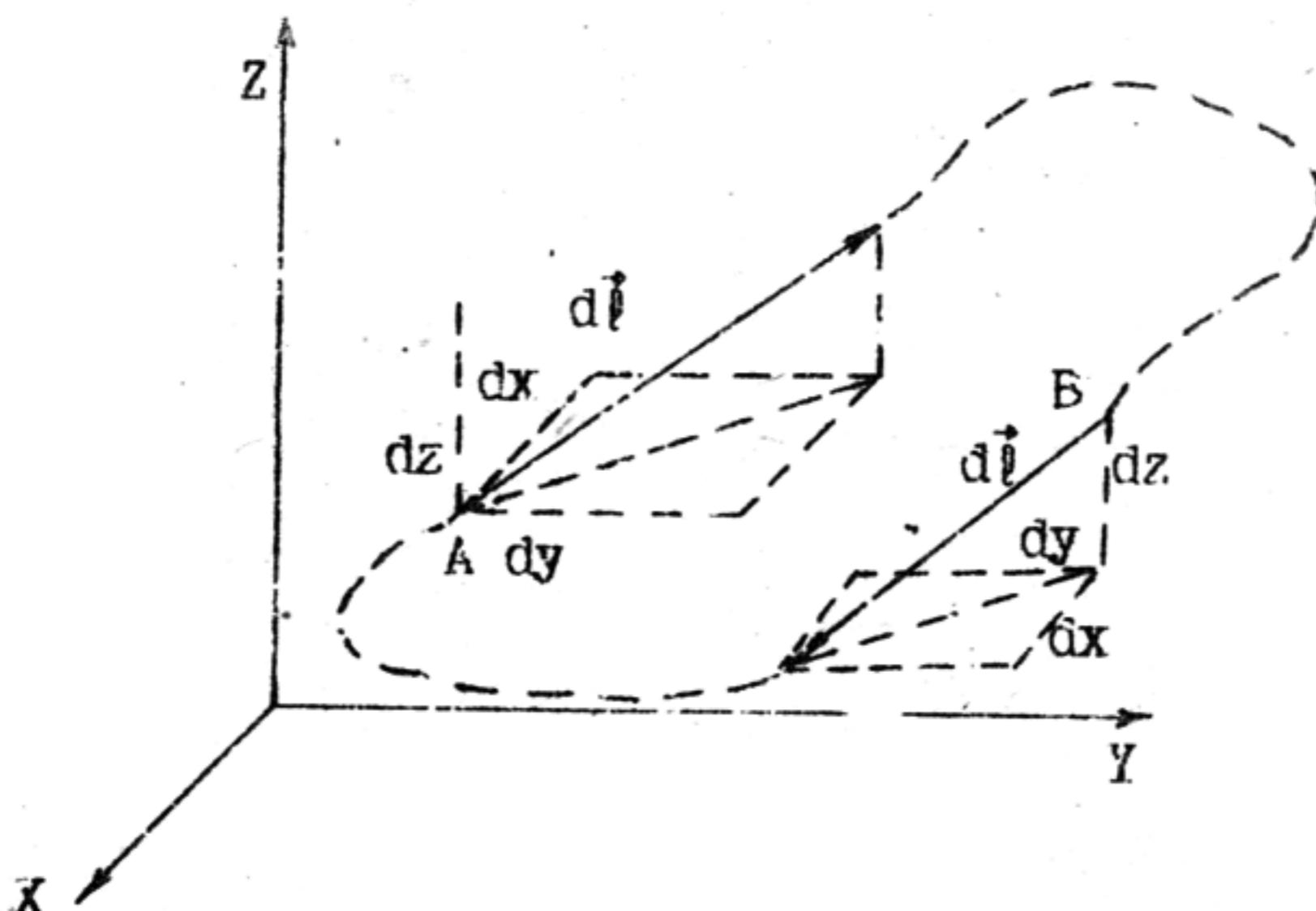


Рис. 20. Проекции векторного элемента контура L в точках A и B

Таким образом, интеграл (6.5) можно записать в виде:

$$\int_a^b dx (A_x(B) - A_x(A)) = \int_a^b A_x(B) dx + \int_a^b A_x(A) (-dx) = \\ = \int_a^b A_x(B) d\ell_x + \int_a^b A_x(A) d\ell_x,$$

где первый интеграл соответствует правой стороне контура, ограничивающего область D на рис. 13, а второй — левой стороне. Учитывая это, естественно объединить оба интеграла в один:

$$\int_a^b d\ell_x A_x(A) + \int_a^b d\ell_x A_x(B) = \oint_L A_x d\ell_x. \quad (6.6)$$

Такое же рассмотрение может быть проведено для компонент A_y и A_z в (6.2), которые заменены в (6.3) многоточием. Результат получается аналогичным (6.6). Таким образом, результат преобразования левой части (6.2) заливается окончательно в виде:

$$\iint_S \vec{A} dS = \oint_L A_x d\ell_x + \oint_L A_y d\ell_y + \oint_L A_z d\ell_z = \\ = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \oint_L \vec{A} d\vec{\ell},$$

что и доказывает теорему Стокса.

В качестве применения теоремы Стокса выясним физический смысл

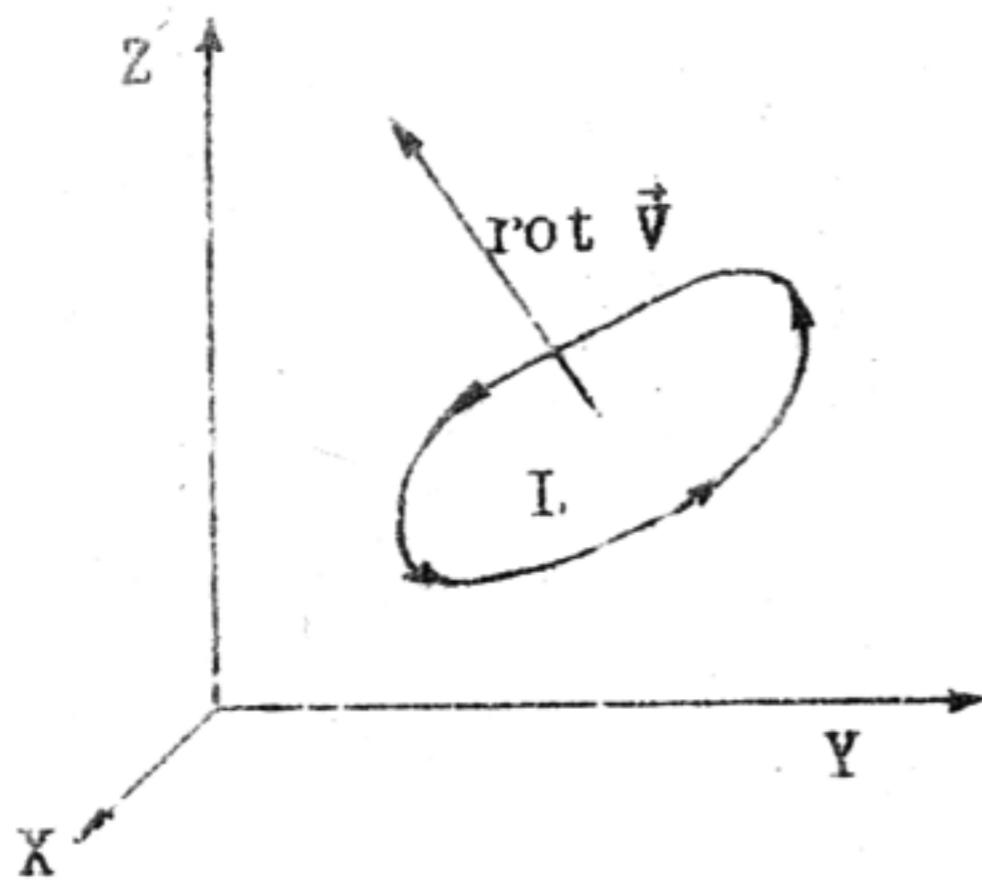


Рис. 21. Ротор векторного поля (к формуле (6.8))

ротора векторного поля. Рассуждение это напоминает вывод соотношения (5.13). Пусть задано векторное поле \vec{V} . Найдем его ротор. В некоторой точке пространства P - это фиксированный вектор. Пусть S - некоторая малая плоская площадка, перпендикулярная $\text{rot } \vec{V}$ и ограниченная контуром L (рис. 21) так, что нормаль к S параллельна $\text{rot } \vec{V}$. Запишем теорему Стокса для площадки S :

$$\iint_S \text{rot } \vec{V} dS = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \hat{n} dS = \iint_S |\text{rot } \vec{V}| dS = \oint_L |\text{rot } \vec{V}| ds = \oint \vec{V} dl.$$

Учитывая, что площадка S мала, а ротор - непрерывная функция и мало на ней меняется, вынесем $|\text{rot } \vec{V}|$ за знак интеграла:

$$\oint_L |\text{rot } \vec{V}| ds = |\text{rot } \vec{V}| \oint L = |\text{rot } \vec{V}| S = \oint \vec{V} dl. \quad (6.7)$$

Соотношение (6.7) тем точнее, чем меньше S , значит

$$|\text{rot } \vec{V}| = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint L}{S}, \quad (6.8)$$

так что ротор - это циркуляция поля \vec{V} по бесконечно малому контуру, отнесеная к площади, охватываемой этим контуром. Соотношения (4.10) и (6.8) являются эквивалентными определениями ротора. Грубо говоря, ротор характеризует вращение векторного поля в точке.

Наглядно можно представить себе следующую картину: пусть \vec{V} - поле скоростей жидкости, площадка S - маленький круг, на контуре L (это окружность) расположены лопасти небольшого гребного винта, вал которого совпадает с направлением $\text{rot } \vec{V}$ (рис. 22). Тогда модуль линейной скорости вращения лопастей винта V_w равен усредненной по окружности проекции скорости жидкости \vec{V} на касательное направление к окружности $d\theta$:

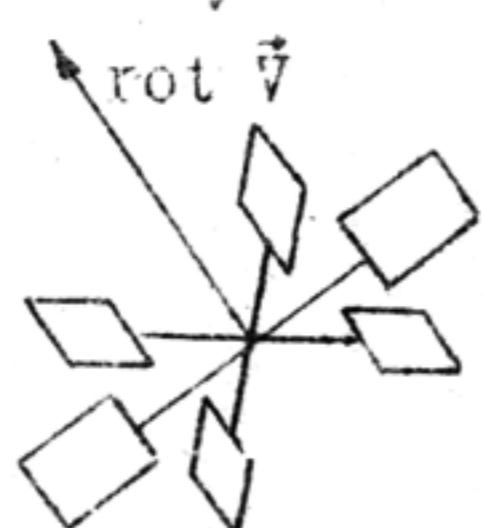


Рис. 22. Гребной винт в движущейся жидкости

$$v_B = \frac{\oint \vec{V} d\vec{l}}{2\pi R},$$

где R - радиус окружности. Из (6.8) получаем:

$$|\operatorname{rot} \vec{V}| = \frac{\oint \vec{V} d\vec{l}}{S} = \frac{2\pi R v_B}{\pi R^2} = \frac{2v_B}{R} = 2\omega_B,$$

так что ротор будет равен удвоенной угловой скорости вращения такого винта, что соответствует результату (4.II).

Интересно заметить: ротор - это всегда поле без источников. Действительно,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_k,$$

но своротка антисимметричного тензора ϵ_{ijk} с симметричным $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, конечно, равна нулю, так как

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_k \quad (6.9)$$

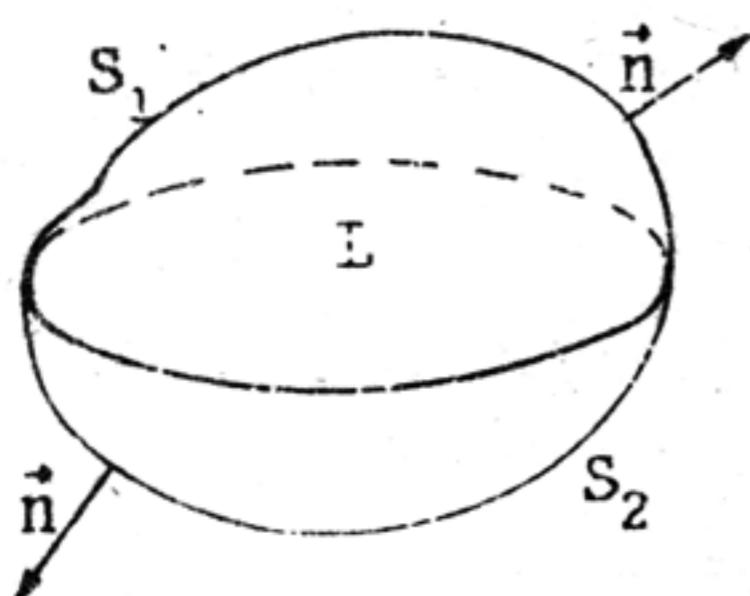


Рис. 23. Поток ротора через замкнутую поверхность

(ср. с /4.12/). Это соответствует теореме Стокса, из которой следует, что поток ротора через замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, разрежем замкнутую поверхность S на две части S_1 и S_2 контуром L (рис. 23). Направление поля нормалей выберем наружу. Тогда по теореме Стокса

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} + \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \\ = \oint_L \vec{A} d\vec{l} + \oint_L \vec{A} d\vec{l} = 0.$$

L (против часовой стрелки) L (по часовой стрелке)

Таким образом, интегралы по S_1 и S_2 свелись к циркуляции по L соответственно против часовой стрелки и по часовой стрелке, так что их сумма равна нулю. По теореме Гаусса (5.II) также

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} \iint_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} dv = \iiint_V 0 dv = 0.$$

57. ТРИ УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$ называется потенциальным, если его можно представить в виде градиента скалярного поля $U(x,y,z)$:

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z).$$

Часто U называют потенциалом поля \vec{F} . Разумеется, не все векторные поля являются потенциальными. Однако именно потенциальные поля играют весьма важную роль в физике. Удобство работы с потенциальным полем \vec{F} заключается уже в том, что вся физическая информация содержится в одной скалярной функции $U(x,y,z)$ и все три компоненты поля \vec{F} выражаются через эту функцию.

Как определить, является ли данное поле $\vec{F}(x,y,z)$ потенциальным? Какими основными свойствами обладает потенциальное векторное поле? На рис. 24 приведены три условия потенциальности векторного поля \vec{F} :

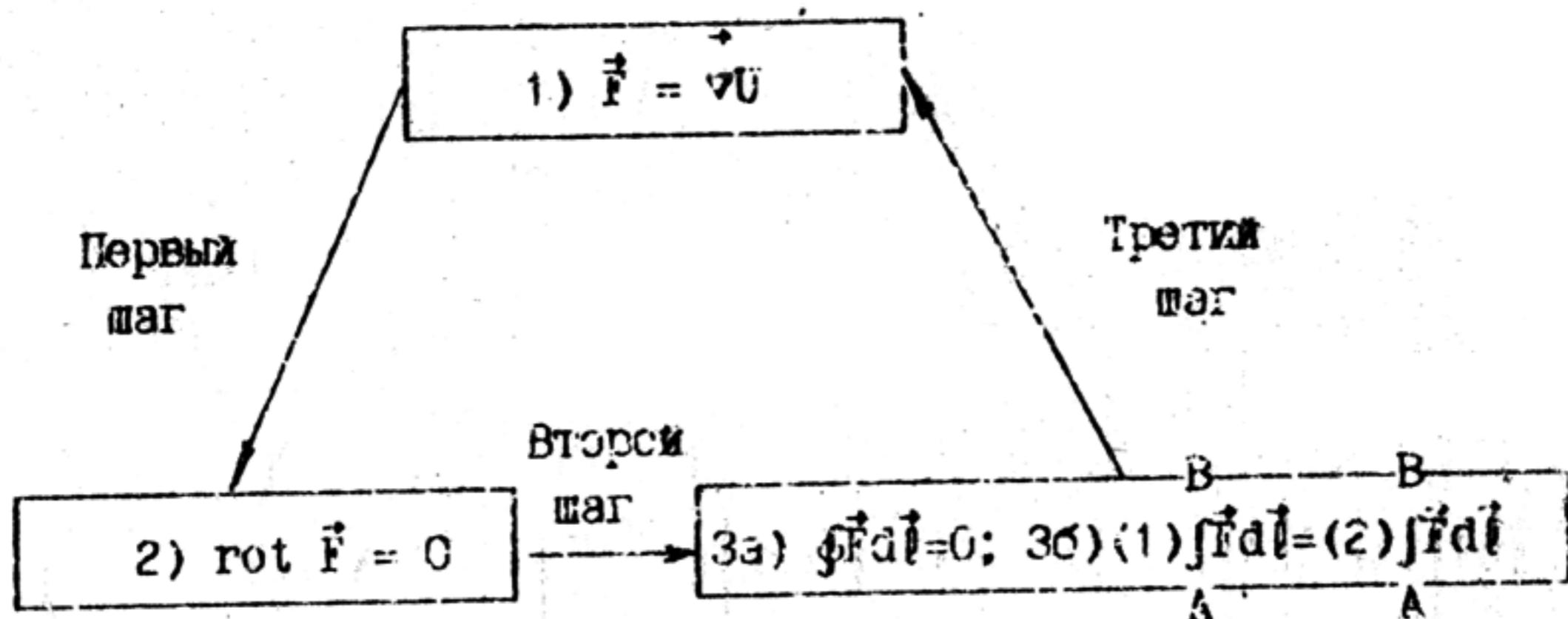


Рис. 24. Три условия потенциальности векторного поля

1) $\vec{F} = \nabla U$ (векторное поле есть градиент некоторого скалярного поля); это просто определение потенциального поля³³:

³³ В механике связь потенциального поля сил \vec{F} с потенциалом записывается как $\vec{F} = -\nabla U$. Знак “-” в определении выбран для удобства.

2) $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ (ротор поля \vec{F} тождественно равен нулю), т.е. потенциальное поле является безвихревым;

За) $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$ (циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю);

В В.

Зб) $(1) \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = (2) \int_A^B \vec{F} d\vec{l}$ (криволинейный интеграл второго

А А

рода не зависит от пути интегрирования. т.е., если мы возьмем интеграл от точки А до точки В по некоторому пути (1), затем по некоторому пути (2), значение интеграла будет одним и тем же).

Перечисленные условия являются эквивалентными. Это значит, что справедливость любого из трех утверждений влечет справедливость остальных двух. Для доказательства эквивалентности будем доказывать последовательно: из условия 1) условие 2) (первый шаг); из условия 2) условию За) и затем условие Зб) (второй шаг); из условия Зб) условие 1) (третий шаг).

Первый шаг.

Пусть $\vec{F} = \nabla U$, тогда

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} U = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} U = 0,$$

т.е. потенциальное поле – всегда безвихревое поле. Это известный нам факт (4.12).

Второй шаг.

Пусть $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то тогда согласно теореме Стокса (6.1) для произвольной поверхности S, ограниченной некоторым произвольным контуром L,

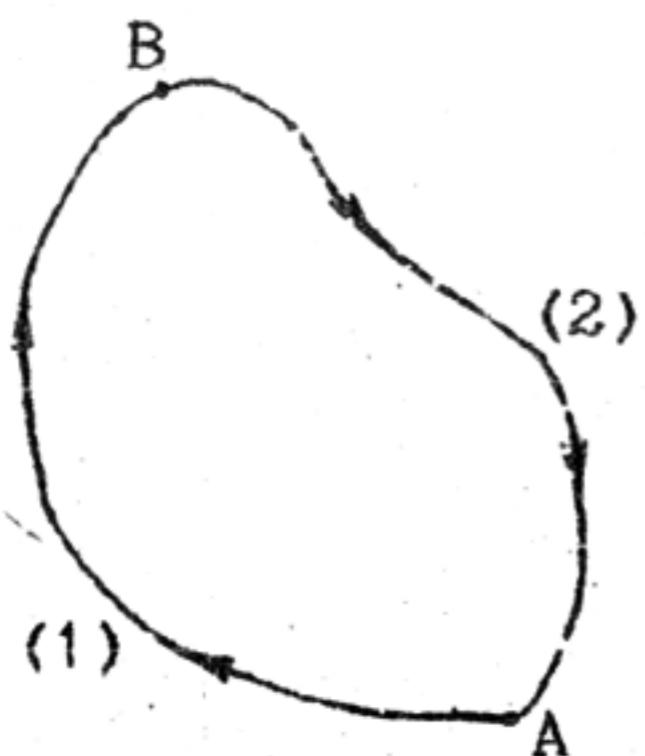
$$0 = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \oint_L \vec{F} d\vec{l}$$

и условие За) доказано. Условие Зб) немедленно вытекает из условия За). В самом деле, проведем через две произвольные точки А и В замкнутый контур L; так как $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$ для любого замкнутого контура L, то

В А

$$0 = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = (1) \int_A^B \vec{F} d\vec{l} + (2) \int_B^A \vec{F} d\vec{l} \quad (7.1)$$

(рис. 25). Здесь интеграл по контуру разбит на два интеграла: от А до В по пути (1) и от В до А по пути (2). Заменим направление обхода пути (2) на противоположное и одновременно поставим знак “-” перед вторым интегралом для сохранения верности равенства (7.1). Тогда



$$0 = (1) \int_A^B \vec{F} d\vec{l} - (2) \int_A^B \vec{F} d\vec{l}$$

и, следовательно,

Рис. 25. К доказательству условия Зб

т.е. криволинейный интеграл для потенциальных векторных полей не зависит от пути интегрирования.

Третий шаг.

Пусть известно, что криволинейный интеграл $\int_A^B \vec{F} d\vec{l}$ не зависит от пути интегрирования. Требуется доказать, что существует скалярная функция $U(x,y,z)$, градиент которой равен $\vec{F}(x,y,z)$. Определим $U(x,y,z)$ следующим образом: пусть (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка пространства, а (x, y, z) – переменная точка тогда

$$U(x,y,z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} d\vec{l}. \quad (7.2)$$

Определение (7.2) скалярной функции $U(x,y,z)$ является корректным, так как интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от переменного верхнего предела. Докажем, что функция $U(x,y,z)$, определенная в (7.2), и есть искомый потенциал. Для этого вычислим частную производную:

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} =$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} d\vec{l} - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} d\vec{l} \\
 & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0, y_0, z_0) \quad (x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \\
 & \quad (x, y, z) \quad (x+\Delta x, y, z) \quad (x, y, z) \\
 & \quad \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} d\vec{l} + \int_{(x, y, z)}^{(x, y, z)} \vec{F} d\vec{l} - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} d\vec{l} \\
 & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0, y_0, z_0) \quad (x, y, z) \quad (x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл в числителе был разбит на две части: от (x_0, y_0, z_0) до (x, y, z) и от (x, y, z) до $(x+\Delta x, y, z)$, что возможно в силу независимости интеграла от пути интегрирования. По этой же причине оставшийся интеграл от (x, y, z) до $(x+\Delta x, y, z)$ можно брать по прямой с фиксированными y и z . Это значит, что $\vec{F} d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_x dx$. Отсюда

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} d\vec{l}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y, z)}^{(x, y, z)} F_x dx}{\Delta x} = \\
 & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x, y, z) \Delta x}{\Delta x} = F_x(x, y, z).
 \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве F_x почти не меняется на малом участке интегрирования от x до $x+\Delta x$, поэтому мы вынесли ее за знак интеграла³⁴.

Аналогичным образом убеждаемся, что $\frac{\partial U}{\partial y} = F_y$ и $\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$, следовательно,

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (7.3)$$

Взятие в качестве "начальной" не точки (x_0, y_0, z_0) , а другой точки приводит к изменению U на константу, которая выпадает при дифференцировании (7.3). Так что потенциал всегда определен с точностью до аддитивной константы (так же, как первообразная функция при взятии неопределенного интеграла).

Все указанные эквивалентные условия потенциальности после

³⁴ Точнее говоря, здесь и в подобных рассуждениях используется известная из математического анализа теорема о среднем.

активно эксплуатируются в физике. Одним из важных следствий для потенциальных силовых полей является закон сохранения энергии. Конкретное поле можно проверить на потенциальность, вычисляя его ротор. Вычислим ротор сферически-симметричного поля $\vec{F} = f(r)\vec{r} =$

$$= f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})(x_1 \hat{i}_1 + x_2 \hat{i}_2 + x_3 \hat{i}_3), \text{ где } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};$$

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{r} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} f(r) x_k =$$

$$= \epsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} x_k + \epsilon_{ijk} f(r) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial r} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \frac{2x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} x_k + \quad (7.4)$$

$$+ f(r) \epsilon_{ijk} \delta_{kj} = \frac{\partial f}{\partial r} \epsilon_{ijk} \frac{x_i x_k}{r} + f(r) \epsilon_{ikk} = 0.$$

Первое слагаемое обращается в нуль как свертка антисимметричного тензора с симметричным (аналогично /6.3/), второе обращается в нуль, так как у антисимметричного тензора два одинаковых индекса ($\epsilon_{ikk} = \epsilon_{i11} + \epsilon_{i22} + \epsilon_{i33} = 0$). Таким образом, любое сферически-симметричное векторное поле — потенциально; в частности, потенциально кулоновское поле $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$. Не представляет труда найти потенциал сферически-симметричного поля.

53. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Все рассмотренные до сих пор определения, соотношения и уравнения записаны в декартовой ортогональной системе координат. Они имеют скалярный или векторный характер, что автоматически обеспечивает их инвариантность относительно преобразований вращения системы координат.

Требование инвариантности относительно вращений является одним из важнейших при построении физических теорий. Можно поставить вопрос значительно шире и изучать законы преобразования тензоров при произвольных функциональных преобразованиях координат. Такой подход приводит к глубоким идеям ковариантного дифференцирования, которые составляют основу дифференциальной геометрии (в том числе неевклидовых геометрий), общей теории относительности, механики сплошных сред и теории поля /2/. Мы ограничимся здесь, однако, только определением криволинейной

системы координат в трехмерном пространстве и записью основных дифференциальных операций векторного анализа (вычисления градиента, дивергенции и ротора) в криволинейной системе координат³⁵, что важно для приложений.

Пусть дана декартова система координат (x_1, x_2, x_3) . Зададим три непрерывные дифференцируемые (т.е. непрерывные вместе со своими первыми производными) функции трех переменных (q_1, q_2, q_3) :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3), \\ x_3 &= x_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Соотношения (8.1) задают взаимно однозначное соответствие тройки чисел (x_1, x_2, x_3) и тройки чисел (q_1, q_2, q_3) . Они могут быть разрешены относительно (q_1, q_2, q_3) /2/:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, x_2, x_3), \\ q_2 &= q_2(x_1, x_2, x_3), \\ q_3 &= q_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Таким образом, если в декартовой системе координат на каждой точке P трехмерного пространства "висела бирочка" с надписью (x_1, x_2, x_3) , теперь благодаря соотношениям (8.1) и (8.2) на точку пространства P можно повесить также "бирочку" с надписью (q_1, q_2, q_3) и описание пространства координатами (q_1, q_2, q_3) будет вичуть не хуже, чем описание декартовыми координатами. Взаимно однозначное соответствие точек пространства и их координат (q_1, q_2, q_3) , задаваемое соотношениями (8.1), называется криволинейной системой координат.

Как наглядно представлять себе криволинейную систему координат? Как записывать соотношения векторного анализа в криволинейной системе координат? Для ответа на эти вопросы введем понятие о координатных линиях и координатных поверхностях. Фиксируем сначала переменные q_2 и q_3 , а переменной q_1 разрешим меняться. В этом случае соотношения (8.1) параметрически задают некоторую кривую линию в пространстве. Эта линия называется координатной линией изменения q_1 . Аналогично проведем координатные

³⁵ Точнее, в важном частном случае криволинейной ортогональной системы координат.

линии изменения q_2 и q_3 . Из каждой точки пространства выходят три координатные линии (рис. 26, а).

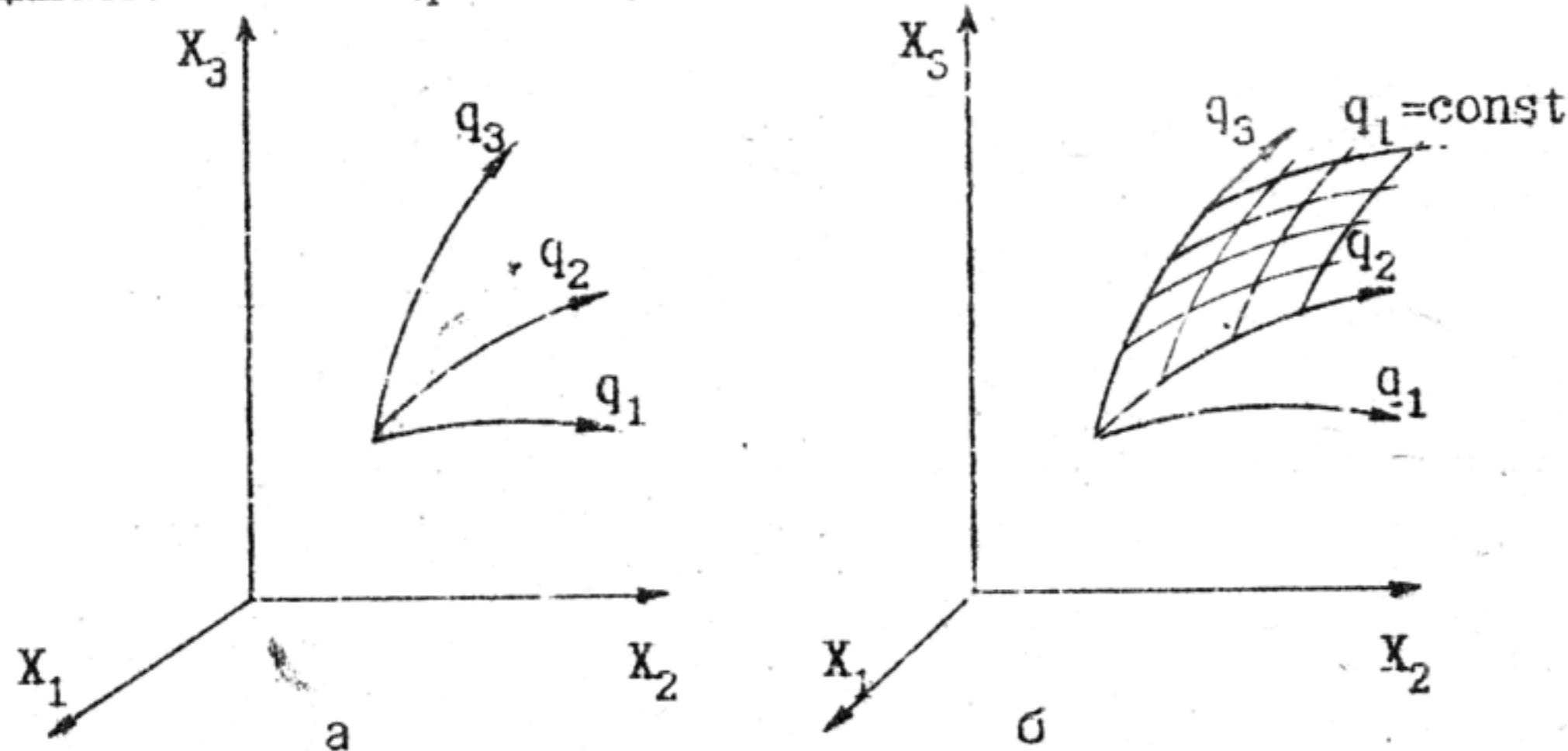


Рис. 26. Координатные линии и координатные поверхности

Если фиксировать q_1 и разрешить меняться координатам q_2 и q_3 , то (8.1) параметрически задают некоторую поверхность постоянного q_1 . Координатные поверхности при различных фиксированных q_1 образуют семейство координатных поверхностей фиксированного q_1 (рис. 26, б). Аналогично вводятся семейства координатных поверхностей фиксированных q_2 и q_3 . Любая точка пространства принадлежит одновременно трем поверхностям фиксированного q_1 , q_2 и q_3 , что и определяет ее криволинейные координаты. Координатные линии декартовой системы координат – прямые, координатные поверхности – это три семейства гауссово перпендикулярных плоскостей.

В качестве примера криволинейной системы рассмотрим сферическую систему координат (r, θ, φ) . Она задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ x_3 &= r \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{8.3}$$

На соотношения (8.3) можно смотреть чисто формально, но естественно, удобно использовать хорошо известную геометрическую интерпретацию параметров r , θ , φ (рис. 27). Координата r – это модуль радиуса-вектора точки пространства \vec{r} ; θ – зенитный угол; φ – азимутальный угол.

Координатные поверхности фиксированного r – это семейства

сфер с радиусами от 0 до бесконечности (рис. 28,а); поверхности фиксированного θ - семейство бесконечных конусов, образующих которых разворачивается от $\theta=0$ до $\theta=\pi$ (рис. 28,б); поверхности фиксированного φ - семейство полуплоскостей (с общей прямой осью Z), разворачивающихся от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ (значение $\varphi=2\pi$ не достигается, так как плоскость $\varphi=2\pi$ совпала бы с плоскостью $\varphi=0$) (рис. 28,в).

Рис. 27. Сферическая система координат

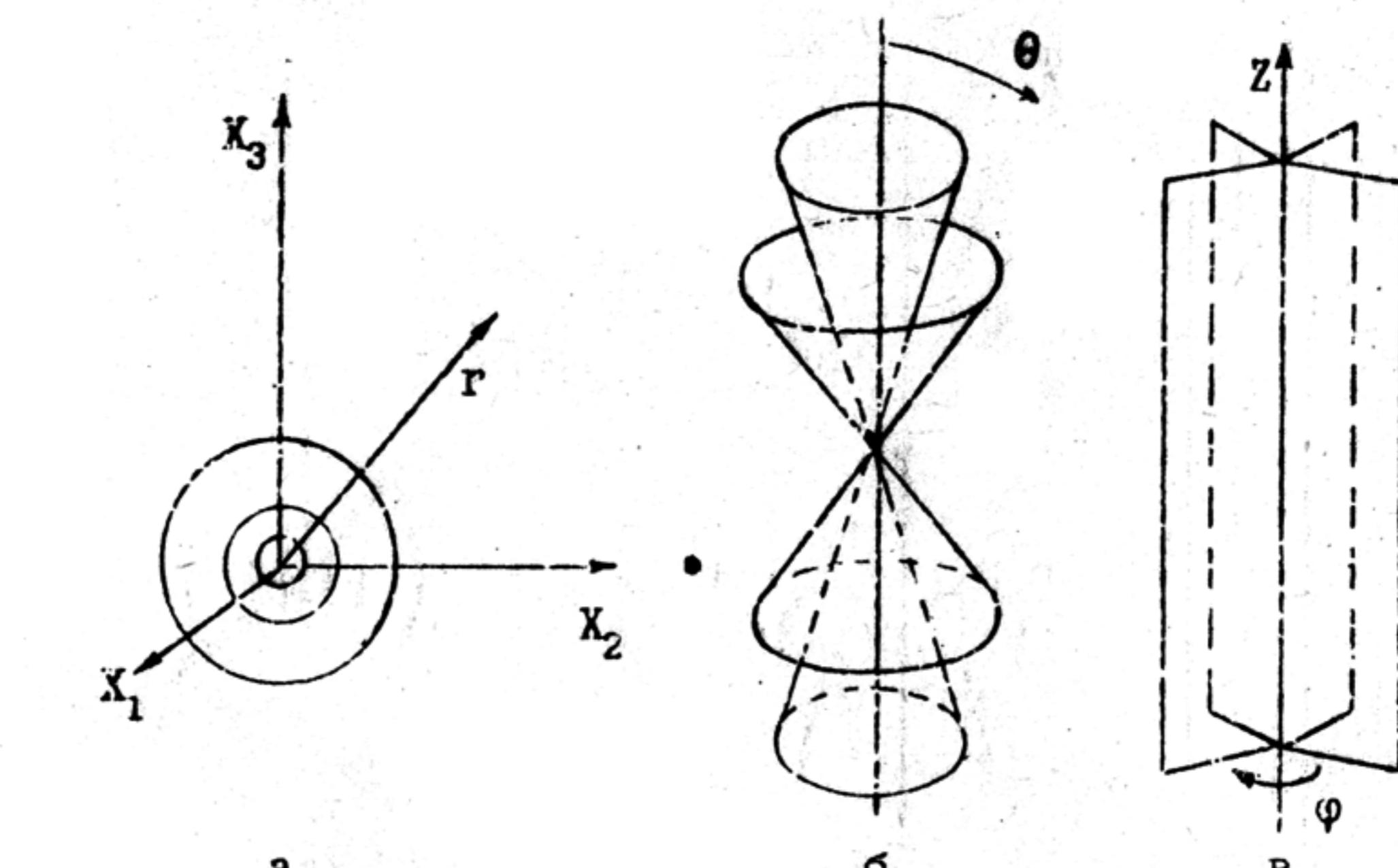


Рис. 28. Координатные поверхности сферической системы координат

Легко рассмотреть также координатные линии сферической системы. Координатные линии изменения r - лучи, выходящие из начала координат; координатные линии изменения θ - полуокружности с центром в начале координат; координатные линии изменения φ - окружности с центром, лежащим на оси Z.

Цилиндрическая система (r, φ, z) задается соотношениями

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \\
 x_2 &= r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\
 x_3 &= z, \quad -\infty < z < \infty.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Фактически это плоская полярная система координат, распространенная на все пространство путем параллельного перенесения вдоль оси z . Координатные поверхности – это семейство бесконечных цилиндров радиуса r с образующей, параллельной оси z , семейство полуплоскостей фиксированного φ (так у сферической системы координат) и семейство плоскостей фиксированного z , параллельных плоскости (x, y) .

Следующим важным вопросом является определение базиса криволинейной системы координат. Рассмотрим координатные линии, изображенные на рис. 29, а. Будем рассуждать последовательно. Рассмотрим в пространстве некоторую точку P (рис. 29, а). Эта точка

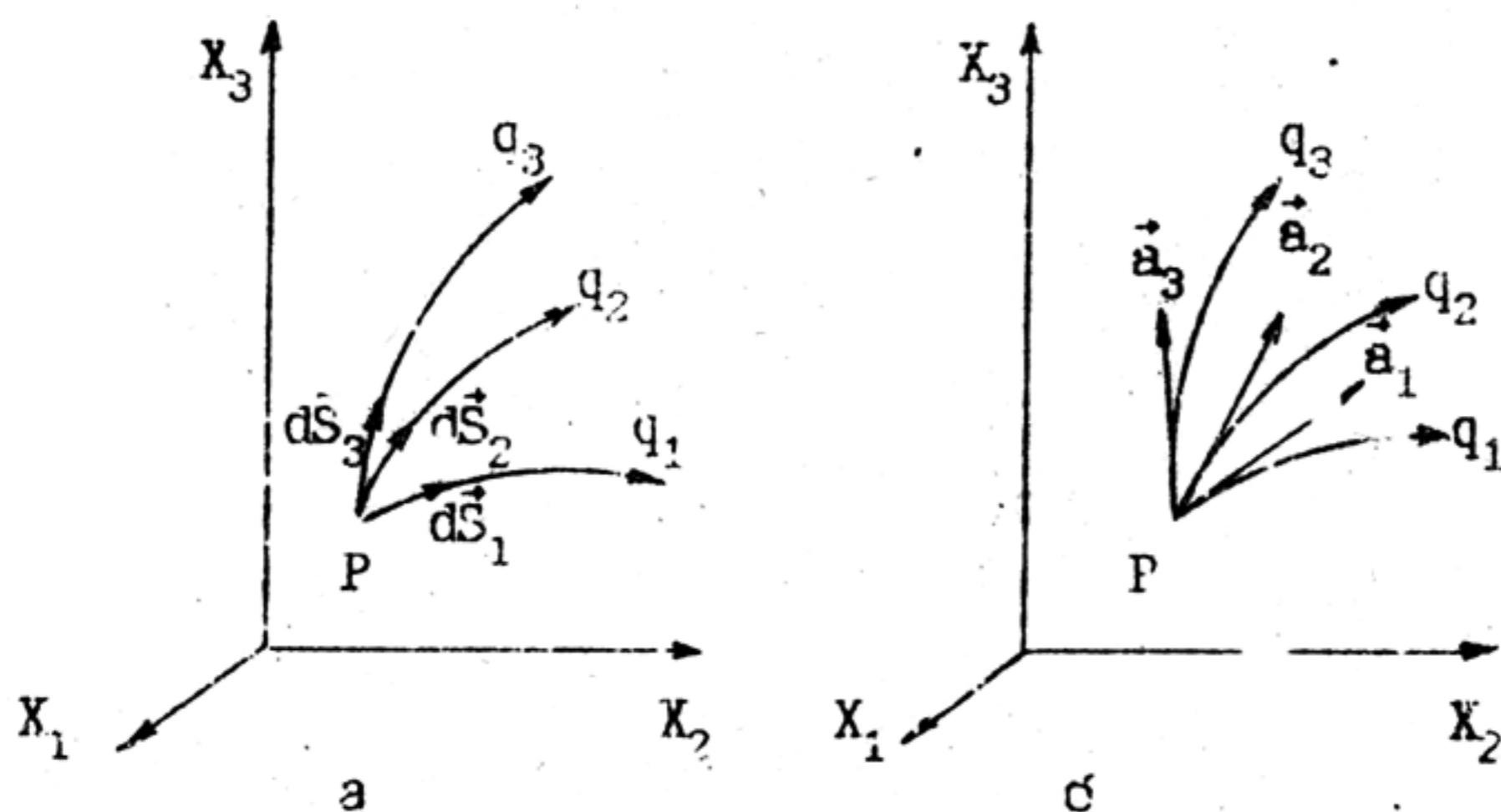


Рис. 29. Претворение базиса криволинейной системы координат

задается координатами (q_1, q_2, q_3) . Определим, насколько переместится точка, если ее координатам придать бесконечно малое приращение $-dq_1, dq_2, dq_3$. Из основных соотношений (8.1), задающих криволинейную систему координат (q_1, q_2, q_3) , следует, что приращении декартовых координат точки P будут:

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x_1}{\partial q_3} dq_3, \\
 dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x_2}{\partial q_3} dq_3,
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_3} dq_3.$$

если приращение придавать только координате q_1 ($dq_1 \neq 0$), а q_2 и q_3 оставлять фиксированными: $dq_2 = dq_3 = 0$, то нарисуется бесконечно малый вектор $d\vec{S}_1$ по координатной линии изменения q_1 . Из (8.5) видно, что его компоненты в декартовой системе координат -

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1, \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1, \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 \right).$$

Аналогичные рассуждения проводятся для векторов $d\vec{S}_2$ и $d\vec{S}_3$, описывающих бесконечно малое перемещение по координатным линиям q_2 и q_3 :

$$d\vec{S}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1, \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1, \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 \right),$$

$$d\vec{S}_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2, \frac{\partial x_2}{\partial q_2} dq_2, \frac{\partial x_3}{\partial q_2} dq_2 \right),$$

$$d\vec{S}_3 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3} dq_3, \frac{\partial x_2}{\partial q_3} dq_3, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} dq_3 \right).$$

Модуль вектора $d\vec{S}_1$ - это корень квадратный из суммы квадратов его компонент:

$$|d\vec{S}_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1} \right)^2} dq_1.$$

Коэффициент при бесконечно малой величине dq_1 называется коэффициентом Ламэ:

$$h_1(q_1, q_2, q_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1} \right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}}. \quad (8.6)$$

Он зависит от координат точки q_1, q_2, q_3 . Коэффициент Ламэ h_1 имеет простой геометрический смысл - изменение криволинейной координаты q_1 на dq_1 приводит к передвижению точки по координатной линии q_1 на расстояние $h_1(q_1, q_2, q_3) dq_1$. Аналогично определяются коэффициенты Ламэ h_2 и h_3 :

$$h_2(q_1, q_2, q_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2}}, \quad (3.7)$$

$$h_3(q_1, q_2, q_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial q_3} \frac{\partial x_i}{\partial q_3}}.$$

Заметим, что криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 вовсе не обязаны иметь размерность длины, однако произведение коэффициентов Лама на дифференциал соответствующей криволинейной координаты всегда имеет размерность длины.

Определим теперь единичные векторы в направлениях $d\vec{S}_1, d\vec{S}_2$ и $d\vec{S}_3$ (рис. 29.б):

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{d\vec{S}_1}{|d\vec{S}_1|} = \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_1}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \right] = \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{d\vec{S}_2}{|d\vec{S}_2|} = \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_2}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \right] = \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{d\vec{S}_3}{|d\vec{S}_3|} = \left[\frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial q_3}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_i}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти векторы, касательные к координатным линиям, естественно назвать базисом криволинейной системы координат. Выражения (3.8) представляют собой разложения векторов криволинейного базиса по осям декартовой ортонормальной системы координат. Ясно, что базис криволинейной системы координат, вообще говоря, не является ортогональным и, конечно же, меняется от точки к точке, в то время как базис декартовой ортонормальной системы получается параллельным переносом из начала системы координат в данную точку пространства.

Проиллюстрируем полученные соотношения на примере сферической системы координат задаваемой функциями (3.3). Коэффициенты Лама находим из определение (3.6) и (3.7):

$$h_1 = h = 1, \quad h_2 = r_\theta = r, \quad h_3 = h_\phi = r \sin \theta.$$

Эти соотношения также немедленно следуют из геометрического смысла коэффициентов Лама (рис. 30). Действительно, при изменении

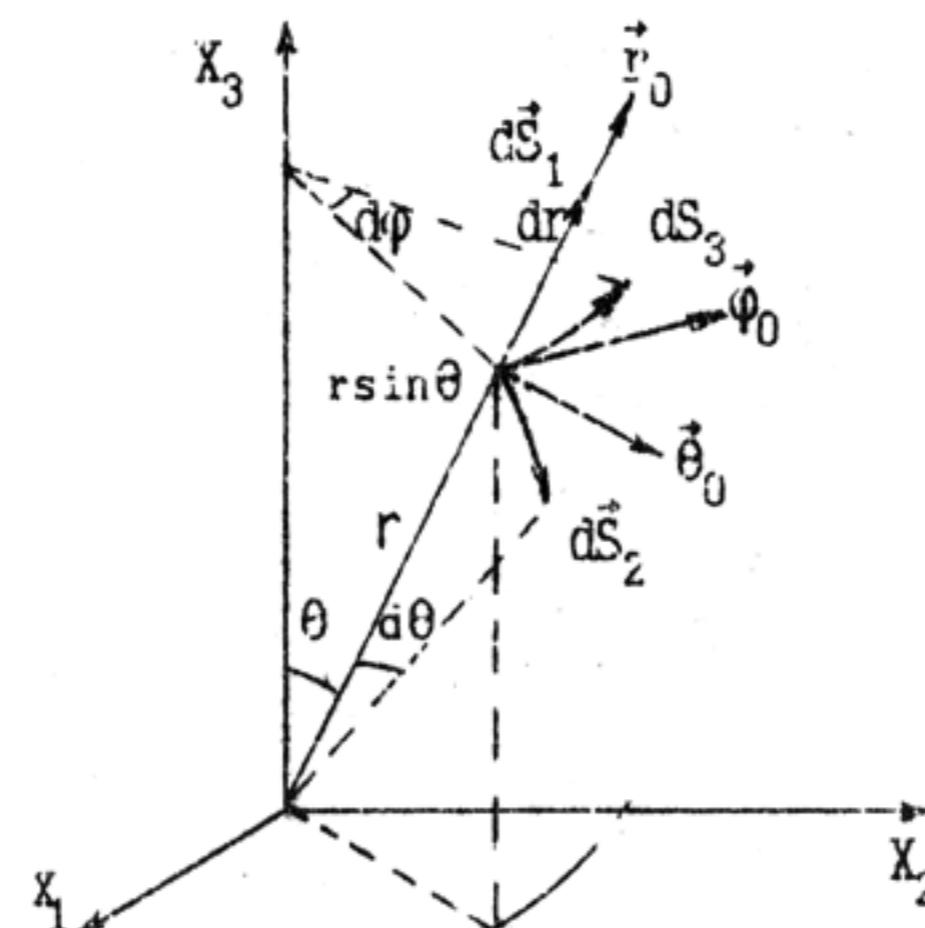


Рис. 30. Базис и коэффициенты Ламэ сферической системы координат

координаты r на dr точка перемещается на dr ; при изменении θ на $d\theta$ - на $r d\theta$; при изменении φ на $d\varphi$ - на $r \sin \theta d\varphi$.

Базис сферической системы состоит из единичных векторов \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$ и $\vec{\varphi}_0$, касательных к координатным линиям (см. рис. 30). Связь сферического базиса с декартовым легко получить из соотношений (8.8):

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= i \sin \theta \cos \varphi + j \sin \theta \sin \varphi + k \cos \theta, \\ \vec{\theta}_0 &= i \cos \theta \cos \varphi + j \cos \theta \sin \varphi - k \sin \theta, \\ \vec{\varphi}_0 &= -i \sin \varphi + j \cos \varphi.\end{aligned}\quad (8.9)$$

Заметим, что направление векторов сферического базиса меняется от точки к точке (только при движении точки по координатной прямой изменения r базис переносится параллельно сам себе). Однако у сферического базиса есть характерная особенность, которая заключается в том, что векторы, его составляющие, взаимно перпендикулярны. Это видно из рис. 31, а также может быть проверено скалярным умножением векторов сферического базиса с помощью (8.9). Таким образом, сферический базис является ортогональным базисом, а сферическая система \circ является ортогональной криволинейной системой координат. Вообще назовем ортогональной криволинейной системой координат систему, векторы базиса которой составляют ортогональную тройку векторов. Кроме сферической, ортогональными являются также цилиндрическая и ряд других важных криволинейных систем координат.

§ 9. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАДИЕНТА, ДИВЕРГЕНЦИИ, ЛАПЛАСИАНА И РОТОРА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В этом параграфе мы, проигрывая в общности, но выигрывая в удобстве и наглядности, будем рассматривать только ортогональные криволинейные системы координат.

Пусть $U(x_1, x_2, x_3)$ – скалярное поле, заданное в некоторой декартовой системе координат. Не составляет труда записать его в криволинейной системе координат, задаваемой соотношениями (3.1):

$$U(x_1, x_2, x_3) = U(q_1, q_2, q_3), \quad x_1(q_1, q_2, q_3), \quad x_2(q_1, q_2, q_3), \quad x_3(q_1, q_2, q_3) = U(q_1, q_2, q_3). \quad (9.1)$$

В последнем равенстве для удобства функции, представляющая скалярное поле в криволинейной системе, обозначена также буквой U , хотя надо понимать, что, как видно из (9.1), функциональная зависимость поля от переменных (q_1, q_2, q_3) совсем не такая, как от переменных (x_1, x_2, x_3) . Преобразование (9.1) есть преобразование, индуцированное инвариантностью (см. § 4), при переходе к криволинейной системе координат.

Запишем для примера выражение кулоновского потенциала U в декартовой, сферической и цилиндрической системах координат:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \rightarrow U(r, \theta, \varphi) = \frac{k}{r} \rightarrow U(r, \varphi, z) = \frac{k}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Выражения для гравитационного потенциала в сферической и цилиндрической системах координат получаются подстановками (8.3) и (8.4).

Нетрудно также записать произвольное векторное поле в криволинейной системе координат. Пусть $\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = (A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3))$ – векторное поле, заданное в декартовой системе координат. Для записи его в криволинейной ортогональной системе нужно сделать подстановку (8.1) и разложить вектор \vec{A} по криволинейному базису (8.8):

$$\vec{A}(q_1, q_2, q_3) = A_{q_1}(q_1, q_2, q_3) \vec{a}_1 + A_{q_2}(q_1, q_2, q_3) \vec{a}_2 + A_{q_3}(q_1, q_2, q_3) \vec{a}_3,$$

где A_{q_1} – проекция вектора \vec{A} на вектор базиса \vec{a}_1 ; A_{q_2} – проекция на \vec{a}_2 ; A_{q_3} – проекция на \vec{a}_3 :

$$A_{q_1}(q_1, q_2, q_3) = \vec{A} \cdot \vec{a}_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)) \frac{1}{l_1} \frac{\partial x_i(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1},$$

$$A_{q_2}(q_1, q_2, q_3) = \vec{A}\vec{a}_2 = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \quad (9.2)$$

$$A_{q_3}(q_1, q_2, q_3) = \vec{A}\vec{a}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_i}{\partial q_3}.$$

Теперь получим выражение для градиента в криволинейной ортогональной системе координат. Градиент скалярного поля $U(x_1, x_2, x_3)$ является векторным полем и записывается в декартовой системе координат следующим образом:

$$\vec{\nabla} U = \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right].$$

В криволинейной системе координат векторное поле градиента записывается в виде:

$$\vec{\nabla} U = (\vec{\nabla} U)_{q_1} \vec{a}_1 + (\vec{\nabla} U)_{q_2} \vec{a}_2 + (\vec{\nabla} U)_{q_3} \vec{a}_3,$$

где согласно (9.2)

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} U)_{q_1} &= \vec{\nabla} U \vec{a}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial q_1} = \\ &= \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} U(q_1, q_2, q_3) &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial U(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \vec{a}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \vec{a}_3. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Полезно записать (9.3) для случая сферической системы координат:

$$\vec{\nabla} U(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0. \quad (9.4)$$

Применим (9.4) к численному градиенту от кулоновского потенциала:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{k}{r} \right) = -\frac{\partial(k/r)}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial(k/r)}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(k/r)}{\partial \varphi} \vec{\varphi} = -\frac{k}{r^2} \vec{r}_0.$$

Перейдем теперь к выводу выражения для дивергенции векторного поля \vec{A} в криволинейной ортогональной системе координат. Для этого воспользуемся выражением (5.13):

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint \vec{A} dS}{\Delta V}. \quad (9.5)$$

Далее проводятся фактически такие же рассуждения, как при рассмотрении физического смысла дивергенции (см. § 4). Возьмем некоторую точку пространства (q_1, q_2, q_3) и выделим в пространстве бесконечно малый параллелепипед (напомним, что система координат ортогональна) со сторонами $h_1 dq_1$, $h_2 dq_2$, $h_3 dq_3$, совпадающими с координатными линиями q_1 , q_2 и q_3 соответственно (рис. 31).

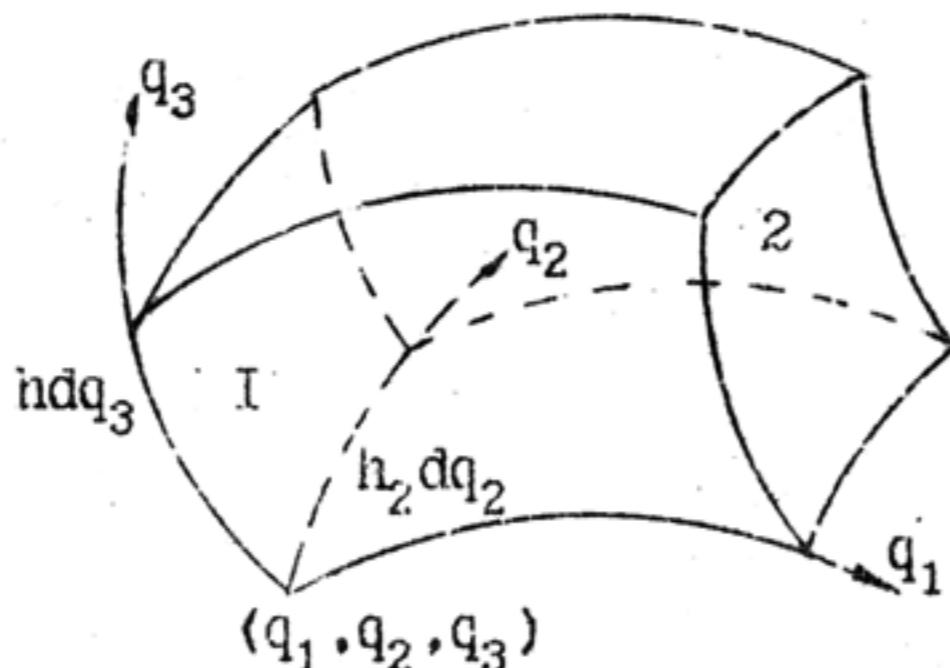


Рис. 31. Вычисление потока векторного поля \vec{A} через поверхность S бесконечно малого параллелепипеда

Вычислим $\operatorname{div} \vec{A}$ в точке (q_1, q_2, q_3) с помощью выражения (9.5). Для этого найдем поток векторного поля через поверхность S параллелепипеда на рис. 31. Поток поля \vec{A} , втекающий через грань 1, равен

$$A_{q_1} h_2 h_3 dq_2 dq_3, \quad (8.6)$$

где A_{q_1} – компонента поля \vec{A} в направлении q_1 ; $h_2 h_3 dq_2 dq_3$ – площадь грани. Втекающий через грань 2 поток записывается в виде:

$$A_{q_1} h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (9.7)$$

Здесь учтена первая поправка разложения $A_{q_1} h_2 h_3$ в ряд Тейлора (за счет изменения q_1 на dq_1). Суммарный поток через грани 1 и 2 есть разность выражений (8.6) и (9.7).

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Аналогично вычисляется поток через остальные грани. В результате получаем:

$$\iint \vec{A} dS = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_2} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_3} h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3.$$

Так как объем параллелепипеда $V = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$, то согласно (9.5) получаем, что

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_2} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_3} h_1 h_2) \right]. \quad (9.8)$$

Это и есть искомое выражение дивергенции.

Важную роль в уравнениях математической физики играет дифференциальный оператор Лапласа Δ (лапласиан). По определению это есть дивергенция градиента скалярного поля, т.е.

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Приведенное выражение является символическим. В нем подразумевается, что дифференциальный оператор действует на некоторое скалярное поле $U(x_1, x_2, x_3)$. Запишем выражение для лапласиана в криволинейной ортогональной системе координат, используя (9.3) и (9.8):

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (9.9)$$

Для случая сферической системы соотношения (9.8) и (9.9) примут вид:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + r \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (9.10)$$

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]. \quad (9.11)$$

В качестве примера применим (9.10) и (9.11) для вычисления дивергенции сферически-симметричного векторного поля $\vec{A} = f(r) \hat{r}_0$ и лапласиана сферически-симметричного скалярного поля $U(r)$:

$$\operatorname{div} \vec{f}(r) \vec{r}_0 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sin \theta \frac{\partial r^2 f(r)}{\partial r} = -\frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr},$$

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{2}{r} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{d^2 U(r)}{dr^2}. \quad (9.12)$$

Разумеется, вычисления в декартовой системе координат дают тот же результат, однако они будут более громоздкими. Такая ситуация является характерной: вычисления значительно упрощаются, если проводятся в удобной криволинейной системе координат, учитывающей симметрию задачи³⁶. Этот прием часто используется при решении уравнений математической физики.

Получим, наконец, выражение для ротора векторного поля \vec{A} в ортогональной криволинейной системе координат. Для этого применим теорему Стокса к площадке, изображенной на рис. 32:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = (\operatorname{rot} \vec{A})_{q_1} h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint_L \vec{A} d\vec{l} = A_{q_2} h_2 dq_2 + [A_{q_3} h_3 + \\ + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_3} h_3)] dq_3 - [A_{q_2} h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_2} h_2)] dq_3 - A_{q_3} h_3 dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_3} h_3) dq_2 dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_2} h_2) dq_2 dq_3. \quad (9.13)$$

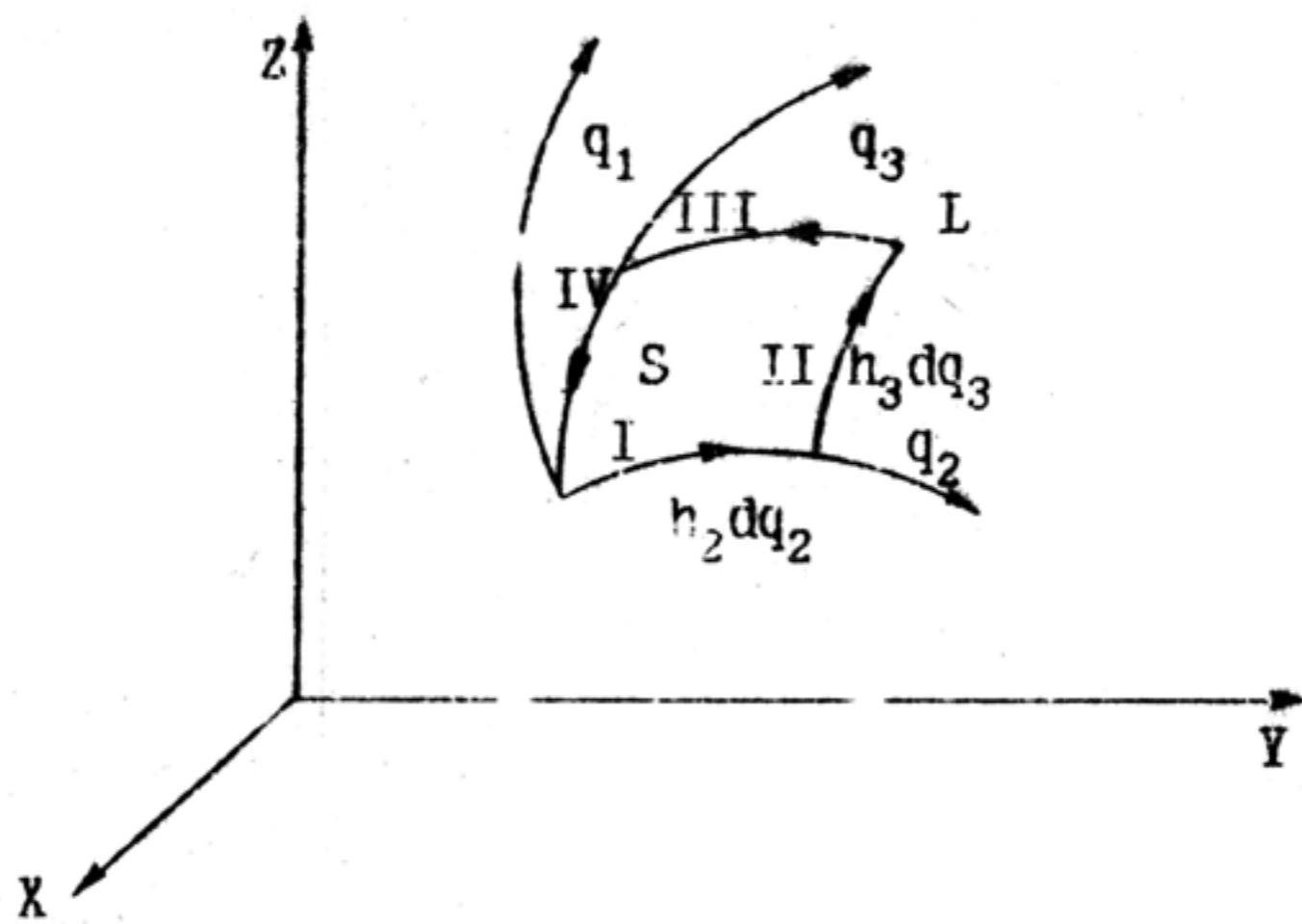


Рис. 32. К получению выражения для ротора в криволинейной системе координат

³⁶ Так, изучение угловой части лапласиана (части, содержащей $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial\varphi$) является основой для квантово-механической теории момента количества движения.

Здесь L - контур, ограничивающий площадку S . Интеграл по первой и второй частям контура входит в выражение (9.13) со знаком "+", так как направление обхода совпадает с направлением возрастания q_2 и q_3 ; интеграл по третьей и четвёртой частям входит со знаком "-", так как направление обхода противоположно направлению возрастания q_2 и q_3 . При взятии интеграла по второй и третьей частям учтена первая поправка разложения в ряд Тейлора. Таким образом, согласно (9.13)

$$\text{rot } \vec{A}_{q_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_3} h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_2} h_2) \right].$$

Выражения для остальных компонент $\text{rot } \vec{A}$ получаются циклической заменой координат. Окончательно выражение для ротора удобно представить в виде:

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 h_1 \cdot \vec{a}_2 h_2 & \vec{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_{q_1} & h_2 A_{q_2} & h_3 A_{q_3} \end{vmatrix}. \quad (9.14)$$

Заметим, что выражения дифференциальных операций векторного анализа (9.3), (9.8) и (9.14) в случае декартовой системы, сводятся к известным выражениям градиента, дивергенции и ротора, так как в этом случае $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

5 IO. ЗАДАЧА О ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА

Рассмотрим здесь задачу о поле равномерно заряженного шара. Она представляет интерес как сама по себе, так и как простой пример применения полученных ранее результатов. Получим прежде всего уравнения электростатики, исходя из закона Кулона.

Напряженность \vec{E} поля точечного заряда e , расположенного в начале системы координат, имеет вид:

$$\vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{e}{r^2} \vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Вычислим поток поля \vec{E} через сферу радиуса R :

$$\iint \vec{E} d\vec{S} = \iint \vec{E} \vec{r}_0 dS = \iint \frac{e}{r^2} \vec{r}_0 \vec{r}_0 dS = e \iint \frac{dS}{r^2}$$

Будем проводить вычисление интеграл в сферической системе координат. В ней $dS = h_\theta h_\phi d\theta d\phi = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

$$\begin{aligned} e \iint \frac{ds}{r^2} &= e \iint \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{R^2} = e \int d\phi \int \sin \theta d\theta = \\ &= e 2\pi \int_0^\pi -d\cos \theta = 2\pi e(-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 2\pi e(1+1) = 4\pi e. \end{aligned}$$

Так что поток поля \vec{E} через любую сферу равен $4\pi e$:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi e. \quad (10.1)$$

Фера

Пусть S – произвольная поверхность, ограничивающая объем V , содержащий начало системы координат. Рассмотрим шар объема V_1 , полностью содержащийся в объеме V . Поток поля \vec{E} через поверхность шара S_1 , согласно (10.1), равен $4\pi e$. Применим теорему Гаусса к объему V с убранным из него шаром V_1 . Обозначим его как $V-V_1$:

$$\iint_{V-V_1} \operatorname{div} \vec{E} dv = \iint_S \vec{E} d\vec{S} - \iint_{S_1} \vec{E} d\vec{S}. \quad (10.2)$$

Знак “-” в (10.2) соответствует выбору поля нормалей наружу объема V (на поверхности S) и наружу V_1 (на поверхности S_1). Как мы видели раньше (см. 4.9/), $\operatorname{div} \vec{r}/r^3 = 0$, причем $r \neq 0$ в объеме $V-V_1$. Этот же результат получаем из (9.12):

$$\operatorname{div} \left(\frac{e}{r^2} \vec{r}_0 \right) = \frac{\partial(e/r^2)}{\partial r} + \frac{2e}{r^2} = -\frac{2e}{r^3} + \frac{2e}{r^3} = 0,$$

но тогда согласно (10.2) поток поля \vec{E} через любую замкнутую поверхность S , охватывающую заряд e , равен $2\pi e$:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = 2\pi e, \quad (10.3)$$

причем, конечно, неважно, находится ли заряд в начале координат или в какой-либо другой точке³⁷. Если мы имеем n зеркал со зарядами e_i , создающими напряженности \vec{E}_i , то согласно принципу суперпозиции суммарная напряженность \vec{E} будет равна векторной сумме напряженностей \vec{E}_i :

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Поэтому из (10.3) следует, что для любой поверхности S ,

³⁷ Начало координат всегда можно перенести в точку, где находится заряд: поток векторного поля через поверхность при этом не меняется.

окхватывающей заряды e_i ,

$$\iint_S \vec{E} dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi Q,$$

где Q – суммарный заряд, охватываемый поверхностью S .

Соотношение (10.3) в электростатике называется теоремой Гаусса. Его легко распространить на непрерывное распределение заряда с плотностью ρ :

$$\iint_S \vec{E} dS = 4\pi Q = 4\pi \iiint_V \rho dV. \quad (10.4)$$

Используя теорему Гаусса, получаем из (10.4):

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \iint_S \vec{E} dS = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

и, в силу произвольности объема V ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (10.5)$$

Уравнение (10.5) является одним из уравнений Максвелла. Оно соответствует нашему пониманию дивергенции как плотности источников поля. Конечно, заряды, распределенные с плотностью ρ , и являются источниками поля.

Поле \vec{E} потенциально, так как³⁸

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\epsilon \frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \epsilon \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \epsilon \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k}{r^3} = \\ &= \epsilon (\epsilon_{ijk} \frac{\delta_{jk}}{r^3} - \epsilon_{ijk} \frac{3}{r^4} \frac{x_j}{r} x_k) = 0, \end{aligned}$$

поэтому его можно представить как

$$\vec{E} = -\nabla \phi. \quad (10.6)$$

Знак “-” выбран для удобства. Из (10.5) и (10.6) получаем основное уравнение электростатики – уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \operatorname{div} (-\nabla \phi) = -\Delta \phi = \pi \rho, \\ \Delta \phi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Из него по известному распределению зарядов ρ всегда можно найти потенциал ϕ , а затем из (10.6) – напряженность поля, создаваемого зарядами. Как видно из приведенных рассуждений, фактически в электростатике вся физическая информация содержится в законе Кулона и принципе суперпозиции, а уравнения (10.5), (10.6) и (10.7) – лишь удобная форма представления уравнений

³⁸ См. также (7.4).

аэлектростатики.

Вернемся теперь к задаче о нахождении поля равномерно заряженного шара радиуса a . Благодаря сферической симметрии задачи, сразу можно сказать, что

$$\vec{E} = |\vec{E}| \vec{r}_0,$$

где $|\vec{E}|$ постоянен на сфере; $|\vec{E}| = |\vec{E}(r)|$, поэтому нет необходимости решать уравнение (10.7), можно воспользоваться соотношением (10.5). Возьмем интеграл в (10.5) по шару с радиусом $r > a$, тогда

$$\iiint_{\text{шар}, r} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_{\text{шар}, a} \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \iiint_{\text{шар}, a} \rho dV = 4\pi Q =$$

$$= \iint_{\text{сф. } r} |\vec{E}| \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 dS = |\vec{E}| \iint_{\text{сф. } r} dS = |\vec{E}| 4\pi r^2,$$

где Q – заряд шара. Отсюда

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0.$$

Это доказывает, что равномерно заряженный шар создает поле напряженности, такое же, как точечный заряд Q , расположенный в центре шара. Конечно, напряженность внутри шара следует вычислять отдельно, что мы предоставляем читателю сделать самостоятельно.

Теорема Гаусса позволила вычислить поле \vec{E} весьма просто благодаря сферической симметрии задачи. Заметим, что прямое вычисление напряженности \vec{E} из закона Кулона потребовало бы вычисления интеграла

$$\vec{E}(r) = \iiint_{\text{шар}, a} \frac{\rho(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3}{(r - \vec{r}')^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|r - \vec{r}'|},$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения; \vec{r}' – радиус-вектор некоторой точки шара с координатами (x'_1, x'_2, x'_3) ; $dx'_1 dx'_2 dx'_3$ – элемент объема, по которому ведется интегрирование.

В случае $\rho = \text{const}$ интеграл, конечно, следует вычислять в сферической системе координат.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ³⁹

I. Показать, что последовательно проделанные преобразования двумерного поворота с углами φ_1 и φ_2 эквивалентны одному

³⁹ Часть материала взята из сборника задач /12/.

преобразованию с углом $\varphi_1 + \varphi_2$.

2. Определить компоненты двухмерного вектора \vec{A} , если $|\vec{A}|^2=2$ и углы, образуемые вектором \vec{A} с осями системы координат, равны. Найти его компоненты в системе OXY' , повернутой относительно OXY на 30° .

3. Показать прямым вычислением, что матрица преобразования компонент двухмерного вектора $e_{ij}(\varphi)$ ортогональна.

4. Вектор \vec{A} в системе OXY имеет компоненты $A_x = 1$, $A_y = 3$. Существует ли система $O'X'Y'$, в которой его компоненты равны: $A'_x = 2$, $A'_y = 2$? Существует ли система $O''X''Y''$, в которой его компоненты равны: $A''_x = -3$, $A''_y = 1$? Если такая система существует, на какой угол она повернута относительно исходной. Решить задачу в общем виде с произвольными A_x , A_y и A'_x , A'_y .

5. Записать матрицу вращения с параметрами Эйлера $\varphi=0$, $\theta=\pi$, $\phi=\pi/2$. Интерпретировать соответствующее преобразование геометрически.

6. 1. Поворот вокруг оси Z на угол $2\pi/3$ в теории групп собою начается C_1^2 . Записать матрицы поворотов: а) C_2^2 ; б) C_2^y ; в) C_3^2 ; г) C_4^2 ; д) C_6^2 .

2. Операция отражения $-\sigma_z$ относительно плоскости $Z=0$ приводит к изменению знака z -й компоненты вектора. Аналогично, инверсия $-I$ (отражение трех осей) меняет знаки всех трех компонент. Найти матрицы преобразования, соответствующие операциям: а) $-I$; б) C_y ; в) $-I \cdot C_3^2$.

3. Доказать: а) $-I \cdot C_2^z = \sigma_z$; б) $-I \cdot C_2^y = \sigma_y$.

7. Вектор, длина которого равна 10, составляет равные углы с осями координат в системе $OXYZ$. Найти его компоненты в системе координат $O'X'Y'Z'$, повернутой относительно исходной на углы Эйлера $\varphi=0$, $\theta=\pi$, $\phi=\pi/2$.

8. Сколько независимых условий налагают на матрицы 2×2 , 3×3 и $n \times n$ условие ортогональности? Сколько независимых параметров необходимо для писания поворота в четырехмерном пространстве?

9. Доказать, что произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей и, следовательно, матрица поворота, параметризованная углами Эйлера, ортогональна.

10. Записать в развернутой форме выражения: $a_{ij}x_j$, $a_{ij}x_i x_j$,

$$a_{im}b_{jm}, \quad a_{ii}, \quad a_{ij}x_i, \quad a_{ij}x_i y_j, \quad a_{ijk}x_j x_k, \quad \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} dx_j,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

II. Упростить выражения: $\delta_{ik}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}x_k$, $\delta_{ij}x_i x_j$, δ_{ii} , $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}$.

I2. Показать, что тензорное уравнение $a_{ij}\lambda_j = a\lambda_i$, где a - инвариант, λ_i - произвольный вектор, требует, чтобы $a_{ij} = ab_{ij}$.

I3. Показать, что свертка симметричного тензора S_{ij} и антисимметричного тензора A_{ij} равна нулю: $A_{ij}S_{ij} = 0$.

I4. Доказать непосредственно, пользуясь законом преобразования компонент, что симметрия (антисимметрия) тензора представляет собой инвариантное свойство.

I5. Вывести правило Крамера, пользуясь известным свойством алгебраических дополнений: $a_{ij}A_{ik} = ab_{jk}$, где $a = \det(a_{ij})$.

I6. Доказать, что левая и правая обратные матрицы равны.

I7. Показать, что $(a \cdot b)^T = b^T \cdot a^T$.

I8. Показать, что каждый тензор может быть выражен суммой двух тензоров, одного симметричного, другого - антисимметричного.

I9. Показать, что если a_{ij} - антисимметричный тензор, а A_i - вектор, то $a_{ij}A_i A_j = 0$, и обратно, если это уравнение верно для всех векторов, то a_{ij} антисимметричен.

I0. Доказать, что компоненты антисимметричного тензора второго ранга при вращениях преобразуются как компоненты вектора.

I1. Доказать, что

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{j\ell}\delta_{im}.$$

I2. Доказать, что $\delta_{ii} = 3$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\elljk} = 2\delta_{i\ell}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 3! = 6$.

I3. Показать, что модуль детерминанта $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ есть объем параллелепипеда, построенного на трех векторах \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} .

Интерпретировать знак детермианта.

I4. Доказать тождества:

a) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$;

b) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}] \times \vec{D} = [\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})] \vec{B} -$

$$-(\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})) \cdot \vec{A}$$

25. Найти закон преобразования совокупности объемных интегралов $T_{ik} = \int_{V} x_i x_k dV$ при пространственных поворотах и отражениях (x_i и x_k - декартовы координаты).

26. Записать в инвариантной векторной форме:

а) $\epsilon_{iml} \epsilon_{irs} \epsilon_{lmp} \epsilon_{stp} a_s a_r b_m c_t$;

б) $\epsilon_{inl} \epsilon_{krs} \epsilon_{lmp} \epsilon_{stp} a_s a_r b_k b_i c_m c_t$.

27. Представить произведение $(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))(\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}'))$ в виде суммы членов, содержащих только скалярные произведения векторов. Применить теорему об умножении определителей или воспользоваться псевдотензором третьего ранга ϵ_{ikl} .

28. Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нулевой вектор; что всякий тензор второго ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ik} , тензор третьего ранга - ϵ_{ikl} , тензор четвертого ранга - $(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{km})$.

29. Пусть \vec{n} - единичный вектор, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти средние значения его компонент и их произведений: \bar{n}_i , $\bar{n}_i n_k$, $\bar{n}_i \bar{n}_k \bar{n}_l$, $\bar{n}_i \bar{n}_k \bar{n}_l \bar{n}_m$, пользуясь трансформационным свойством искомых величин, а не прямым вычислением соответствующих интегралов.

30. Найти усредненные по всем направлениям значения следующих выражений: $(\vec{a} \cdot \vec{n})^2$, $(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})$, $(\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n}$, $(\vec{a} \times \vec{n})^2$, $(\vec{a} \times \vec{n}) \cdot (\vec{b} \times \vec{n})$, $(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})(\vec{c} \cdot \vec{n})(\vec{d} \cdot \vec{n})$, если \vec{n} - единичный вектор, все направления которого равновероятны; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} - постоянные векторы.

31. Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов \vec{n} , \vec{n}' и псевдовектора \vec{l} .

32. Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов \vec{n} , \vec{n}' и одного псевдовектора \vec{l} ?

33. Показать, что симметрия тензора есть свойство, инвариантное относительно вращений, т. е. тензор, симметричный (антисимметричный) в некоторой системе отсчета, остается симметричным (антисимметричным) и во всех системах, повернутых относительно исходной. (Использовать теорему о нулевом тензоре.)

34. Доказать, что сумма диагональных компонент тензора

второго ранга является инвариантом.

35. Показать, что совокупность величин $A_{ik}B_{ik}$, где A_{ik} тензор третьего ранга, а B_{ik} - тензор второго ранга, является вектором.

36. Доказать, что при поворотах или отражениях четного числа координатных осей определитель преобразования равен +1, а при отражениях нечетного числа координатных осей этот определитель равен -1.

37. Убедиться в том, что формула дифференцирования сложной функции многих переменных $\varphi(y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3), \dots)$ имеет вид :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j},$$

38. Найти градиент функции $u = (x-y)(y-z)(z-x)$ в точке $M(1;2;3)$.

39. Доказать тождества:

а) $\operatorname{grad}(\varphi \Phi) = \varphi \operatorname{grad} \Phi + \Phi \operatorname{grad} \varphi;$

б) $\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} \varphi;$

в) $\operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi;$

г) $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B};$

д) $\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}.$

40. Доказать тождества:

а) $\vec{C} \cdot \operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A};$

б) $(\vec{C} \cdot \nabla)(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A};$

в) $(\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{A};$

г) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \operatorname{rot} \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{C} - \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{C}.$

41. Вычислить $\operatorname{grad} \varphi(r)$, $\operatorname{div} \varphi(r) \cdot \vec{r}$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \cdot \vec{r}$, $(\vec{i} \cdot \nabla) \varphi(r) \cdot \vec{r}$, где $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

42. Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\operatorname{div} \varphi(r) \cdot \vec{r} = 0$.

43. Найти дивергенции и вихри следующих векторов: $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$, $(\vec{a} \times \vec{r})$, $\varphi(r)(\vec{a} \times \vec{r})$, $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$, где \vec{a} и \vec{b} - постоянные векторы.

44. Вычислить $\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{r}$, $\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r)$.

45. Вычислить $\operatorname{grad}(\vec{P} \cdot \vec{r}/r^3)$ и $\operatorname{rot}(\vec{P} \times \vec{r}/r^3)$ (\vec{P} - постоянный вектор), воспользовавшись выражениями градиента и вихря сферических координатах. Проверить ответ вычислением в декартовой системе координат.

46. В каких точках пространства градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3$

- Зху_z : а) перпендикулярен оси Z; б) равен нулю ?
47. Данна функция $s(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. Определить в точке (1,2,3) ∇s , его абсолютную величину и направляющие косинусы.
48. Дан вектор $\vec{r}_{12} = \vec{i}_1(x_1-x_2) + \vec{i}_2(y_1-y_2) + \vec{i}_3(z_1-z_2)$. Показать, что $\nabla_1 r_{12}$ (градиент абсолютной величины вектора по переменным x_1, y_1, z_1) есть единичный вектор, направленный вдоль \vec{r}_{12} .
49. Найти градиент скалярного поля $u=x \cdot y \cdot z$ в точке M(-2,3,4). Чему равна в этой точке производная поля в направлении вектора $\vec{a} = \{3, -4, 12\}$?
50. Найти градиент сферического скалярного поля $u=r^{-2}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
51. Доказать, что если векторная функция \vec{F} зависит от пространственных координат x, y, z и от времени t, то $d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \nabla)\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt$.
52. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x\vec{i}+y^2\vec{j}+z^3\vec{k}$ в точке M(-2,4,5).
53. Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля $\vec{a}=f(r)\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=|\vec{r}|$. Определить вид функции $f(\vec{r})$, для которой поле \vec{a} является полем без источников.
54. Дано векторное поле $\vec{a} = x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$. Найти $\text{rot } \vec{a}$ в точке M(1,2,3).
55. Найти ротор сферически-симметричного векторного поля $\vec{a}=f(r)\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=|\vec{r}|$.
56. Доказать тождество, не переходя к записи по компонентам (с помощью свойств оператора ∇):
- а) $\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$;
- б) $(\nabla \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}$.
57. Вычислить (не применяя теорему Гаусса) интеграл $\int_S \vec{r} d\vec{s}$, взятый по поверхности единичного куба, который определен точкой (0,0,0) и единичными отрезками в положительных направлениях осей x, y, z.
58. Доказать, что $\int_S d\vec{s} = 0$, если S замкнутая поверхность.

59. Пользуясь формулой Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq h^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ в сторону внешней нормали.

60. Применяя формулу Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ через: а) поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, в сторону внешней нормали; б) сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали.

61. Применяя формулу Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x \cos y \vec{i} - \sin y \vec{j} + (z-1)^2 \vec{k}$ через боковую поверхность цилиндров: а) $x^2 + y^2 = 1$, $z=0, z=2$; б) $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 2$, $z=4$, в сторону внешней нормали.

62. Показать, что для любой замкнутой поверхности S $\int \vec{B} d\vec{s} = 0$, если $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

63. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (z+1)\vec{k}$ через: а) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, в сторону внешней нормали к сфере; б) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, в сторону внутренней нормали к сфере; в) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, в сторону внешней нормали к сфере.

64. Применяя формулу Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через каждую из частей сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, получающихся при пересечении этой сферы плоскостью: а) $x+y+z=0$; б) $x+y+z=1$; в) $x-y+z=0$; г) $x-y+z=1$, в сторону внешней нормали.

65. Найти циркуляцию плоского векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль произвольного замкнутого кусочно гладкого контура L , лежащего в плоскости OXY и ограничивающего область Φ площади S .

66. Указать ошибку в следующих рассуждениях. Уравнение Максвелла для магнитного поля \vec{H} имеет вид: $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, поэтому \vec{H} , как известно, может быть представлено в виде ротора некоторого векторного поля \vec{A} (векторный потенциал): $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$. Применяя теоремы Гаусса и Стокса, получаем:

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec{H} dV = \int_S \vec{H} d\vec{s} + \int_S \nabla \times \vec{A} d\vec{s} = \int_L \vec{A} d\vec{l},$$

но так как $\int_L \vec{A} d\vec{l} = 0$ (усл. все потенциальности поля), то $\vec{A} = \nabla \varphi$.

Значит, $\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla \varphi = 0$, т.е. все магнитные поля обязательно равны нулю!

67. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля

$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль замкнутого контура L , состоящего из отрезка винтовой линии $\vec{r}(t) = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и отрезка прямой, соединяющей точки $B(a, 0, 2\pi b)$ и $A(a, 0, 0)$. причем обход контура совершается так, что по отрезку прямой движение происходит от точки B к точке A .

68. Задано поле сил

$$\vec{F} = -\frac{\vec{i}y}{x^2+y^2} + \frac{\vec{j}x}{x^2+y^2}.$$

Определить работу, совершающую при движении по окружности единичного радиуса против часовой стрелки от 0 до π и по часовой стрелке от 0 до π (окружность лежит в плоскости xy). Напомним, что работа, вообще говоря, зависит от выбора пути.

69. Найти работу силового поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль отрезка L_1 винтовой линии $\vec{r}(t) = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, 2\pi b)$ (не применяя теорему Стокса).

70. Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ плоскостью $x+y+z=1$.

71. Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + (x-z)\vec{k}$ вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскости $x+y+z=a$. Окружность обходится против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2)$.

72. Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = x \cos y\vec{i} + \sin y\vec{j} + (z-1)^2\vec{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + (t/\pi)\vec{k}$:

а) от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(0, 0, 2)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); б) от точки $B(0, 0, 2)$ до точки $C(0, 0, 4)$ ($2\pi \leq t \leq 4\pi$).

73. Найти работу силового поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль отрезка L линии пересечения цилиндроов $x^2+z^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$, проходящего от точки $A(-a, -a, 0)$ через точку $C(0, 0, a)$ до точки $B(a, a, 0)$.

74. Найти скалярный потенциал для гравитационной силы.

75. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = f(r)\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, является потенциальным, и найти потенциал этого поля.

76. Вычислить скалярный потенциал центробежной силы, действующей за единичную массу. Сила направлена радиально от

центра и равна: $\vec{F} = \omega^2 r \vec{r}_0$. Считать, что $\varphi(0)=0$.

77. Является ли поле сил $\vec{F} = i\vec{f}_1(x) + j\vec{f}_2(x) + k\vec{f}_3(x)$ потенциальным? Определить его потенциал, если это возможно.

78. Определить, какие из приведенных полей являются потенциальными:

$$\vec{F} = i \frac{-y}{x^2+y^2} + j \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \vec{F} = i \frac{y}{r} - j \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\vec{F} = ix\vec{f}(r) + jy\vec{f}(r) + kz\vec{f}(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

79. Записать выражение градиента скалярного поля U в цилиндрических координатах. Выразить ротор и дивергенцию векторного поля \vec{A} в цилиндрических координатах.

80. Показать, что якобиан $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}$ перехода к

криволинейной ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 равен произведению коэффициентов Ламэ $h_1 h_2 h_3$ и, следовательно, элемент объема $Idq_1 dq_2 dq_3$ равен $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

81. Выразить единичные векторы сферической системы координат через декартовы.

82. Частица перемещается в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в сферической системе координат.

83. Показать, что в сферической системе координат

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{r}_0 \frac{df}{dr}, \quad \vec{\nabla} \vec{r}_0 f(r) = -\frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr};$$

$$\vec{\nabla}^2 f(r) = -\frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r}_0 f(r) = 0,$$

и вычислить $\vec{\nabla} r^n$, $\vec{\nabla} \vec{r}_0 r^n$, $\vec{\nabla}^2 r^n$.

84. Выразить $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ в сферической системе координат.

85. Используя результат предыдущей задачи, получить формулу

$$-i \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Это – квантовый оператор, соответствующий z -й компоненте момента количества движения.

86. Вычислить интегралы $\oint \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{n}) ds$, $\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} ds$, где \vec{a} – постоянный вектор; \vec{n} – орт нормали к поверхности.

87. Интегралы по замкнутой поверхности $\oint \vec{a} \cdot \vec{\varphi} ds$, $\oint (\vec{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{\varphi} ds$, $\oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{a} ds$ (\vec{b} – постоянный вектор; \vec{n} – орт нормали) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ.

ОТВЕТЫ

4. Система ОХ'Y' не существует в силу инвариантности модуля вектора \vec{A} .

Система ОХ''Y'' существует и повернута на угол $-\pi/2$ относительно ОХУ.

6.1. Используя матрицу вращения (I.25), получим:

$$a) C_2^z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; b) C_2^y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; c) C_3^z = \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d) C_4^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; e) C_6^z = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6.2. a) -I = C_2^z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; b) \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b) -I \cdot C_3^z = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6.3. a) -I \cdot C_2^z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; b) -I \cdot C_2^y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7. \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_z \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -\frac{10}{\sqrt{3}} \\ -\frac{10}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

II. $\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{ij}$, $\delta_{ik}x_k=x_i$, $\delta_{ij}x_jx_j=x_i x_i$, $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}=\delta_{il}$. Следуя правилу суммирования, будем иметь $\delta_{ii}=3$.

15. Выведем правило Крамера для решения системы линейных уравнений $a_{ij}x_j = b_i$ ($i,j=1,2,\dots,n$), где $|a_{ij}| \neq 0$; x_i - неизвестные. Умножим обе части уравнения на A_{ik} и суммируем по i . Получаем: $a_{ij}A_{ik}x_j = b_i A_{ik}$. В силу свойства алгебраического дополнения (см. условие) имеем: $a\delta_{jk}x_j = b_i A_{ik}$ или $ax_k = b_i A_{ik}$, откуда получаем правило Крамера $x_k = \frac{b_i A_{ik}}{a}$.

20. По определению антисимметричного тензора A_{ik} запишем:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_1 = A_{23}$, $A_2 = A_{31}$, $A_3 = A_{12}$ или, иначе, $A_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_{kl}$; A_i - вектор согласно теореме о свертке.

$$27. a^2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}).$$

$$46. a) x=y=z; b) x=y=z=0.$$

49. Согласно определению градиента имеем:

$\text{grad } U(M) = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}(M), \frac{\partial U}{\partial y}(M), \frac{\partial U}{\partial z}(M) \right\} = \left\{ yz, xz, xy \right\}_{M(-2,3,4)} =$
 $= \{12, -8, -6\}$. Единичным вектором, сонаправленным с \vec{a} , является вектор $\vec{l} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{13} \{3, -4, 12\}$. Следовательно, получаем:
 $\frac{\partial U}{\partial l}(M) = -\frac{1}{13}$.

$$50. \text{grad } (r^{-2}) = -2 \frac{1}{r^3} \frac{\vec{r}}{r}.$$

52. Согласно определению дивергенции векторного поля находим:

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = (1 + 2y + 3z^2)_{M(-2,4,5)} = 84.$$

53. Согласно определению дивергенции векторного поля находим:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} (f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y} (f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z} (f(r)z) = \\ &= f'(r) \frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{z^2}{r} + f(r) = \\ &= f'(r)r + 3f(r). \end{aligned}$$

Из условия $\text{div } \vec{a} = 0$ (поле без источников) следует, что

$f'(r)r + 3f(r) = 0$ или $\frac{df}{f} = -\frac{3dr}{r}$. Получаем: $f(r) = \frac{C}{r^3}$, где C – произвольная постоянная.

54. Согласно определению ротора имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} \Big|_M = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}.$$

55. Запишем поле в виде:

$$\vec{a} = f(r) \vec{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} f(r) x_k = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{x_j}{r} x_k + f(r) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{x_j}{r} x_k + f(r) \delta_{jk} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, ротор любого сферического векторного поля равен нулю, т.е. сферическое векторное поле является безвихревым.

59. Чтобы сделать возможным применение формулы Гаусса, дополним заданную поверхность S_1 (боковую поверхность конуса) до замкнутой кусочно-гладкой поверхности S основанием конуса – кругом S_2 : $x^2 + y^2 \leq h^2$, $z = 0$. Применим формулу (5.11) к области V , ограниченной поверхностью S :

$$\iint_{S_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds + \iint_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz.$$

На круге S_2 имеем: $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + h^2 \vec{k}$, $\vec{n} = \vec{k}$, поэтому

$$\iint_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \iint_{S_2} h^2 ds = \pi h^4.$$

В цилиндрических координатах ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$) уравнение конической поверхности примет вид: $z = \rho$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho \int_0^{\rho} (\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + z) dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho(h-\rho)(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} \int_0^h \rho d\rho = \frac{\pi}{2} h^4. \end{aligned}$$

Искомый интеграл на боковой поверхности S_1 равен разности тройного интеграла и поверхностного интеграла по кругу S_2 :

$$\iint_{S_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \frac{\pi}{2} h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4.$$

60. а) $1/6$; б) $4\pi/3$.

61. а) 0 ; б) 0 .

63. а) $5\pi/3$; б) $-5\pi/3$; в) $2\pi/3$.

64. а) $0,0$; б) $-2\pi/3\sqrt{3}$; $2\pi/3\sqrt{3}$;

в) $0,0$; г) $-10\pi\sqrt{3}/81$; $10\pi\sqrt{3}/81$.

65. Сначала вычислим ротор данного поля: $\text{rot } \vec{a} = 2\vec{k}$.

Далее, используя формулу Стокса и учитывая, что для области $S \vec{n} = \vec{k}$, находим:

$$\oint_L (\vec{a} d\vec{r}) = \iint_S (2\vec{k} \cdot \vec{n}) ds = 2 \iint_S ds = 2S.$$

67. Находим $\text{rot } \vec{a} = 2\vec{k}$. Пусть поверхность S , натянутая на контур L , состоит из части S_1 — цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, и круга S_2 : $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 2\pi$. На цилиндрической поверхности S_1 имеем: $\text{rot } \vec{a} \perp \vec{n}$, и поэтому $(\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) = 0$. На поверхности S_2 имеем: $\vec{n} = \vec{k}$, и поэтому $(\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) = 2\vec{k} \cdot \vec{k} = 2$. Применяя к полю формулу Стокса, получим:

$$\oint_L (\vec{a} d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \iint_{S_1} 0 + \iint_{S_2} 2 ds = 2S(S_2) = 2\pi a^2.$$

69. Непосредственно вычисляя криволинейный интеграл второго рода, выражющий работу силового поля \vec{F} вдоль кривой L_1 в заданном направлении, находим:

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} (\vec{F} d\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} (-a \sin t \cdot i + a \cos t \cdot j + bt \vec{k}) (-a \sin t \cdot i + a \cos t \cdot j + bt \vec{k}) dt = \\ &= 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2. \end{aligned}$$

70. $-2\pi\sqrt{3}/3$.

71. $\pi\sqrt{3}(1-a^2/3)$.

72. а) $2/3$; б) $26/3$.

73. Данное поле является потенциальным полем, так как $\text{rot } \vec{a} = 0$.

Здесь $\vec{F} = \text{grad } U$, где $U = xy^2 + \frac{z^2}{2}$. Отсюда следует, что работа силы \vec{F} вдоль кривой L равна разности значений потенциала в точках В и А:

$$\oint_{L_1} (\vec{F} d\vec{r}) = U(B) - U(A) = a^3 - (-a^3) = 2a^3.$$

79. Полагая в формуле (9,3) $q_1 = p$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $\vec{a}_p = \vec{a}_p$,

$\vec{a}_2 = \vec{a}_\varphi$, $\vec{a}_3 = \vec{a}_z$ и используя выражения параметров Ламэ в цилиндрических координатах ($h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$), получаем:

$$\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{i}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{i}_z.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Математический энциклопедический словарь. М., 1988.
2. СОКОЛЬНИКОВ И.С. Тензорный анализ. М., 1971.
3. АРФЕН Г. Математические методы в физике. М., 1970.
4. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Теория поля. М., 1973.
5. МАК-КОННЕЛ А.Дж. Введение в тензорный анализ. М., 1963.
6. КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Курс математического анализа. М., 1981. Т.1,2.
7. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Курс математического анализа. М., 1973. Т.1,2.
8. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики. М., 1974. Т.1-3.
9. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т.1-3.
10. БУДАК Б.М., ФОМИН С.В. Кратные интегралы и ряды. М., 1967.
11. ДЕМИДОВИЧ Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1977.
12. БАТЫГИН В.В., ТОПТЫГИН И.Н. Сборник задач по электродинамике . М., 1970.

Борис Викторович Мангазеев
Александр Диомидович Афанасьев

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
ДЛЯ ФИЗИКОВ
Учебное пособие

Редактор Л.П.Назарова

Темплан 1991 г. Поз.3.

Подписано в печать 16.12.91. Формат 60x90 1/16. Бумага писчая.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 5,8. Уч.-изд.л. 5,1. Тираж 500 экз
Зак. 6 .

Редакционно-издательский отдел
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Татарина, 36