ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
Лаборатория теоретической физики

На правах рукописи

Коренблит
Сергей Эммануилович

МЕТОД ВНЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИОСТА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Специальность 01.04.02. - теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор
физико-математических наук
профессор
Юрий Викторович Парфенов

Иркутск 1990

СКор

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 1962 году Фубини и Строффолини /1,2/ в поисках уравнения на траекторию Редже $\alpha(W)$ исследовали уравнение для спектральной плотности по передаче импульса резольвенты уравнений Липпмана-Швингера (ЛШ) и Бете-Солпитера (БС) с потенциалом, обладающим в импульсном представлении спектральной зависимостью от этой передачи импульса t:

$$\langle\vec{q}|V|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 m}\int\limits_{\mu_0}^{\infty} d\nu\,\frac{\Sigma(\nu)}{(\nu^2-t)} + (\textit{вычитания}), \tag{0.1}$$

где: $\mu_0>0$, $p=|\vec{p}|, q=|\vec{q}|$, $c=\hbar=1$,

$$t = -(\vec{q}-\vec{p})^2 = 2qp\cos\vartheta_{qp} - q^2 - p^2. \tag{0.2}$$

Они показали, что уравнения, возникающие в результате вычисления скачка по t от неоднородных интегральных уравнений ЛШ и БС для резольвенты:

$$G_V(W) = G_O(W) + G_O(W)\,V\,G_V(W) = \left[W - H_V\right]^{-1}, \tag{0.3}$$

$$H_V = H_O + V, \tag{0.4}$$

$$G_V(W) = G_O(W) + G_O(W)\,T(W)\,G_O(W), \tag{0.5}$$

или для T-матрицы:

$$T(W) = V + V\,G_O(W)\,T(W), \tag{0.6}$$

$$T(W) = V + V\,G_V(W)\,V, \tag{0.7}$$

допускают при $t=\nu^2\to\infty$ асимптотические решения вида:

$$D(\nu;-ip,b^2,-iq) \cong \nu\, t^{\alpha(W)}\, R_\alpha(W,p^2)\, R_\alpha(W,q^2), \tag{0.8}$$

а получающиеся уравнения на "вычет" $R_\alpha(W,p^2)$ тождественны однородным парциальным уравнениям ЛШ и БС соответственно, с угловым моментом $l=\alpha(W)$.

Таким образом, вся информация о связанных и резонансных состояниях, отвечающих полиномиальным вычитаниям в спектральных по t представлениях резольвенты или Т-матрицы:

$$\langle\vec{q}|T(W)|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 m}\int\limits_{\mu_0}^{\infty} d\nu\,\frac{D(\nu;-ip,b^2,-iq)}{(\nu^2-t)} + (\textit{вычитания})\ ,\tag{0.9}$$

не уничтожается операцией скачка по t:

$$disc_t\Big\{t\Big\} \equiv \Big\{t+i0\Big\} - \Big\{t-i0\Big\}\ ,\tag{0.10}$$

но включена в спектральную плотность D иначе чем в саму резольвенту или Т-матрицу, поскольку, вид уравнения для D не зависит от вычитаний в (0.1) и (0.9).

Одна из целей этой диссертационной работы,— указать простой способ извлечения всей информации о дискретном и непрерывном спектрах для широкого класса одночастичных гамильтонианов H_V непосредственно из полувнеэнергетической спектральной плотности Т-матрицы по передаче импульса $D(\nu;b,b^2,u)$, не нуждающийся ни в решении каких либо дополнительных уравнений (типа N/D метода), ни в процедуре восстановления функций дисперсионным интегралом, ни в операции аналитического продолжения по угловому моменту l.

Возникающая динамическая схема принципиально отличается как от стандартной техники Липпмана-Швингера /3-6/,так и от метода Мандельстама /6,7/, и, объединяя их достоинства: линейность с одной стороны и вольтерровый характер динамических уравнений,— с другой, освобождает от проблем неоднозначности решений и вычитаний. Все вопросы существования и единственности также легко решаются линейностью и вольтерровостью динамических уравнений. Другой ее привлекательной чертой является отсутствие необходимости обращаться к полной системе собственных функций гамильтониана H_V, в том числе и при вычислении сдвигов энергетических уровней под действием малого возмущения исходного потенциала (0.1).

В бесспиновом случае в предлагаемой схеме обнаружена интересная связь между решениями для одного и того же локального потенциала $V(\vec{x}_N)$ в пространствах разной размерности N. Эта связь сводит изучение резольвенты в пространстве R_N к изучению резольвенты для того же потенциала в R_2, уравнение для которой проще.

Как известно, все спектральные характеристики гамильтониана H_V аккумулирует в себе детерминант его резольвенты /8,9/:

$$d(W) = det\left[G_0(W)\ G_V^{-1}(W)\right] = det\left[I - G_0(W)\ V\right], \tag{0.11}$$

$$\left[d(W)\right]^{-1} = det\left[I + V\ G_V(W)\right] = det\left[I + T(W)\ G_0(W)\right], \tag{0.12}$$

выражающийся через них формулой /9/:

$$d(W) = \prod_{n=1}^{n^{max}} \left[1 - \frac{W}{W_n}\right] exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\varepsilon\ \frac{\eta(\varepsilon)}{(\varepsilon-W)}\right\}. \tag{0.13}$$

Нули W_n определяют дискретный спектр ,а непрерывный спектр характеризуется функцией спектрального сдвига $\eta(\varepsilon)$, связанного с S-матрицей /9/:

$$\eta(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\ ln\left[det\ S(\varepsilon)\right]. \tag{0.14}$$

Для локальных потенциалов:

$$\langle\vec{x}|V|\vec{y}\rangle = V(\vec{x})\ \delta_3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{0.15}$$

детерминант $d(W)$ неопределен и нуждается в регуляризации. Простейшая из них состоит в отбрасывании расходящихся следов степеней оператора $G_0(W)\ V$ в выражении для $ln\left[d(W)\right]$ /8,9/,когда

$$ln\left[d(W)\right] = Tr\left\{ln\left[I - G_0(W)\ V\right]\right\} \tag{0.16}$$

заменяется на регуляризованное выражение:

$$ln\left[d_R(W)\right] = Tr\left\{ln\left[I - G_0(W)\ V\right] + G_0(W)\ V\right\}. \tag{0.17}$$

В квантовополевых расчетах используются иные разнообразные схемы регуляризации: по Паули-Вилларсу, с помощью дзетта-функции Римана для оператора H_V и другие /10/.

В тоже время известно /3-6/, что при наличии симметрии у гамильтониана H_V, например, сферической симметрии в R_N:

$$V(\vec{x}_N) = V(r_N) \;\; ; \;\; r_N = |\vec{x}_N| = \left[\sum_{k=1}^{N} x_k^{\,2}\right]^{1/2} ; \tag{0.18}$$

$$H_0^{(N)} = -\vec{\nabla}_N^{\,2} = -\sum_{k=1}^{N}\left[\partial/\partial x_k\right]^2 , \tag{0.19}$$

резольвента $G_V^{(N)}(W)$ допускает разложение по неприводимым представлениям группы вращений $SO(N)$, имеющее в координатном представлении вид:

$$\langle\vec{x}|G_V^{(N)}(W)|\vec{y}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h(N,l)\; C_l^{\lambda}(\vec{n}\circ\vec{v})}{\Omega_N\; C_l^{\lambda}(1)} \; \frac{G_{lV}^{(N)}(b;r,r')}{(rr')^{(N-1)/2}} , \tag{0.20}$$

где: $\vec{x}=r\vec{n}$; $\vec{y}=r'\vec{v}$; $b=b(W)$; а $h(N,l)$-размерность представления группы $SO(N)$ /11/, Ω_N-поверхность единичной сферы в R_N, $\lambda=\lambda_N$,- приведены в (П.I.3),(П.I.4). Степень представления $l=0,1,2,\ldots$ определяет собственное значение угловой части (П.I.2) оператора Лапласа (0.19):

$$\vec{\nabla}_N^{\,2} = r^{1-N}\,\partial_r\, r^{N-1}\partial_r + r^{-2}\,\frac{1}{2}\left[L\circ L\right] , \tag{0.21а}$$

где, в обозначениях (П.I.7)

$$r^{1-N}\,\partial_r\, r^{N-1}\,\partial_r = r^{(1-N)/2}\,\partial_r^{\,2}\, r^{(N-1)/2} - a_N(a_N-1)r^{-2}, \tag{0.21б}$$

$$L_{kj} = x_k(\partial/\partial x_j) - x_j(\partial/\partial x_k) \; ; \tag{0.22а}$$

и, на функциях канонического базиса (П.I.I) /11/:

$$\Delta^{(N)}_{(\vartheta_1\div\vartheta_{N-1})} = \frac{1}{2}\left[L\circ L\right] \Rightarrow -\,l(l+N-2) \; . \tag{0.22б}$$

Решающее значение для всего дальнейшего имеет тот факт, что детерминант (0.11), с учетом (0.16),(0.20) и (П.I.5), может быть формально представлен в виде бесконечного произведения парциальных детерминантов:

$$d^{(N)}(W) = \prod_{l=0}^{\infty}\left[F_l^{(N)}(b)\right]^{h(N,l)} , \tag{0.23}$$

определяемых такими же выражениями (0.11),(0.12) с парциальными резольвентами:

$$F_l^{(N)}(b(W)) = det\left[I_l - G_{l0}^{(N)}(W)\ V\right], \tag{0.24a}$$

$$\left[F_l^{(N)}(b(W))\right]^{-1} = det\left[I_l + G_{lV}^{(N)}(W)\ V\right]. \tag{0.24б}$$

Для Дираковского гамильтониана при N=3 /13-15/ (в обозначениях (П.I.54),(П.I.55)):

$$H_0 = (\vec{\alpha}\circ\vec{P}) + \beta\, m, \tag{0.25}$$

$$\vec{P} = -\,i\vec{\nabla}_x = -\,i\sum_{k=1}^{N}\vec{e}_k\ (\partial/\partial x_k), \tag{0.26}$$

со сферически симметричным стационарным полем соответствующее разложение по представлениям группы SU(2) имеет вид /3,6,13-15/

$$\langle\vec{x}|G_V(W)|\vec{y}\rangle = \frac{1}{rr'}\sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty}\ \sum_{\xi=\pm 1}\Pi_{\varkappa_\xi}(\vec{n}\circ\vec{v})\ G_{\varkappa_\xi V}(b;r,r'), \tag{0.27}$$

где: j- полный угловой момент; $\varkappa=\varkappa_\xi=\xi(j+\frac{1}{2})$; $l_\xi=j+\frac{\xi}{2}$; $b=b(W)$; $\Pi_\varkappa(\vec{n}\circ\vec{v})$- проектор (П.I.52) на состояние $|j,l_\xi\rangle$, $\xi=\pm 1$.

Для детерминанта из (0.16),(0.27), с учетом (П.I.53), тогда получается представление:

$$d_{Dir}(W) = \prod_{0\neq\varkappa=-\infty}^{\infty}\left[F_\varkappa(b)\right]^{2|\varkappa|}, \tag{0.28}$$

$$F_\varkappa(b(W)) = det\left[I_\varkappa - G_{\varkappa 0}(W)\ V\right]. \tag{0.29}$$

Парциальные детерминанты (0.24),(0.29),— детерминанты (функции) Иоста, существуют для любого локального потенциала $V(r)$, сингулярного при r=0 не более чем соответствующий свободный гамильтониан H_0 и достаточно быстро исчезающего при $r\to\infty$ /3-7,16-17/. Они являются фредгольмовскими определителями для парциальных интегральных уравнений ЛШ (0.3),(0.6) и также однозначно выражаются через спектральные характеристики парциальных гамильтонианов представлением (0.13), в котором $\eta(\varepsilon)$ = = $\eta_l(\varepsilon)$,— парциальная фаза рассеяния /3,17/.

Отмеченная выше неопределенность $d(W)$ теперь выражается в расходимости произведений в (0.23),(0.28), или суммы для

$ln\Big[\mathrm{d}(W)\Big]$ при $l\to\infty$, $æ\to\pm\infty$, и несущественна, если интересоваться только парциальными характеристиками спектра H_V.

В тоже время, полный детерминант $\mathrm{d}(W)$ возникает при вычислении различных квантовых эффектов во внешнем поле $V(r)$ или при квазиклассическом квантовании теории поля в окрестности не нулевых классических решений.

Например, детерминант вида (0.23), построенный по операторам (0.18),(0.19), определяет вероятность распада метастабильного вакуума /18/ скалярной теории

$$S(\Phi) = \int d^Nx \left[\tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}_N \Phi)^2 + U(\Phi)\right], \tag{0.30}$$

отвечающего ее нетривиальному классическому решению (баунсу) $\bar{\Phi}(r)$: $\delta S(\bar{\Phi}) = 0$. В этом случае:

$$V(r) = U''(\bar{\Phi}(r)) - U''(\bar{\Phi}(r{=}\infty)); \quad W = U''(\bar{\Phi}(r{=}\infty)). \tag{0.31}$$

Наличиие N трансляционно-инвариантных нулевых мод /18,19/ у $\mathrm{d}^{(N)}(W)$ связано с обращением в нуль только одного парциального детерминанта, с $l=1$: $\Big[F^{(N)}_{l=1}(b(W))\Big]^N$, отвечающего векторному представлению группы $SO(N)$. Таким образом, только этот детерминант необходим для их выделения из (0.23).

Детерминант (0.29) для Дираковского гамильтониана H_V (0.25),(0.26),(0.18) связан с полным зарядом, индуцированным поляризацией вакуума внешним полем $V(r)$ /20/:

$$\delta Q' = \int d^3x\, \rho_{vac.pol}(\vec{x}) = \frac{ie}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} dW\, Tr\Big\{ \mathrm{G}_V(W) - \mathrm{G}_0(W)\Big\} = \frac{ie}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} dW\cdot$$

$$\cdot(\partial/\partial W)\, ln\Big[\mathrm{d}(W)\Big]. \tag{0.32}$$

Полный функциональный детерминант также выражается через $\mathrm{d}(W)$:

$$det\left[\frac{i\partial_t - \mathrm{H}_V}{i\partial_t - \mathrm{H}_0}\right] \Rightarrow exp\Big\{T\int_{-\infty}^{\infty} dW\, ln\Big[\mathrm{d}(W)\Big]\Big\}, \quad T\to\infty \tag{0.33}$$

и определяет энергию фермионного вакуума и вероятность рождения пар во внешнем поле $V(r)$ /21/.

В этих примерах расходимость в (0.23),(0.28) выделяется и устраняется процедурой перенормировки /10,18-21/, для проведения которой необходим либо явный вид функции Иоста, известный в очень редких случаях /20/, либо, по крайней мере, интегральное представление, определяющее в общем виде ее зависимость от l или $\varkappa_\xi$.

Центральным результатом этой диссертационной работы является новый класс таких интегральных представлений. Они представляют детерминант $F_l(b)$ во всей области аналитичности по переменным l и b в квадратурах от полувнеэнергетической спектральной плотности Т-матрицы, аналитически продолженной по переменным q и p из области непрерывного спектра в область связанных состояний :

$$D(\nu;-ip,b^2;-iq) \Rightarrow \tilde{D}(\nu;\rho,b^2;u) \Rightarrow \tilde{D}(\nu;b,b^2;u). \qquad (0.34)$$

Причем, в обеих областях спектральная плотность подчиняется линейным интегральным уравнениям вольтерровского типа и определена однозначно.

Таким образом, при построении детерминантов (0.23),(0.24) или (0.28),(0.29) удается вообще избежать решения для H_V задачи на собственные значения с последующей громоздкой процедурой их прямого перемножения /18,19/. При этом проблема нулевых мод абсорбируется, как в вышеприведенном примере, в низшие парциальные детерминанты с $l=0,1$.

Общеизвестна теоретико-групповая интерпретация парциальной амплитуды $T_l(k)$ или S-матрицы /3-6/:

$$S_l(k) \equiv exp\left[2i\eta_l(k)\right] \equiv 1 + 2iT_l(k) \equiv F_l(ik)/F_l(-ik), \qquad (0.35)$$

как коэффициента разложения полной амплитуды рассеяния (0.9) по зональным сферическим функциям группы SO(N), действующей как группа движений однородного пространства,— сферы S^{N-1}=

$= SO(N)/SO(N-1)$ /11/.

Предъявленные в этой диссертационной работе интегральные представления доставляют аналогичную интерпретацию непосредственно для детерминанта Иоста $F_l(b)$. Они имеют вид проекции на свободное решение Иоста в импульсном представлении коэффициента разложения спектральной плотности $\tilde{D}$ по зональным сферическим функциям группы гиперболических вращений $SO(1,N-1)$ (или $SH(N)$ /11/), действующей как группа движений пространства Лобачевского $\Lambda^{N-1} = SO(1,N-1)/SO(N-1)$ /11/. Появление гиперболических вращений связано, очевидно, с мнимостью угла рассеяния, отвечающего разрезу $t>0$: при $t=v^2$; $q=iu$; $p=i\rho$ из (0.2) следует

$$\cos\vartheta_{qp} = \frac{q^2+p^2+t}{2qp} \Rightarrow \frac{u^2+\rho^2-v^2}{2u\rho} = \mathrm{T}(u\rho|v) = ch\,\tau_{u\rho} \geqslant 1, \qquad (0.36)$$

при $u,\rho \geqslant 0$; $(u-\rho) \geqslant v \geqslant 0$.

В наиболее простом - регулярном бесспиновом случае при $N=3$ рекламируемое представление имеет вид:

$$F_l(b) = \lim_{\rho\to b} F_l(\rho,b);$$

$$F_l(\rho,b) = 1 + \int\limits_{\mu_0}^{\infty} dv \int\limits_{\rho+v}^{\infty} du\, P_l\left[\mathrm{T}(u\rho|v)\right] \frac{\tilde{D}(v;\rho,b^2;u)}{(u^2-b^2)} \left[\frac{\rho}{u}\right]^l, \qquad (0.37)$$

где нужно положить $\rho\Rightarrow b$. Указанная интерпретация и прозрачный смысл весовой функции выгодно отличают это представление от принципиально иного представления де Альфаро, Редже, Россетти /17,22/, о весовой функции которого, помимо нелинейного интегрального уравнения ничего не известно.

При $\rho\neq b$ правая часть (0.37) представляет так называемую внеэнергетическую функцию Иоста (ВФИ) $F_l(\rho,b)$. Эта функция впервые была введена в работе /23/ при $l=0$ специально для класса юкавских потенциалов:

$$V(r) = (2mr)^{-1} \int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu \; e^{-\nu r} \; \Sigma(\nu), \qquad (0.38)$$

отвечающего (0.1) в импульсном представлении. Общие определения для произвольного потенциала и момента были даны в /24/. Одно из них связывает ВФИ с внеэнергетическим решением Иоста (ВРИ) $J_l(\rho,b;r)$, удовлетворяющим неоднородному уравнению Шредингера (УШ) (см.ниже (2.1)):

$$F_l(\rho,b) = \lim_{r\to 0} \left[\frac{\rho r}{2}\right]^l \sqrt{\pi} \; \left[\Gamma(l+\tfrac{1}{2})\right]^{-1} J_l(\rho,b;r). \qquad (0.39)$$

Другое фактически сводится к анзацу для полувнеэнергетической (half-off-shell) парциальной T-матрицы:

$$T_l^{(\pm)}(q,k) = \left[\frac{k}{q}\right]^l \left[F_l(iq,-ik) - F_l(-iq,-ik)\right] \left[2iF_l(\mp ik)\right]^{-1}. \qquad (0.40)$$

сравнение которого ,при $q=k$, с (0.35) сразу показывает, что

$$F_l(\mp ik) = F_l(\mp ik,-ik). \qquad (0.41)$$

Для дальнодействующих потенциалов это соотношение модифицируется из-за сингулярности ВФИ на энергетической поверхности $q=k$ /16,25-28/.

Увеличение числа переменных у детерминанта Иоста было инспирировано, с одной стороны, важной ролью аналитических свойств двухчастичной T-матрицы (0.40) в трехчастичных задачах /4,5,28,29/, а, с другой,— стремлением получить для него замкнутое динамическое уравнение /30/. Однако, заметно упростить это уравнение удалось только для потенциалов вида (0.38). Исходя из определения (0.39) это было сделано сначала для $l=0$ в /23/, а затем для комплексных l в /31,32/. Альтернативный подход на основе анзаца (0.40) и парциального уравнения ЛШ был развит в /33,34/ для целых l. Его существенно модифицированный вариант, предложенный независимо в /31,32,35,36/, применим при любых комплексных l и позволяет значительно расширить круг рассматриваемых гамильтонианов. Оба эти подхода, эквивалентные, разумеется, для локальных несингулярных потенциалов, успешно дополняют друг друга, как показано ниже, при переходе к сингулярным и нелокальным потенциалам, или при наличии спин-орбитального взаимодействия.

Нетривиальное наблюдение, лежащее в основе данной диссертационной работы состоит в том, что возникающие уравнения для ВФИ, ВРИ являются своеобразными парциальными проекциями уравнений для спектральной плотности Т*-матрицы* $\tilde{D}$ *в указанном выше групповом смысле* (0.37).

Основная цель дальнейшего изложения: дать обобщения метода ВФИ и установить представления вида (0.37) для следующих гамильтонианов $H_V = H_O + V$:

I. Гамильтониан (0.19),(0.18): $H_O = -\vec{\nabla}_N^{\,2}$, с регулярным потенциалом:

$$V(\vec{x}) = \int d^N q\, e^{i(\vec{q}\circ\vec{x})}\, 2\left[\pi\,\Omega_N\right]^{-1} \int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \Sigma^{(N)}(\nu)\, \left[\nu^2+\vec{q}^{\,2}\right]^{-1}; \qquad (0.42)$$

II. Гамильтонианы Дирака при $N=3$ (0.25),(0.18),(0.38):

$$H_O = (\vec{\alpha}\circ\vec{P}) + \beta\, m,$$

$$H_V = H_O + I\ V \ , \qquad (0.43а)$$

$$H_V = H_O + \beta\ V \qquad (0.43б)$$

III. Гамильтониан, учитывающий релятивистские поправки к потенциалу $V(r)$ (0.38) при $N=3$:

$$H_V = \vec{P}^2(2m)^{-1} + U(\vec{x})\ , \qquad (0.44)$$

$$U(\vec{x}) = V(r) - \frac{1}{2}\,(2m)^{-2}\left[(\vec{\sigma}\circ\vec{P}),\left[(\vec{\sigma}\circ\vec{P}),V(r)\right]\right]. \qquad (0.43)$$

IV. Гамильтониан вида (0.44) с нелокальным взаимодействием U:

$$U(\vec{x}) = V_O(r) + (2m)^{-2}\left[\vec{P}^2\, V(r) + V(r)\,\vec{P}^2\right], \qquad (0.46)$$

и с $V(r)$ и $V_O(r)$ вида (0.38).

V. Гамильтониан типа I со степеной сингулярностью потенциала

$$V(r) \approx g\, r^{-2-2\sigma}; \quad \sigma \geqslant 0; \quad \text{при } r \to 0; \tag{0.47}$$

также может быть включен в предлагаемую схему. Регуляризация этих потенциалов в смысле обобщенных функций /37,38/ непосредственно отвечает вычитаниям в представлении (0.1), не меняющим основных ее урвнений.

VI. Метод ВФИ допускает приложения к квазипотенциальным уравнениям в квантовой теории поля, в частности, к уравнениям релятивистской гамильтоновой теории /39/. Однако, известный произвол в решениях конечно-разностных уравнений пока не позволяет замкнуть здесь схему точным эквивалентом представления (0.37).

Тем не менее, предлагаемый метод приводит к последовательному определению эффективного локального потенциала, описывающего квантовополевые вакуумные поправки. Это позволяет, например, с хорошей точностью воспроизвести таким потенциалом Лэмбовские сдвиги уровней атома водорода и, в пренебрежении конфайментом, установить общий вид такого потенциала для тяжелого кварконня /40/. Роль невозмушенного потенциала в этих задачах играет потенциал Кулона, для которого спектральная плотность $\tilde{D}$ оказывается простой элементарной функцией /35,36,40/.

Отмеченная выше аналитичность по угловому моменту позволила обобщить на комплексные l известные уравнения обратной задачи рассеяния. Для восстановления потенциала по скачку S-матрицы на левом разрезе /41-43/ это сделано в работах /31,32/, для уравнений Марченко-Блажека в присутствии дискретного спектра /42/,— в работе /44/.

Представления типа (0.37) могут быть полезны при изучении связей между одномерной (радиальной) и N-(трех-)мерной обратной задачей /43,45,46/, поскольку приводят к новым интересным уравнениям и представлениям для оператора Иоста на единичной сфере введенного в /36/.

В главе I из уравнений Липпмана-Швингера для перечисленных выше гамильтонианов I-V выводятся основные динамические уравнения для спектральной плотности по передаче импульса. Доказывается существование их решений и возможность аналитического продолжения.

В главе 2 дается обобщение метода ВФИ для гамильтонианов I-V. Выводятся уравнения для внеэнергетических функций и решений Иоста, и резольвентных ядер. Получены их интегральные представления через продолженную спектральную плотность T-матрицы по передаче импульса, факторизующие зависимость от квантовых чисел углового и полного момента. Формулируются процедуры регуляризации и перенормировки, определяющие ВФИ для сингулярного, нелокального и спин-орбитального взаимодействий.

В главе 3 проведен анализ аналитических свойств ВРИ, ВФИ, и резольвентных ядер, на основе которого получен ряд соотношений, используемых при обобщении на комплексные l уравнений обратной задачи рассеяния для гамильтонианов типа I,II,III,V.

В главе 4 рассмотрено вычисление сдвига энергетических уровней в методе ВФИ. Получены новые интегральные представления для решений кулоновской задачи. Представлен метод определения из первых принципов эффективного локального потенциала взаимодействия с длинноволновыми вакуумными флуктуациями калибровочного поля. Показана применимость метода ВФИ к различным вариантам квазипотенциальных уравнений.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

В приложении П.I собрано большинство используемых в тексте формул и свойств специальных функций и их достаточно простые следствия. В остальных приложениях, П.2-П.8, кроме вспомогатель ных П.4 и П.8, получен ряд новых интегральных формул, представляющих самостоятельный интерес.

ГЛАВА I. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ПО ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСА И ЕЕ СВОЙСТВА

I.I. Уравнения для спектральной плотности

Цель этого параграфа — вывести уравнения для спектральной плотности T-матрицы по передаче импульса, лежащие в основе развиваемой динамической схемы.

Для гамильтонианов типа I-V Введения эта процедура в основном повторяет операции работ /1,2/, отличаясь только сложностью технических деталей, вынесенных в приложения П.2, П.4 .

1.Для гамильтониана типа I необходимо подставить в уравнение ЛШ (0.6) в обкладках

$$\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \delta_N(\vec{q}-\vec{p});\ \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = exp\left[-\tfrac{1}{2}i\pi a_N\right]\, e^{-i(\vec{p}\circ\vec{x})}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}, \qquad (1.1)$$

спектральные представления типа (0.1),(0.9): для потенциала:

$$\langle\vec{q}|V|\vec{p}\rangle = \frac{2}{\pi\,\Omega_N}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \frac{\Sigma^{(N)}(\nu)}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]} + (\textit{вычитания}), \qquad (1.2)$$

и для T-матрицы:

$$\langle\vec{q}|T^{(N)}(-b^2)|\vec{p}\rangle = \frac{2}{\pi\,\Omega_N}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \frac{D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]} + (\textit{вычитания}), \qquad (1.3)$$

и вычислить скачек (0.10) по передаче импульса $t = -(\vec{q}-\vec{p})^2$.

Используемое в этих вычислениях представление для интеграла по единичной сфере в R_N, обобщающее известное выражениее для $N=3$ (П.I.40) /7/, доказано в (П.2.4). При $N\geqslant 2$, и

$$X_\gamma = \frac{q^2+k^2+\gamma^2}{2qk};\ Y_\mu = \frac{p^2+k^2+\mu^2}{2pk};\ Z_\nu = \frac{q^2+p^2+\nu^2}{2qp}; \qquad (1.4)$$

его удобно представить в виде: $\vec{q}=q\vec{æ}$; $\vec{p}=p\vec{v}$; $\vec{k}=k\vec{n}$; $a_N = a$;

$$\int d\Omega_N(\vec{n}) \left[\gamma^2+(\vec{q}-\vec{k})^2\right]^{-1} \left[\mu^2+(\vec{k}-\vec{p})^2\right]^{-1} =$$

$$= \frac{(N-2)\Omega_N}{2k^{N-2}} \int\limits_{\tau^+(k;q,\gamma;\mu,p)}^{\infty} d\nu^2 \left[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\right]^{a} \frac{\left[k^2(\nu^2-\tau^+)(\nu^2-\tau_-)\right]^{-a-\frac{1}{2}}}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]} \; ; \qquad (1.5)$$

где: $\Omega_N=2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$; $a_N=(3-N)/2$; а $\tau_{\pm}^{+}$ и Δ приведены в (П.4.I), (П.4.IO),(П.4.I2). Используя формулу перестановки (П.4.I8), можно придать правой части уравнения (0.6) такой же спектральный вид (1.3) как у левой части и получить уравнение /35,36/:

$$D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq) = \Sigma^{(N)}(\nu) - 4^{a}(N-2) \int\limits_{\mu_o}^{\nu-\mu_o} d\gamma\, \overset{(N)}{\Sigma}(\gamma) \int\limits_{\mu_o}^{\nu-\gamma} d\mu \;\cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\nu^2}{\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)}\right]^{a} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} d\eta \frac{D^{(N)}(\mu;-ip,b^2,-i\underline{k}(\eta))}{\left[\underline{k}^2(\eta)+b^2\right](1-\eta^2)^{a+\frac{1}{2}}} \; ; \qquad (1.6)$$

где: $N\geqslant 2$; $a=a_N$

$$2\nu^2\, \underline{k}^2(\eta) = \nu^2(\nu^2-\mu^2-\gamma^2) + q^2(\nu^2+\mu^2-\gamma^2) + p^2(\nu^2-\mu^2+\gamma^2) +$$

$$+ \eta\left[\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\right]^{\frac{1}{2}} \equiv 2\nu^2\, \underline{k}^2(\eta;\nu;\mu,\gamma;q,p). \qquad (1.7)$$

Для одной и той же функции $V(r_N)$ (0.18) при различных размерностях r_N и r_L решения этого уравнения оказываются связаны между собой интегральным преобразованием Вейля: $L,N\geqslant 2$;

$$D^{(L)}(\nu;\cdots) = \frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(L/2)}\, 2\nu \left[\frac{d}{d\nu^2}\right]^{n} \int\limits_{\mu_o}^{\nu} \frac{d\gamma(\nu^2-\gamma^2)^{a_L-a_N+n-1}}{\Gamma(a_L-a_N+n)}\, D^{(N)}(\gamma;\cdots); \qquad (1.8)$$

где целое число n ограничено только условием сходимости интеграла: $n\geqslant max\ [(L-N)/2;0]$. Например, при $L=N+2n$ (1.8) сводится к равенству:

$$D^{(N+2n)}(\nu;\cdots) = \frac{\Gamma\left[\frac{N}{2}\right]}{\Gamma\left[n+\frac{N}{2}\right]}\, 2\nu \left[\frac{d}{d\nu^2}\right]^{n} \frac{D^{(N)}(\nu;\cdots)}{2\nu} . \qquad (1.9)$$

Для борновского члена: $D^{(N)}(\nu;\cdots) \to \Sigma^{(N)}(\nu)$, преобразование (1.8) генерируется представлением для потенциала (0.42), переписанным в виде /37/[1]:

$$V(r) = \frac{4\pi}{\Omega_N \pi^a\, r} \int_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \Sigma^{(N)}(\nu) \left[\frac{r}{2\nu}\right]^a \chi_{-a}(\nu r); \quad a=a_N ; \tag{1.10}$$

если учесть представление и свойства (П.I.77а),(П.I.80) функции $\chi_l(z)$ (П.I.74) /I2/. В воспроизведении преобразования (1.8) ядром уравнения (1.6) достаточно убедиться при $L=3$ прямым вычислением с помощью формул перестановки (П.4.I7),(П.4.I9) и интегрального соотношения (П.2.7), которое удобно представить в виде: $a=a_N$; $\lambda=\lambda_N=\frac{1}{2}-a_N$; $\phi_a(x,y)=(x-y)^{-a-1}\left[\Gamma(-a)\right]^{-1}$;

$$\int_{\tau^+(k:q.\gamma:\mu.p)}^{\nu} d\nu_1^2 \left[\Delta(q^2,p^2,-\nu_1^2)\right]^a \frac{\phi_a(\nu^2,\nu_1^2)}{\left\{k^2\left[\nu_1^2-\tau^+(k:q.\gamma:\mu.p)\right]\left[\nu_1^2-\tau_-(k:q.\gamma:\mu.p)\right]\right\}^{a+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma^2}^{\tau_-(p:k.\mu:\nu.q)} d\gamma_1^2\, \phi_a(\gamma_1^2,\gamma^2) \int_{\mu^2}^{\tau_-(q:k.\gamma_1:\nu.p)} d\mu_1^2\, \phi_a(\mu_1^2,\mu^2)\cdot \tag{1.11}$$

$$\cdot\left\{k^2\left[\nu^2-\tau^+(k:q,\gamma_1:\mu_1,p)\right]\left[\nu^2-\tau_-(k:q,\gamma_1:\mu_1,p)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

приняв, наряду с (1.4), что:

$$\zeta = \frac{q^2+k^2+\gamma_1^2}{2qk}; \quad \eta = \frac{p^2+k^2+\mu_1^2}{2pk}; \quad T = \frac{q^2+p^2+\nu_1^2}{2qp}.$$

В ядре двумерного варианта уравнения (1.6) возникает дельта-функция /37/, позволяющая снять любой из трех интегралов. Однако, как явствует из (1.8), оно нисколько не теряет от этого своей динамической содержательности:

$$D^{(2)}(\nu;-ip,b_-^2-iq) = \Sigma^{(2)}(\nu) - \left[\frac{\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)}{\nu^2}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{\mu_o}^{\nu-\mu_o} d\gamma\, \Sigma^{(2)}(\gamma)\cdot$$

$$\cdot\int_{\mu_o}^{\nu-\gamma} d\mu\, \frac{2}{\pi} \int_{\omega_-(\nu:\mu.\gamma:q.p)}^{\omega^+(\nu:\mu.\gamma:q.p)} dk^2\, \delta\left[(\omega^+-k^2)(k^2-\omega_-)\right] \frac{D^{(2)}(\mu;-ip,b_-^2-ik)}{(k^2+b^2)}, \tag{1.12}$$

---

[1] Вычитания в (I.2) при подстановке в (0.42) добавляют к этому выражению ультралокальные члены $(\vec{\nabla}^2)^n \delta_N(x)$ (см.раздел 2.I.4).

где ω_{-}^{+} приведены в П.4.11), а в обозначениях (1.7) имеют вид:

$$\omega_{-}^{+}(\nu;\mu,\gamma;q,p) = \underline{k}^{2}(\eta=\pm 1;\nu;\mu,\gamma;q,p) \tag{1.13}$$

Аналог соотношения (1.8) для полных T-матриц вытекает из (1.3) лишь в отсутствии вычитаний:

$$\langle\vec{q}|T^{(N)}(-b^{2})|\vec{p}\rangle = T^{(N)}(t;p^{2},b^{2},q^{2});$$

$$T^{(L)}(t;\cdots\cdots) = \pi^{a_L-a_N}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d\tau(t-\tau)^{a_L-a_N+n-1}}{\Gamma(a_L-a_N+n)}\,T^{(N)}(\tau;\cdots\cdots). \tag{1.14}$$

Это равенство можно проверить на известном точном решении для кулоновского потенциала при любых N, приведенном в /47/.

2. Для дираковского гамильтониана типа II,(0.43а) уравнение ЛШ (0.6) в матричной записи имеет вид /2I/:

$$\langle\vec{q}|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{p}\rangle = I\cdot\langle\vec{q}|V|\vec{p}\rangle + \int d^{3}k\,\langle\vec{q}|V|\vec{k}\rangle\,G_{O}^{c}(W^{\bar{\zeta}};\vec{k})\,\langle\vec{k}|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{p}\rangle, \tag{1.15}$$

где матрица свободной причинной функции Грина /14,21/:

$$G_{O}^{c}(W^{\bar{\zeta}};\vec{k}) = \left[W^{\bar{\zeta}}+(\vec{\alpha}\circ\vec{k})+\beta m\right]\left[(W^{\bar{\zeta}})^{2}-\vec{k}^{2}-m^{2}-i0\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon(k)}\sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}}\sum_{\zeta'=\pm 1}\frac{u_{\zeta'}(\vec{k},\sigma)\circ u_{\zeta'}^{*}(\vec{k},\sigma)}{\left[W^{\bar{\zeta}}-\zeta'(\varepsilon(k)-i0)\right]}. \tag{1.16}$$

Биспиноры $u_{\zeta}(\vec{k},\sigma)$ образуют полный набор собственных функций гамильтониана (0.25), приведенный в (П.I.56),(П.I.29) для спирального базиса /I4,2I,48/. Уравнение (1.5) в этом базисе для

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle \equiv \left[u_{\zeta''}^{*}(\vec{q},\mu)\,\langle\vec{q}|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{p}\rangle\,u_{\zeta}(\vec{p},\lambda)\right] \tag{1.17}$$

имеет вид:

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|T(W^{\bar{\zeta}}) - I\cdot V|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle = \int\frac{d^{3}k}{2\varepsilon(k)}\sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}}\sum_{\zeta'=\pm 1}\left[W^{\bar{\zeta}}-\zeta'(\varepsilon(k)-i0)\right]^{-1}\cdot$$

$$\begin{cases}\cdot\langle\vec{q},\mu,\zeta''|V|\vec{k},\sigma,\zeta'\rangle\,\langle\vec{k},\sigma,\zeta'|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle\,. & (1.18\text{а})\\[2ex] \cdot\langle\vec{q},\mu,\zeta''|T(W^{\bar{\zeta}})|\vec{k},\sigma,\zeta'\rangle\,\langle\vec{k},\sigma,\zeta'|V|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle\,. & (1.18\text{б})\end{cases}$$

Две формы (1.18) связаны между собой преобразованиями инверсии и обращения времени, при которых /48/:

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|T(W)|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle = \langle-\vec{q},-\mu,\zeta''|T(W)|-\vec{p},-\lambda,\zeta\rangle =$$

$$= 2\mu 2\lambda\,\langle\vec{p},-\lambda,\zeta|T(W)|\vec{q},-\mu,\zeta''\rangle. \tag{1.19}$$

Матричный элемент потенциала (0.38), с учетом (П.I.29),(П.I.56) и (0.1) можно представить в виде :

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|V|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle = \overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{\nu}})\left[A^{(1)}_{\zeta''\zeta}(q,p) + 2\mu 2\lambda\, A^{(2)}_{\zeta''\zeta}(q,p)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^2 m}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \frac{\Sigma(\nu)}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]}, \qquad (1.20)$$

где предполагается отсутствие вычитаний [2)], и обозначено:

$$\vec{q}=q\vec{æ},\ \vec{p}=p\vec{\nu}; \qquad (1.21)$$

$$A^{\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}}_{\zeta''\zeta}(q,p) = \left.\begin{matrix}\zeta''\zeta\\1\end{matrix}\right\}\left[(\varepsilon(q)\pm m\zeta'')(\varepsilon(p)\pm m\zeta)\right]^{\frac{1}{2}} = A^{\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}}_{\zeta\zeta''}(p,q) =$$

$$= \zeta''\left[\frac{\varepsilon(q)+m\zeta''}{\varepsilon(p)+m\zeta}\right]^{\frac{1}{2}} p\left\{\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta}(p)\right]^{-1};\\ \eta^{\zeta''}(q)\ ;\end{matrix}\right. \qquad (1.22)$$

$$\eta^{\zeta}(p) \equiv (w^{\zeta}(p)-m)/p \equiv p/(w^{\zeta}(p)+m);\ \eta^{-\zeta}(p) = -\left[\eta^{\zeta}(p)\right]^{-1}; \qquad (1.23)$$

$$w^{\zeta}(p) = \zeta\varepsilon(p);\ \varepsilon(p) = \sqrt{p^2+m^2}\ ;\ \zeta = \pm 1\ . \qquad (1.24)$$

То есть, $w^{\zeta}(p)$- является значением аналитической функции $w(p)=(p^2+m^2)^{1/2}$ на одном из листов $\zeta \equiv sgn((Re\ w(p))$ ее римановой поверхности, показанной на Рис.1, а $\varepsilon(p)$- ее фиксированная ветвь, содержащая арифметическое значение корня /49-51/.

Поэтому, при любых p на одном листе ζ :

$$w^{\zeta}(-p) = w^{\zeta}(p); \qquad (1.25)$$

а на разных листах:

$$w^{-\zeta}(p) = -w^{\zeta}(p) = -w^{\zeta}(-p). \qquad (1.26)$$

Лист $\zeta=+1$ отвечает электрону, а $\zeta=-1$,-позитрону.

Итерируя уравнение (1.1%) можно убедиться, что Т-матрица имеет спиновую структуру, аналогичную (1.20):

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|T(W^{\bar{\zeta}}(ib))|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle = \overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{\nu}})\ \frac{1}{(2\pi)^2 m}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\ \frac{1}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]}\ \circ$$

---

2) Сингулярный потенциал, отвечающий вычтенному представлению, в теории поля неустойчив по отношению к рождению пар.

$$\cdot D_{\mu\lambda}^{\zeta''\zeta}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta} \quad ; \qquad (1.27)$$

$$D_{\mu\lambda}^{\zeta''\zeta}(\cdots\cdots)^{\bar\zeta} = D_{\zeta''\zeta}^{(1)}(\cdots\cdots)^{\bar\zeta} + 2\mu 2\lambda\, D_{\zeta''\zeta}^{(2)}(\cdots\cdots)^{\bar\zeta}. \qquad (1.28)$$

Учитывая свойства (П.I.33)-(П.I.36) оператоов спиновых вращений /48/, и их матричных элементов (П.I.28), (П.I.29):

$$\overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{v}}) \equiv \langle w_\mu(\vec{æ})|w_\lambda(\vec{v})\rangle = 2\mu 2\lambda\, \overset{*(1/2)}{D}_{-\mu,-\lambda}(R_{\vec{v}\vec{æ}}), \qquad (1.29)$$

из свойств симметрии (1.19) легко получить:

$$\left.D_{\zeta\zeta''}^{\substack{(1)\\(2)}}\right\}(\nu;-iq,b^2,-ip)^{\bar\zeta} = \left.D_{\zeta''\zeta}^{\substack{(1)\\(2)}}\right\}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta}. \qquad (1.30)$$

Параметр b^2 введен в соответствии с (1.24):

$$W^{\bar\zeta}(ib) = \bar\zeta\sqrt{m^2-b^2}\,, \qquad (1.31)$$

и изначально принадлежит области регулярности: $-m<b<m$, отвечающей $-m<W^{\bar\zeta}(ib)<m$ /52/.

Подставляя (1.20),(1.27),(1.28) в уравнение (1.18а) при $\vec{k}=k\vec{n}$, пользуясь простыми следствиями (1.29):

$$\sum_{\sigma=\pm\frac12}\overset{*(1/2)}{D}_{\sigma\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}})\,\overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\sigma}(R_{\vec{n}\vec{v}}) = \overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{v}}) \quad , \qquad (1.32)$$

$$\sum_{\sigma=\pm\frac12}\overset{*(1/2)}{D}_{\sigma\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}})\,2\sigma\,\overset{*(1/2)}{D}_{\lambda\sigma}(R_{\vec{n}\vec{v}}) = \langle w_\mu(\vec{æ})|(\vec\sigma\circ\vec n)|w_\lambda(\vec v)\rangle\ , \qquad (1.33)$$

и действуя, как в предыдущем разделе, с помощью представлений (П.I.40),(П.I.4I), можно получить систему интегральных уравнений для функций $D^{(1)}$, $D^{(2)}$:

$$D_{\zeta''\zeta}^{\substack{(1)\\(2)}}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta} - \Sigma(\nu)A_{\zeta''\zeta}^{\substack{(1)\\(2)}}(q,p) = -\int_{\mu_0}^{\nu-\mu_0}d\gamma\,\Sigma(\gamma)\int_{\mu_0}^{\nu-\gamma}d\mu\,\frac{1}{2m\pi}\cdot$$

$$\cdot\int_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)}dk^2(k^2+b^2)^{-1}\Big[(\omega^+-k^2)(k^2-\omega_-)\Big]^{-\frac12}\sum_{\zeta'=\pm1}\frac{\zeta'}{2}\left[1+\frac{W^{\bar\zeta}(ib)}{w^{\zeta}(k)}\right]\left\{\left[A_{\zeta''\zeta'}^{\substack{(1)\\(2)}}(q,k)+\right.\right.$$

$$\left.+A_{\zeta''\zeta'}^{\substack{(2)\\(1)}}(q,k)\left[\frac{Z_\nu Y_\mu - X_\gamma}{Z_\nu^2-1}\right]\right]D_{\zeta'\zeta}^{\substack{(1)\\(2)}}(\mu;-ip,b^2,-ik)^{\bar\zeta} + A_{\zeta''\zeta'}^{\substack{(1)\\(2)}}(q,k)\left[\frac{Z_\nu X_\gamma - Y_\mu}{Z_\nu^2-1}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot D_{\zeta'\zeta}^{\substack{(2)\\(1)}}(\mu;-ip,b^2,-ik)^{\bar\zeta}\right\}, \qquad (1.34)$$

где: X_γ, Y_μ, Z_ν -теже, что в (1.4), а ω_-^+- даны в (1.13),(П.4.II).

В уравнениях (1.18),(1.34) удобно перейти к величинам, зависящим от квантового числа ζ только через индекс листа в функциях $w^{\zeta}(p)$ (1.24). Этого можно достичь двумя путями, полагая в соответствии с (1.22)

$$D^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar{\zeta}} = \zeta\left[\frac{\mathcal{E}(p)+m\zeta}{\mathcal{E}(q)+m\zeta''}\right]^{\frac{1}{2}} q\, \mathbb{D}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar{\zeta}} =$$

$$= \zeta''\left[\frac{\mathcal{E}(q)+m\zeta''}{\mathcal{E}(p)+m\zeta}\right]^{\frac{1}{2}} p\, \mathbb{D}^{\zeta\zeta''}_{\mu\lambda}(\nu;-iq,b^2,-ip)^{\bar{\zeta}}, \qquad (1.35)$$

так что симметрия (1.30) принимает вид:

$$\mathbb{D}^{\zeta\zeta''}_{\mu\lambda}(\nu;-iq,b^2,-ip)^{\bar{\zeta}} = \frac{\eta^{\zeta''}(q)}{\eta^{\zeta}(p)}\, \mathbb{D}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar{\zeta}}. \qquad (1.36)$$

Для функций $\mathbb{D}^{(1),(2)}$, определенных согласно (1.28), система уравнений такова:

$$\mathbb{D}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta''\zeta}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar{\zeta}} - \Sigma(\nu)\left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(q)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta}(p)\end{matrix}\right\| = -\int\limits_{\mu_o}^{\nu-\mu_o} d\gamma\, \Sigma(\gamma)\int\limits_{\mu_o}^{\nu-\gamma} d\mu\, \frac{1}{2m\pi}\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2\, k\,(k^2+b^2)^{-1}\left[(\omega^+-k^2)(k^2-\omega_-)\right]^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2}\sum_{\zeta'=\pm1}\left[1+\frac{W^{\bar{\zeta}}(ib)}{w^{\zeta'}(k)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[\left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(q)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta'}(k)\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\eta^{\zeta'}(k)\\ \left[\eta^{\zeta''}(q)\right]^{-1}\end{matrix}\right\|\left[\frac{Z_\nu Y_\mu - X_\gamma}{Z_\nu^2-1}\right]\right]\mathbb{D}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta'\zeta}(\mu;-ip,b^2,-ik)^{\bar{\zeta}} +\right.$$

$$\left.+\left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(q)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta'}(k)\end{matrix}\right\|\left[\frac{Z_\nu X_\gamma - Y_\mu}{Z_\nu^2-1}\right]\mathbb{D}\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|_{\zeta'\zeta}(\mu;-ip,b^2,-ik)^{\bar{\zeta}}\right\}, \qquad (1.37)$$

где всюду берется либо верхняя, либо нижняя строчка в двойных скобках.

Для гамильтониана (0.43б) получаются аналогичные выражения. Единственное отличие состоит в смене знака перед $A^{(2)}_{\zeta''\zeta}$ в представлении (1.20) и всех последующих уравнениях. Так что и в (1.37) перед $\eta^{\zeta}(p)$ и $\eta^{\zeta'}(k)$ всюду появится знак минус.

3. Для гамильтониана типа III с релятивистскими поправками (0.45) в спиральном базисе получается выражение:

$$\langle\vec{q},\mu|U|\vec{p},\lambda\rangle = D^{*(1/2)}_{\lambda\mu}(R_{\vec{\text{æ}}\vec{\nu}})\left[1-\frac{q^2+p^2-2\mu2\lambda2qp}{2(2m)^2}\right]\frac{1}{(2\pi)^2m}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\mu_0}^{\infty}d\nu\,\frac{\Sigma(\nu)}{\left[\nu^2+(\vec{q}-\vec{p})^2\right]},\tag{1.38}$$

имеющее такую же спиновую структуру как в предыдущем случае II, (1.20). Следовательно, как и выше, после отделения матрицы спиновых вращений $D^{*(1/2)}_{\lambda\mu}(R)$, спектральная плотность, как матрица в пространстве спиральностей, распадается на сумму (1.28) двух ортогональных проекторов $\Pi^{\pm}_1$:

$$2\left[\Pi^{+}_1\right]_{\mu\lambda} = (I+\sigma_1)_{\mu\lambda} = 1,\ (\textit{для всех}\ \mu,\lambda)$$

$$2\left[\Pi^{-}_1\right]_{\mu\lambda} = (I-\sigma_1)_{\mu\lambda} = 2\mu2\lambda,\tag{1.39}$$

с коэффициентами $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Поэтому, система уравнений для нее имеет такой же вид (1.34), где необходимо только опустить индексы листов $\zeta,\zeta',\zeta'',\bar{\zeta}$, и сумму по ним, заменив:

$$\sum_{\zeta'=\pm1}\frac{\zeta'}{2}\left[1+\frac{W^{\zeta}(ib)}{w^{\zeta}(k)}\right]\to1,$$

перейти к безразмерной спектральной плотности $(2m)^{-1}D\to D$, и, в соответствии с (1.38), положить:

$$\frac{A^{(1)}(q,p)}{2m} = 1-\frac{(q^2+p^2)}{2(2m)^2};\qquad \frac{A^{(2)}(q,p)}{2m} = \frac{qp}{(2m)^2}.\tag{1.40}$$

Стоит напомнить, что выражения (1.40) не являются непосредственным нерелятивистским пределом формул (1.22), хотя и имеют его структуру. Это обусловлено тем, что соответствующие гамильтонианы типа II и III связаны неунитарным преобразованием /14/.

4. Наконец, для гамильтониана типа IV с нелокальным взаимодействием (0.46) уравнение для D имеет вид (1.6) при $N=3$ (см.также (1.42) ниже) с заменой

$$\Sigma(\nu)\Rightarrow\Sigma_1(\nu)+\Sigma_2(\nu)\ (q^2+p^2)(2m)^{-2}.\tag{1.41}$$

Для $\Sigma_1(\nu)=\Sigma_2(\nu)$ такое же уравнение получается из системы уравнений предыдущего раздела 3 для гамильтониана типа III, если в ней отбросить зависимость от спиновых переменных, положив $D^{(2)}=0$, т.е. считая в (1.40) $A^{(2)}=0$.

I.2. Существование решения и его аналитическое продолжение

В этом параграфе доказаны сходимость ряда итераций для полученых в предыдущем параграфе интегральных уравнений, и возможность аналитического продолжения спектральной плотности по энергетическим переменным.

Достаточно рассмотреть нерелятивистский бесспиновый случай (1.6) при $N=3$. Другие случаи рассматриваются аналогично, либо сводятся к этому случаю соотношением (1.8).

При $N=3$ безразмерная спектральная плотность $D^{(3)}=D$ определяется уравнением (для краткости считается, что $\mu_o=0$):

$$D(\nu;-ip,b^2,-iq)-\Sigma(\nu)=-\int_0^\nu d\mu\int_0^{\nu-\mu} d\gamma\,\Sigma(\gamma)\,\frac{1}{\pi}\int_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2\,(k^2+b^2)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\Big[(\omega^+-k^2)(k^2-\omega_-)\Big]^{-\frac{1}{2}}\,D(\mu;-ip,b^2,-ik),\qquad(1.42)$$

где ω_-^+ дается формулами (П.4.II) или (1.13),(1.7). Формальное аналитическое продолжение этого уравнения в область (см. также (П.4.9-IO)):

$$\left.\begin{aligned}&p=i\rho,\ q=iu,\ k=i\alpha;\ \rho>0;\ 0<\nu<u-\rho;\\&\Big[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\Big]^{\frac{1}{2}}=e^{i\pi}\Big[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\Big]^{\frac{1}{2}},\\&\omega_-^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)=e^{i\pi}\Lambda_-^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho),\end{aligned}\right\}\qquad(1.43)$$

определяет функцию $\tilde D(\nu;\rho,b^2,u)$ и имеет вид:

$$\tilde D(\nu;\rho,b^2,u)-\Sigma(\nu)=\int_0^\nu d\mu\int_0^{\nu-\mu} d\gamma\,\Sigma(\gamma)\,\frac{1}{\pi}\int_{\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)}^{\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)} d\alpha^2\,(\alpha^2-b^2)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\Big[(\Lambda^+-\alpha^2)(\alpha^2-\Lambda_-)\Big]^{-\frac{1}{2}}\,\tilde D(\mu;\rho,b^2,\alpha),\qquad(1.44)$$

где Λ_-^+ и $\Delta(x,y,z)$ приведены в (П.4.I), (П.4.2), (П.4.IO).

Пусть $\Sigma(\gamma)/\gamma$ -абсолютно интегрируемая функция при любых конечных $\gamma\geqslant0$. Тогда имеют место следующие теоремы: -

Теорема 1.1: Итерационный ряд уравнения (1.42) сходится для произвольного $\varepsilon>0$ в области $\mathcal{A}^\varepsilon$, показанной на Рис.2:

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \left\{b^2; p^2; q^2; \nu:\ |arg\ b^2|\leqslant\pi-\varepsilon;\ p^2>0;\ q^2>0;\ 0\leqslant\nu<\infty\right\}, \qquad (1.45)$$

равномерно относительно каждой из указанных переменных.

Теорема 1.2: Итерационный ряд уравнения (1.44) сходится для произвольных $\varepsilon,\delta>0$ в области $\tilde{\mathcal{A}}^\varepsilon_\delta$, показанной на Рис.3:

$$\tilde{\mathcal{A}}^\varepsilon_\delta = \left\{b^2; \rho^2; u^2; \nu:\ \Big[|arg\ b^2|\geqslant\varepsilon\Big]\cup\Big[Re\ b^2\leqslant\rho^2\Big];\ \rho\geqslant(\delta/2)>0;\ u-\rho>\nu>0\right\}, \qquad (1.46)$$

равномерно относительно каждой из указанных переменных.

Теорема 1.3: Итерационный ряд уравнения (1.42) сходится для произвольного $\varepsilon>0$ в области $\mathcal{A}^\varepsilon_{Int}$, показанной на Рис.4:

$$\mathcal{A}^\varepsilon_{Int} = \left\{b^2; p^2; q^2; \nu:\ \varepsilon\leqslant arg\ b^2\leqslant\pi-\varepsilon, b^2\neq0;\ u^2=|q^2|>|p^2|=\rho^2;\right.$$
$$\left. 0\leqslant arg\ p^2 = arg\ q^2\ \leqslant\pi;\ \nu^2\leqslant(u-\rho)^2\ \frac{1}{2}\left[1+\frac{2u\rho}{u^2+\rho^2}\right]\leqslant(u-\rho)^2\right\}, \qquad (1.46б)$$

равномерно относительно каждой из указанных переменных.

Доказательство: Существование оценки для n-ой итерации вольтерровских уравнений (1.42),(1.44) индуктивно следует из существования оценки для первой итерации, содержащей интеграл:

$$\mathrm{T} \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2(k^2+b^2)^{-1}\Big[(\omega^+-k^2)(k^2-\omega_-)\Big]^{-\frac{1}{2}} = \Big[(\omega^++b^2)(b^2+\omega_-)\Big]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1.47)$$

Если в каждой из перечисленных областей $\mathcal{A}$ для него имеет место факторизованная оценка вида:

$$|\mathrm{T}(\nu;\mu,\gamma;q,p)| \leqslant \mathrm{N}(\nu;b^2)\ \mathrm{M}(\mu;b^2)\ \mathrm{H}(\gamma;b^2), \qquad (1.48)$$

где все функции справа положительны, то, полагая:

$$\left.\begin{aligned} &|D(\nu;\cdots b^2\cdots)| \leqslant \mathrm{R}_1(\nu;b^2),\ \text{в}\ \mathcal{A}^\varepsilon;\\ &|\tilde{D}(\nu;\cdots b^2\cdots)| \leqslant \mathrm{R}_2(\nu;b^2),\ \text{в}\ \tilde{\mathcal{A}}^\varepsilon_\delta;\\ &|D(\nu;\cdots b^2\cdots)| \leqslant \mathrm{R}_3(\nu;b^2),\ \text{в}\ \mathcal{A}^\varepsilon_{Int}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.49)$$

для каждой мажоранты из уравнений (1.42) и (1.44), последовательно мажорируя в них все сомножители, можно получить уравнение:

$$R(\nu;b^2) = |\Sigma(\nu)| + B(\nu;b^2)\, N(\nu;b^2) \int_0^\nu d\mu\, M(\mu;b^2)\, R(\mu;b^2), \tag{1.50}$$

где введена неубывающая функция ν

$$B(\nu;b^2) = \int_0^\nu d\gamma\, H(\gamma;b^2)\, |\Sigma(\gamma)|. \tag{1.51}$$

Решение уравнения (1.50) имеет вид :

$$R(\nu;b^2) = |\Sigma(\nu)| + B(\nu;b^2)\, N(\nu;b^2) \int_0^\nu d\mu\, M(\mu;b^2)|\Sigma(\mu)|\cdot$$

$$\cdot exp\Big[\int_\mu^\nu d\gamma\, B(\gamma;b^2)\, N(\gamma;b^2)\, M(\gamma;b^2)\Big], \tag{1.52}$$

и определяет все мажоранты $R_{1\div 3}$. Остается конкретизировать оценку (1.48) для каждой из областей A.

В области A^ε: $\omega^+\geqslant\omega\_>0$, поэтому здесь можно записать:

$$|T|\leqslant\Big[\sqrt{\omega^+\omega\_}\ sin\ \varepsilon\Big]^{-1}, \tag{1.53}$$

где использовано известное неравенство:

$$|h+z| \geqslant h\ sin\ \varepsilon, \tag{1.54}$$

при $h>0$, $|arg\ z|\leqslant\pi-\varepsilon$.

Поскольку, при $x=q^2+\gamma^2$, $y=p^2+\mu^2$, в силу (П.4.13):

$$\nu^2\ \omega^+\omega\_ \equiv \mu^2x^2 + \gamma^2y^2 + (\nu^2-\mu^2-\gamma^2)xy, \tag{1.55}$$

легко видеть, что в A^ε, при $p^2>0$, $q^2>0$, $\nu\geqslant\mu+\gamma\geqslant\mu\geqslant0$:

$$\omega^+\omega\_ \geqslant \omega^+\omega\_\big|_{p^2=q^2=0} = \mu^2\gamma^2 \geqslant0, \tag{1.56}$$

откуда вытекает оценка:

$$|T| \leqslant \big[\mu\gamma\ sin\ \varepsilon\big]^{-1}. \tag{1.57}$$

Полагая в (1.52):

$$B_1^\varepsilon(\nu) = \int_0^\nu d\gamma\ |\Sigma(\gamma)|\big[\gamma\ sin\ \varepsilon\big]^{-1}, \tag{1.58}$$

можно записать равномерную в A^ε оценку для $|D|\leqslant R_1$:

$$R_1(\nu;b^2) = |\Sigma(\nu)| + B_1^\varepsilon(\nu)\int_0^\nu d\mu\ |\Sigma(\mu)|\mu^{-1} exp\Big[\int_\mu^\nu d\gamma\ B_1^\varepsilon(\gamma)\gamma^{-1}\Big]. \tag{1.59}$$

В области $\tilde{A}_\delta^\varepsilon$:

$$|T| = \big|(\Lambda^+-b^2)(\Lambda\_-b^2)\big|^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.60}$$

где Λ_-^+ определены в (П.4.2). Поскольку, при $\rho\geqslant(\delta/2)>0$, и

$0<\mu+\gamma<\nu<u-\rho$, из (П.4.7) и свойств Λ^+_-, указанных в П.4, Рис.I, вытекает, что справедливы неравенства: $\Lambda^+ \geqslant \Lambda_- \geqslant (\rho+\mu)^2>0$, то в этой области имеют место оценки: при $|arg\ b^2|\geqslant\varepsilon$,

$|\Lambda^+_- - b^2| \geqslant \Lambda^+_-\ sin\ \varepsilon \geqslant (\rho+\mu)^2 sin\ \varepsilon \geqslant \mu(\mu+\delta)\ sin\ \varepsilon;$

а, при $Re\ b^2 \leqslant \rho^2$,

$|\Lambda^+_- - b^2| \geqslant |\Lambda^+_- - Re\ b^2| \geqslant (\rho+\mu)^2 - Re\ b^2 \geqslant \mu(\mu+\delta)$,

объединение которых дает:

$$|T| \leqslant \Big[\mu(\mu+\delta)\ sin\ \varepsilon\Big]^{-1}. \qquad (1.61)$$

Полагая в (1.52) :

$$B^{\varepsilon}_2(\nu) = \int_0^{\nu} d\gamma\ |\Sigma(\gamma)| \Big[sin\ \varepsilon\Big]^{-1} \leqslant \nu\ B^{\varepsilon}_1(\nu), \qquad (1.62)$$

можно записать равномерную в $\tilde{\mathcal{A}}^{\varepsilon}_{\delta}$ оценку для $|\tilde{D}|\leqslant R_2$:

$$R_2(\nu;b^2)=|\Sigma(\nu)|+B^{\varepsilon}_2(\nu)\int_0^{\nu} d\mu |\Sigma(\mu)| \Big[\mu(\mu+\delta)\Big]^{-1} exp\Big[\int_{\mu}^{\nu} d\gamma B^{\varepsilon}_2(\gamma)\gamma^{-2}\Big]. \qquad (1.63)$$

В области $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{Int}$, как показано в Приложении 4, выполняется неравенство: $Im\ \omega^+_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)\geqslant 0$, приводящее в ней к ограничению: $|arg\ (\omega^+_-/b^2)| \leqslant \pi-\varepsilon$. Откуда вытекает грубая, но простая оценка:

$$|T| \leqslant \Big[|b^2|\ sin\ \varepsilon\Big]^{-1}. \qquad (1.64)$$

Полагая в (1.52):

$$B^{\varepsilon}_3(\nu;b^2) = \Big[|b^2|\ sin\ \varepsilon\Big]^{-1} \int_0^{\nu} d\gamma |\Sigma(\gamma)| \equiv B^{\varepsilon}_2(\nu)\ |b^2|^{-1}, \qquad (1.65)$$

можно записать равномерную в $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{Int}$ оценку для $|D|\leqslant R_3$

$$R_3(\nu;b^2) = |\Sigma(\nu)| + B^{\varepsilon}_3(\nu;b^2) \int_0^{\nu} d\mu |\Sigma(\mu)|\ exp\Big[\int_{\mu}^{\nu} d\gamma B^{\varepsilon}_3(\gamma;b^2)\Big]. \qquad (1.66)$$

Кулоновский пример, рассмотренный ниже, в параграфе 4.2, показывает, что в условиях теоремы 1.3 ограничение $b^2\neq 0$ не является необходимым:

$$D^c(\nu;-ip,0,-iq) = g\delta(\nu) + g(\partial/\partial\nu)\ exp\Big[-g\nu(qp)^{-1}\Big]. \qquad (1.67)$$

Все же вместе эти условия достаточны для равномерной сходимости ряда по g, но не достаточны для полной фиксации аналитического продолжения, переводящего решение уравнения (1.42) в решение (1.44). Соответствующие пути лежат в области $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{Int}$, и подчинены дополнительным ограничениям, зависящим от потенциала. Например, для D^c (см. параграф 4.2):

$$\nu^2 \leqslant |(u^2-b^2)(\rho^2-b^2)b^{-2}|. \tag{1.68}$$

ГЛАВА 2. МЕТОД ВНЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИОСТА

2.I. Внеэнергетическое решение Иоста

В этом параграфе внеэнергетическая функция Иоста (ВФИ) строится для гамильтонианов типа I,II,III,V Введения по решению неоднородного радиального уравнения Шредингера или Дирака, — внеэнергетическому решению Иоста (ВРИ) $J_l^{(N)}(\rho,b;r)$. Используемые при этом соотношения типа (0.39) позволяют сразу получать результаты для ВФИ из соответствующих формул для ВРИ, но, оставляют открытым, вообще говоря, вопрос о ее связи с детерминантами парциальных резольвент (0.24) и (0.29), рассмотренный в следующем параграфе.

1. Для гамильтониана типа I: (0.19)-(0.22), (0.42), как и при $N=3$ /24,27,31,34/, ВРИ является частным решением неоднородного радиального уравнения Шредингера:

$$\left[G_{lV}^{(N)}(-b^2)\right]^{-1} J_l^{(N)}(\rho,b;r) = (\rho^2-b^2)\,\chi_j(\rho r), \tag{2.1}$$

$$\left[G_{lV}^{(N)}(-b^2)\right]^{-1} = \partial_r^2 - j(j+1)r^{-2} - b^2 - V(r), \tag{2.2}$$

где:

$$j=l-a_N; \qquad a_N=a=\tfrac{1}{2}(3-N) \tag{2.3}$$

Матричный элемент этой функции Грина, определенный в парциальном разложении (0.20):

$$\langle r|G_{lV}^{(N)}(-b^2)|y\rangle = G_{lV}^{(N)}(b;r,y), \tag{2.4}$$

для $V=0$, при $b=\mp ik$ имеет вид /3-7/:

$$G_{l0}^{(N)}(\mp ik;r,y) = -\frac{i^{\mp j}}{k}\left[\theta(r-y)\,\chi_j(\mp ikr)\,\phi_{j0}(ky) + [r\rightleftharpoons y]\right], \tag{2.5}$$

где функции χ_j и ϕ_{j0} определены в (П.I.74).

Вместе с граничным условием при $r\to\infty$:

$$J_l^{(N)}(\rho,b;r) \to \chi_j(\rho r) \to e^{-\rho r} \tag{2.6}$$

уравнение (2.1) эквивалентно интегральному уравнению по переменной r /3,24,27,31/:

$$J_l^{(N)}(\rho,b;r) - \chi_j(\rho r) = \int_r^\infty dy\, B_{lo}^{(N)}(b;r,y)\, V(y)\, J_l^{(N)}(\rho,b;y), \quad (2.7)$$

в котором вольтерровская часть функции Грина (2.5) /3-7,17/:

$$B_{lo}^{(N)}(b;r,y) = \frac{1}{2b}\Big[\chi_j(br)\,\chi_j(e^{-i\pi}by) - [r\rightleftharpoons y]\Big]. \quad (2.8)$$

С помощью (П.I.76б,д) нетрудно проверить, что при $Re\ u>|Re\ b|$ для нее имеет место равенство /31/:

$$\int_r^\infty dy\, B_{lo}^{(N)}(b;r,y)\,\chi_j(uy) = \frac{\chi_j(ur)}{(u^2-b^2)}. \quad (2.9)$$

Воспользовавшись выражением (1.10) для потенциала и равенством (П.3.7), можно записать представление /35,36/:

$$V(r)\,\chi_j(\rho r) = \int_{\rho+\mu_o}^\infty du\,\chi_j(ur)\,K_l^{(N)}(u,\rho), \quad (2.10)$$

где: $j=l-a_N$; $a_N=a$

$$K_l^{(N)}(u,\rho) = \frac{4\pi}{\Omega_N\pi^a}\int_{\mu_o}^{u-\rho} dv\, P_j^a\big[\mathrm{T}(u\rho|v)\big]\,\frac{\Sigma^{(N)}(v)}{\big[\Delta(u^2,\rho^2,v^2)\big]^{\frac{a}{2}}}\quad; \quad (2.11)$$

$$\mathrm{T}(u\rho|v) = \frac{u^2+\rho^2-v^2}{2u\rho}\quad;$$

Пользуясь поочередно (2.10) и (2.9), нетрудно убедиться по индукции, что итерации уравнения (2.7) совпадают с итерациями вольтерровского уравнения по переменной ρ:

$$J_l^{(N)}(\rho,b;r) - \chi_j(\rho r) = \int_{\rho+\mu_o}^\infty du\,\frac{K_l^{(N)}(u,\rho)}{(u^2-b^2)}\,J_l^{(N)}(u,b;r)\ . \quad (2.12)$$

Его решение естественно записывается через резольвентное ядро оператора преобразования $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$:

$$J_l^{(N)}(\rho,b;r) - \chi_j(\rho r) = \int_{\rho+\mu_o}^\infty du\,\frac{a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)}{(u^2-b^2)}\,\chi_j(ur)\ , \quad (2.13а)$$

в импульсном пространстве. Из (2.1) немедленно вытекает:

$$V(r)\,J_l^{(N)}(\rho,b;r) = \int_{\rho+\mu_o}^\infty du\, a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)\,\chi_j(ur)\ . \quad (2.13б)$$

Либо подставляя эти формулы и представление (2.10) в уравнение

(2.1), либо переставляя интегралы в итерационном ряду уравнения (2.12), можно, соответственно, найти уравнения на a_l /31-33,35/

$$a_l^{(N)}(u,\rho;b^2) - K_l^{(N)}(u,\rho) = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{u-\mu_o} \frac{d\alpha}{(\alpha^2-b^2)} \begin{cases} K_l^{(N)}(u,\alpha)\ a_l^{(N)}(\alpha,\rho;b^2); \\ a_l^{(N)}(u,\alpha;b^2)\ K_l^{(N)}(\alpha,\rho); \end{cases} \tag{2.14}$$

или получить эквивалентный им итерационный ряд /31-33/:

$$a_l^{(N)}(u,\rho;b^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)_{(n)}\ , \tag{2.15а}$$

n-ый член которого имеет вид:

$$a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)_{(n)} = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\rho}^{\alpha_{k-1}} d\alpha_k\ \frac{K_l^{(N)}(\alpha_{k-1},\alpha_k)}{(\alpha_k^2-b^2)} \right\} K_l^{(N)}(\alpha_n,\rho), \tag{2.15б}$$

где: $\alpha_0=u$ и принято, что $\mu_o=0$, и произведение при $n=0$ равно единице. Изменяя здесь порядок интегралов на противоположный, можно убедиться, что:

$$a_l^{(N)}(u,\rho;b^2) = a_l^{(N)}(-\rho,-u;b^2). \tag{2.16}$$

Уравнения (2.14) для $N=3$ были получены независимо различными авторами /31-32,33-34/, однако, лишь в работах /32,35,36/ была обнаружена факторизация в этих уравнениях зависимости от углового момента l в общем виде и установлена связь ВФИ и ВРИ непосредственно со спектральной плотностью Т-матрицы по передаче импульса. При этом (2.16) является естественным следствием свойств симметрии Т-матрицы (1.19) и ее спектральной плотности (1.30). Для рассматриваемого гамильтониана эта факторизация имеет вид /35,36/: $a_N=a$,

$$a_l^{(N)}(u,\rho;b^2) = \frac{4\pi}{\Omega_N \pi^a} \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} d\nu\ P_J^a\Big[T(u\rho|\nu)\Big]\ \frac{\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u)}{\Big[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\Big]^{a/2}}\ , \tag{2.17}$$

где $T(u\rho|\nu)$ дано в (2.11). Ее можно последовательно проверить по индукции для произвольной итерации (2.15) с помощью представления (2.11) и формул умножения (П.3.9) и перестановки (П.4.8). Одно из двух уравнений, которым эквивалентен возникающий при этом итерационный ряд для $\tilde{D}^{(N)}$, имеет вид:

$$\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u) = \Sigma^{(N)}(\nu) + 4^a(N-2)\int\limits_{\mu_o}^{\nu-\mu_o} d\gamma\, \Sigma^{(N)}(\gamma)\int\limits_{\mu_o}^{\nu-\gamma} d\mu \left[\frac{\nu^2}{\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)}\right]^a \cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} d\eta \frac{\tilde{D}^{(N)}(\mu;\rho,b^2,\underline{\alpha}(\eta))}{\left[\underline{\alpha}^2(\eta)-b^2\right](1-\eta^2)^{a+\frac{1}{2}}}\,; \quad a=a_N\,; \tag{2.18}$$

$$\underline{\alpha}^2(\eta;\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \Lambda^0(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)+\frac{\eta}{2\nu^2}\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{2.19}$$

Λ^0 и Δ определены в (П.4.1),(П.4.2).

Оно вытекает из первого уравнения (2.14), если, при подстановке в него равенств (2.11),(2.17) и преобразованиях (П.3.9), учесть независимость $\tilde{D}^{(N)}$ от j.

Сравнение с уравнением (1.6) и теоремы 1.1-1.3 не оставляют сомнений в том, что, как и при N=3 для (1.42)-(1.44), *уравнение* (2.18) *является аналитическим продолжением уравнения* (1.6) *для спектральной плотности* Т-*матрицы по формулам:*

$$\underline{k}^2(\eta;\nu;\mu,\gamma;q,p) = e^{i\pi}\,\underline{\alpha}^2(\eta;\nu;\mu,\gamma;u,\rho); \quad q=iu; \quad p=i\rho; \tag{2.20}$$

$$D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq) = \tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u). \tag{2.21}$$

Уравнение (2.18) и представление (2.17) вместе с приведенным утверждением (2.21), и их дальнейшие обобщения являются одним из основных результатов настоящей работы. Вместе с представлением для ВРИ (2.13) и вытекающим из него представлением для ВФИ

$$F_l^{(N)}(\rho,b) = 1 + \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} du \frac{a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)}{(u^2-b^2)}\left[\frac{\rho}{u}\right]^j, \tag{2.22a}$$

они составляют основу замкнутой динамической схемы, упомянутой во введении.

Из уравнения (2.12) явствует, что ВФИ (2.22а) также является решением вольтерровского уравнения /35,36/:

$$F_l^{(N)}(\rho,b) = 1 + \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} du \frac{K_l^{(N)}(u,\rho)}{(u^2-b^2)}\left[\frac{\rho}{u}\right]^j F_l^{(N)}(u,b), \tag{2.23}$$

впервые полученного для $l=0$, $N=3$ в /23/, для целых l - в /33/,и независимо, для произвольных l,- в /31/ изложенным выше способом. Следует подчеркнуть, что формулы (2.22),(2.23) справедливы только для регулярных потенциалов /3,17,38/, и вытекают из (2.12),(2.13),(2.13а) с помощью любого из двух вариантов (0.39) /3,17,24/, связанных уравнением (2.7):

$$F_l^{(N)}(\rho,b) = \lim_{r\to 0} \sqrt{\pi} \left[\Gamma(j+\tfrac{1}{2})\right]^{-1} \left[\frac{\rho r}{2}\right]^{j} J_l^{(N)}(\rho,b;r), \qquad (2.22б)$$

$$F_l^{(N)}(\rho,-ik) = 1 + \left[\frac{\rho}{k}\right]^{j} \frac{1}{k}\int_0^\infty dr\, \phi_{j0}(kr)\, V(r)\, J_l^{(N)}(\rho,-ik;r). \qquad (2.22в)$$

2. Для Дираковского гамильтониана типа II, (0.25),(0.26), (0.38),(0.43а), в обозначениях (П.I.58)-(П.I.6I), ВРИ подчиняется уравнению:

$$\left[G_{æ_\xi V}(\bar{W}^\zeta(ib))\right]^{-1} J^\zeta_{æ_\xi}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} = \left[\bar{W}^\zeta(ib) - W^\zeta(i\rho)\right] X^\zeta_{æ_\xi}(\rho,r); \quad (2.24)$$

$$\left[G_{æ_\xi V}(\bar{W}^\zeta(ib))\right]^{-1} = (i\sigma_2)\partial_r - \sigma_1 æ_\xi r^{-1} - \sigma_3 m + \bar{W}^\zeta(ib) - V(r); \quad (2.25)$$

и граничному условию при $r\to\infty$ (П.I.63):

$$J^\zeta_{æ_\xi}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} \to X^\zeta_{æ_\xi}(\rho,r) \to e^{-\rho r}\left|\begin{matrix} 1 \\ i\eta^\zeta(i\rho)\end{matrix}\right|. \qquad (2.26)$$

В соответствии с (1.23),(1.24),(1.31) здесь принято:

$$\eta^\zeta(i\rho) = \frac{w^\zeta(i\rho)-m}{i\rho} = \left[\frac{w^\zeta(i\rho)+m}{i\rho}\right]^{-1}, \qquad (2.27)$$

$$w^\zeta(i\rho) = \zeta\sqrt{m^2-\rho^2}, \qquad \text{при } |\rho|\leqslant m. \qquad (2.28)$$

При $\rho>m$ для $w^\zeta(p)$ берется значение при $p=i\rho+0$, т.е. на правом берегу верхнего разреза на Рис.1:

$$w^\zeta(i\rho) \Rightarrow i\zeta\sqrt{\rho^2-m^2}, \qquad \text{при } \rho>m. \qquad (2.29)$$

Этот выбор условен, и не сказывается на сумме по листам ζ, для которой кинематические разрезы исчезают (см. параграф 2.2). Матричные элементы функции Грина оператора (2.25), определенные в парциальном разложении (0.27):

$$\langle r|G_{\text{æ}_\xi V}(W^{\bar\zeta}(ib))|y\rangle = G^{\bar\zeta}_{\text{æ}_\xi V}(b;r,y), \tag{2.30}$$

для $V=0$ приведены в (П.1.70), а собственные функции этого оператора и их свойства,— в (П.I.60)-(П.I.72).

Уравнению (2.24),(2.25) с граничным условием (2.26) отвечает интегральное уравнение Вольтерра по переменной r с функцией Грина (П.I.67), являющейся вольтерровской частью функции Грина (П.I.70):

$$J^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} - X^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,r) = \int_r^\infty dy\ B^{\bar\zeta}_{\text{æ}_\xi 0}(b;r,y)\ V(y)\ J^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,b;y)^{\bar\zeta}. \tag{2.31}$$

Оказывается, что для нее имеется аналог соотношения (2.9), представленный в (П.I.68). Запишем эквивалент представления (2.10) в виде:

$$V(r)\ X^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,r) = \int_{\rho+\mu_0}^\infty du \sum_{\zeta'=\pm 1} K^{\zeta'\zeta}_{\text{æ}_\xi}(u,\rho)\ X^{\zeta'}_{\text{æ}_\xi}(u,r)\ \left[2w^{\zeta'}(iu)\right]^{-1}; \tag{2.32}$$

Пользуясь выражением для потенциала (0.38), равенством (П.3.7) при $a=0$, и явным видом $X^\zeta_{\text{æ}}(\rho,r)$ (П.I.60), можно проверить справедливость этого равенства для ядра:

$$K^{\zeta'\zeta}_{\text{æ}_\xi}(u,\rho) = \frac{iu}{2m}\left[\frac{1}{\eta^{\zeta'}(iu)}\, K_{l_\xi}(u,\rho) + \eta^\zeta(i\rho)\ K_{l_{-\xi}}(u,\rho)\right]; \tag{2.33}$$

$$K_l(u,\rho) = \int_{\mu_0}^{u-\rho} d\nu\ \Sigma(\nu)\ P_l\left[T(u\rho|\nu)\right]; \quad T(u\rho|\nu) = \frac{u^2+\rho^2-\nu^2}{2u\rho}; \tag{2.34}$$

в обозначениях (0.27) и (П.I.6Iв): $\text{æ}\equiv\text{æ}_\xi=\xi(j+\frac{1}{2})$; $l_\xi=j+\frac{\xi}{2}$; $\xi=\pm 1$.

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, можно также по индукции убедиться, пользуясь поочередно (П.I.68) и (2.32), что итерации уравнения (2.31) совпадают с итерациями вольтерровского уравнения по переменной ρ:

$$J^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} - X^\zeta_{\text{æ}_\xi}(\rho,r) = \int_{\rho+\mu_0}^\infty du \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(u;b)^{\bar\zeta}\ K^{\zeta'\zeta}_{\text{æ}_\xi}(u,\rho)\ J^{\zeta'}_{\text{æ}_\xi}(u,b;r)^{\bar\zeta}, \tag{2.35}$$

где, в обозначениях (2.28),(2.29):

$$g^{\zeta'}(u;b)^{\bar\zeta} = \frac{1}{(u^2-b^2)}\,\frac{1}{2}\left[1+\frac{W^{\bar\zeta}(ib)}{w^{\zeta'}(iu)}\right] \equiv \left[2w^{\zeta'}(iu)\left[W^{\bar\zeta}(ib)-w^{\zeta'}(iu)\right]\right]^{-1}. \quad (2.36)$$

Его решение также записывается через резольвентное ядро оператора преобразования в импульсном пространстве $a_{æ_\xi}^{\zeta'\,\zeta}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta}$:

$$J_{æ_\xi}^{\zeta}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} - X_{æ_\xi}^{\zeta}(\rho,r) = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} du \sum_{\zeta'=\pm1} g^{\zeta'}(u;b)^{\bar\zeta}\, a_{æ_\xi}^{\zeta'\,\zeta}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta}\, X_{æ}^{\zeta'}(u,r), \quad (2.37)$$

а подстановка этого равенства в (2.24) приводит к представлению

$$V(r)J_{æ_\xi}^{\zeta}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} du \sum_{\zeta'=\pm1}\left[2w^{\zeta'}(iu)\right]^{-1} a_{æ_\xi}^{\zeta'\,\zeta}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta}\, X_{æ_\xi}^{\zeta'}(u,r). \quad (2.38)$$

Вместе с представлением (2.32) уравнение (2.24) и эти равенства эквивалентны уравнениям:

$$a_{æ}^{\zeta''\,\zeta}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta} - K_{æ}^{\zeta''\,\zeta}(u,\rho) = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{u-\mu_o} d\alpha \sum_{\zeta'=\pm1} g^{\zeta'}(\alpha;b)^{\bar\zeta} \begin{cases} K_{æ}^{\zeta''\,\zeta'}(u,\alpha)\; a_{æ}^{\zeta'\,\zeta}(\alpha,\rho;b^2)^{\bar\zeta} \\ a_{æ}^{\zeta''\,\zeta'}(u,\alpha;b^2)^{\bar\zeta}\; K_{æ}^{\zeta'\,\zeta}(\alpha,\rho) \end{cases} \quad (2.39а,б);$$

из которых вытекает свойство симметрии (ср. (2.16)):

$$a_{æ}^{\zeta''\,\zeta}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta} = \frac{\eta^{\zeta}(i\rho)\;u}{\eta^{\zeta''}(iu)\;\rho}\, a_{æ}^{\zeta\,\zeta''}(-\rho,-u;b^2)^{\bar\zeta}. \quad (2.40)$$

Следует отметить, что вместо представления (2.32) можно было бы попытаться определить ядро $K_{æ}$ как матрицу в спинорном пространстве, действующую на спинор $X_{æ}^{\zeta}(\rho,r)$. Это избавило бы от суммирования по листам ζ' ,но, из-за некоммутативности этой матрицы с матрицей $B_{æ}$ (П.1.68), дальнейшие преобразования к уравнению вида (2.35) стали бы невозможны.

Факторизацию зависимости от j и l ($æ_\xi$) в уравнениях (2.39) можно произвести двумя путями, разумеется, с одним и тем же результатом, используя различные базисы в спиновом пространстве (П.I.42)-(П.I.44), и повторяя в остальном рассуждения предыдущего раздела. В базисе $|jlM\rangle$ она воспроизводит форму представления (2.33),(2.34) для ядра $K_{æ}^{\zeta'\,\zeta}(u,\rho)$:

$$a^{\zeta''\zeta}_{\varkappa_\xi}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta} = \frac{iu}{2\pi}\int\limits_{\mu_0}^{u-\rho} d\nu \Big[P_{l_\xi}\big[T(u\rho|\nu)\big]\, \tilde{\mathbb{D}}^{(1)}_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2,u)^{\bar\zeta} +$$

$$+ P_{l_{-\xi}}\big[T(u\rho|\nu)\big]\, \tilde{\mathbb{D}}^{(2)}_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2,u)^{\bar\zeta}\Big], \tag{2.41}$$

и проверяется по индукции с помощью соотношения (П.3.9) при $a=0$ и его аналога, основанного на формуле умножения (П.I.18). Эти соотношения, при подстановке (2.41) в уравнение (2.39а), вместе с условием независимости от j и l приводят к системе уравнений:

$$\tilde{\mathbb{D}}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2,u)^{\bar\zeta} - \Sigma(\nu)\left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(iu)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta}(i\rho)\end{matrix}\right\| = \int\limits_{\mu_0}^{\nu-\mu_0} d\gamma\, \Sigma(\gamma)\int\limits_{\mu_0}^{\nu-\gamma} d\mu\, \frac{i}{2\pi\pi}\int\limits_{\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)}^{\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)} d\alpha^2\, \alpha \,\cdot$$

$$\cdot\left[(\Lambda^+-\alpha^2)(\alpha^2-\Lambda_-)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(\alpha;b)^{\bar\zeta}\left\{\left[\left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(iu)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta'}(i\alpha)\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\eta^{\zeta'}(i\alpha)\\ \left[\eta^{\zeta''}(iu)\right]^{-1}\end{matrix}\right\| \cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{T_\nu Y_\mu - X_\gamma}{T_\nu^2-1}\right)\right]\tilde{\mathbb{D}}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta'\zeta}(\mu;\rho,b^2,\alpha)^{\bar\zeta} + \left\|\begin{matrix}\left[\eta^{\zeta''}(iu)\right]^{-1}\\ \eta^{\zeta'}(i\alpha)\end{matrix}\right\|\left(\frac{T_\nu X_\gamma - Y_\mu}{T_\nu^2-1}\right)\tilde{\mathbb{D}}\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|_{\zeta'\zeta}(\mu;\rho,b^2,\alpha)^{\bar\zeta}\left.\vphantom{\int}\right\}, \tag{2.42}$$

где: $T_\nu \equiv T(u\rho|\nu)$ - взят из (2.34) и аналогично определены в (П.4.3) $X_\gamma \equiv X(u\alpha|\gamma), Y_\mu \equiv Y(\rho\alpha|\mu)$; Λ^+_-,- даны в (П.4.2), а в обозначениях (2.19): $\Lambda^+_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \underline{\alpha}^2(\eta=\pm 1;\nu;\mu,\gamma;u,\rho)$; и всюду берется либо верхняя либо нижняя строчка в двойных скобках.

Сравнивая эту систему с системой (1.37), с учетом формул продолжения (1.43),(2.20), или (П.4.9) и пользуясь определением (2.36) в виде:

$$g^{\zeta'}(-ik;b)^{\bar\zeta} = \frac{-1}{(k^2+b^2)}\,\frac{1}{2}\left[1 + \frac{W^{\bar\zeta}(ib)}{w^{\zeta'}(k)}\right]. \tag{2.43}$$

несложно обнаружить естественное обобщение равенства (2.21):

$$\tilde{\mathbb{D}}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2,u)^{\bar\zeta} = \mathbb{D}\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_{\zeta''\zeta}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta}; \quad p=i\rho;\ q=iu. \tag{2.44}$$

Таким образом, для дираковского гамильтониана с потенциалом (0.38) уравнения для спектральной плотности Т-матрицы по передаче импульса (1.37) и для ее аналитического продолжения (2.44),(2.42) также могут служить основой для описанной во введении динамической схемы. ВФИ определяется соответствующим аналогом равенства (0.39) со сверткой ВРИ по спинорным индексам:

$$F^{\zeta}_{æ_{\xi}}(\rho,b)^{\bar{\zeta}} = \lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(j+1)}\left[\frac{\rho r}{2}\right]^{|æ_{\xi}|}\left\{\overset{\mathrm{T}}{\Xi}{}^{\bar{\zeta}}_{\xi}(\rho,b)\ J^{\zeta}_{æ_{\xi}}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}}\right\}, \quad (2.45а)$$

со спинором $\left[\overset{\mathrm{T}}{\Xi}{}^{\bar{\zeta}}_{\xi}(\rho,b)\right]_{1;2} = \left[\frac{1+\xi}{2};\ \frac{1-\xi}{2}\ b\ \left[i\rho\ \eta^{\zeta}(ib)\right]^{-1}\right]$, не зависящим от j, и в силу (2.35),(2.37), для нее имеют место уравнение (2.46) и представление (2.47):

$$F^{\zeta}_{æ_{\xi}}(\rho,b)^{\bar{\zeta}} - N^{\zeta}_{\xi}(\rho,b)^{\bar{\zeta}} = \int\limits_{\rho+\mu_{0}}^{\infty} du\left[\frac{\rho}{u}\right]^{l_{\xi}} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(u;b)^{\bar{\zeta}}\begin{cases} F^{\zeta'}_{æ_{\xi}}(u,b)^{\bar{\zeta}}\ K^{\zeta'\zeta}_{æ_{\xi}}(u,\rho), & (2.46)\\ N^{\zeta'}_{\xi}(u,b)^{\bar{\zeta}}\ a^{\zeta'\zeta}_{æ_{\xi}}(u,\rho;b^{2})^{\bar{\zeta}}; & (2.47)\end{cases}$$

где:

$$N^{\zeta}_{\xi}(\rho,b)^{\bar{\zeta}} = \left[\frac{W^{\bar{\zeta}}(ib)+m}{w^{\zeta}(i\rho)+m}\right]^{\frac{1-\xi}{2}}; \quad N^{\zeta}_{\xi}(\rho,\rho)^{\zeta} = 1. \quad (2.48)$$

Определение (2.45а) и связанное с ним уравнением (2.31) интегральное представление:

$$F^{\zeta}_{æ_{\xi}}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} - N^{\zeta}_{\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\eta^{\bar{\zeta}}(k)}\left[\frac{\rho}{k}\right]^{l_{\xi}}\int\limits_{0}^{\infty} dr\left\{\overset{\mathrm{T}}{\Phi}{}^{\bar{\zeta}}_{æ_{\xi}0}(k,r)V(r)J^{\zeta}_{æ_{\xi}}(\rho,-ik;r)^{\bar{\zeta}}\right\}, \quad (2.45б)$$

в отличии от определений работ /43,49-51/, годится для обоих значений $\xi=\pm 1$. Оно вытекает из граничного условия (П.I.62) и абстрактного операторного определения (0.29), которое, как показано в следующем параграфе, полностью фиксирует вид (2.48) свободной ВФИ.

В спиральном базисе диагональность функции Грина (2.25) и всех введенных вслед за ней величин пропадает, и вместо (2.39), например, для:

$$a^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(u,\rho;b^{2})^{\bar{\zeta}} = \left\{\left\{a^{\zeta''\zeta}_{æ_{\xi}}(u,\rho;b^{2})^{\bar{\zeta}}\ \delta_{\xi\xi'}\right\}\right\}_{\mu\lambda}, \quad (2.49)$$

в обозначениях (П.1.43)-(П.1.44), получаются уравнения:

$$a^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta} - K^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(u,\rho) = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{u-\mu_o} d\alpha \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(\alpha;b)^{\bar\zeta} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} K^{(j)\zeta''\zeta'}_{\mu\sigma}(u,\alpha)\, a^{(j)\zeta'\zeta}_{\sigma\lambda}(\alpha,\rho;b^2)^{\bar\zeta}. \\ a^{(j)\zeta''\zeta'}_{\mu\sigma}(u,\alpha;b^2)^{\bar\zeta}\, K^{(j)\zeta'\zeta}_{\sigma\lambda}(\alpha,\rho). \end{cases} \tag{2.50}$$

С помощью формулы (П.I.45) и обращения формулы (П.I.49) представление (2.41) приводит к следующей факторизации зависимости от j и μ,λ у резольвенты (2.49):

$$a^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(u,\rho;b^2)^{\bar\zeta} = \frac{iu}{2m}\int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} d\nu\; d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}\left[T_\nu\right]\; d^{(j)}_{\lambda\mu}\left[T_\nu\right]\; \tilde{\mathbb{D}}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;\rho,b^2;u)^{\bar\zeta}, \tag{2.51}$$

$$\tilde{\mathbb{D}}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;\rho,b^2;u)^{\bar\zeta} = \tilde{\mathbb{D}}^{(1)}_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2;u)^{\bar\zeta} + 2\mu 2\lambda\; \tilde{\mathbb{D}}^{(2)}_{\zeta''\zeta}(\nu;\rho,b^2;u)^{\bar\zeta}, \tag{2.52}$$

где произведение d-функций при $T_\nu = T(u\rho|\nu) > 1$ (см.(2.34)) определено однозначно в силу (П.I.21). Эту факторизацию можно, разумеется, получить по индукции непосредственно итерируя уравнение (2.50), с учетом формул умножения (П.I.23),(П.I.24) и представления для ядра $K^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(u,\rho)$, имеющего вид (2.51) с заменой $\tilde{\mathbb{D}}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}$ (2.52) ее борновским членом:

$$\tilde{\mathbb{D}}^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;\cdots) \to \Sigma(\nu)\left[\eta^{\zeta''}(iu)\right]^{-1} + 2\mu 2\lambda\; \Sigma(\nu)\eta^{\zeta}(i\rho). \tag{2.53}$$

Подставляя (2.51)-(2.53) в первое уравнение (2.50) и пользуясь аналогом соотношения (П.3.9), основанным на формулах умножения (П.I.23),(П.I.24), и независимостью $\tilde{\mathbb{D}}^{(1),(2)}_{\zeta''\zeta}$ от j и μ,λ, можно снова получить систему уравнений (2.42).

Весь анализ этого раздела можно повторить для гамильтониана (0.43б). Все несущественные изменения указаны в параграфе I.I после формулы (1.37).

Имеется очевидная аналогия между представлениями (2.17), (2.41),(2.51) для резольвентного ядра и известными представлениями (2.110),(2.129),(2.127) для парциальной off- shell T-матрицы из следующего параграфа. Они отличаются только областью интегрирования по ν, аналитическим продолжением спектральной плотности по энергетическим переменным, и наличием функций Лежандра (или функций вращения) другого рода. Причины этой аналогии выясняются при изучении аналитических свойств этих величин по энергетическим параметрам в главе 3.

С помощью установленных интегральных представлений (2.13), (2.17) и (2.37),(2.41),(2.51) и оценок параграфа I.2 нетрудно обосновать, что ВРИ $J_l, J_æ$ и резольвентные ядра $a_l, a_æ$ для любых потенциалов являются целыми аналитическими функциями константы связи g и момента j (или l) Тогда как ВФИ — целая функция g и регулярна в области $Re\ j>j_o$ ($Re\ l>l_o$), где j_o, l_o определяются условиями сходимости интегралов в представлениях (2.22),(2.47), — только для потенциалов, регулярных по сравнению с H_0 при $r\to 0$ (см.раздел 4).

3. В гамильтонианах типа III (0.44) потенциал (0.45) можно записать в виде суммы спин-орбитального и дарвиновского взаимодействий /14/:

$$U(\vec{x}) = \left\{1 + (2m)^{-2}\left[(\vec{\sigma}\circ\vec{L})\ \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{2}\ \vec{\nabla}^2\right]\right\} V(r). \qquad (2.54)$$

Несмотря на явную зависимость от импульса в (0.45), указывающую на нелокальность потенциала, равенство (2.54) в базисе $|jlM\rangle$ приводит к локальному выражению в каждой парциальной волне:

$$\langle jlM|2m\ U(\vec{x})|jlM\rangle \equiv U_{æ_\xi}(r) = \int_{\mu_o}^{\infty} d\nu\ \Sigma_{æ_\xi}(\nu)\frac{e^{-\nu r}}{r} - I_0^{\Sigma}\ \frac{\delta(r)}{2(2m)^2 r^2}\ ; \qquad (2.55)$$

где приняты прежние обозначения (2.34) для l_ξ и $æ_\xi$, и:

$$\Sigma_{æ_\xi}(\nu) = \Sigma(\nu) + (2m)^{-2}\left[\frac{\nu^2}{2}\Sigma(\nu) + (1+æ_\xi)\nu \int_{\mu_o}^{\nu} d\gamma\ \Sigma(\gamma)\right], \qquad (2.56)$$

$$4\pi\ \delta_3(\vec{x}) = r^{-2}\delta(r) = \frac{1}{2}\ \delta^{(2)}(r). \qquad (2.57)$$

Поведение этого потенциала при $r \to 0$ имеет вид:

$$U_{\text{æ}_\xi}(r) \to -\, I_0^\Sigma \frac{\delta(r)}{2(2m)^2\, r^2} + I_0^\Sigma \frac{(1+\text{æ}_\xi)}{(2m)^2 r^3} + \frac{1}{r}\left[I_0^\Sigma - I_2^\Sigma \frac{(\text{æ}_\xi+\frac{1}{2})}{(2m)^2} \right], \quad (2.58)$$

где:

$$I_n^\Sigma = \int_{\mu_0}^{\infty} d\nu\; \Sigma(\nu)\; \nu^n \; . \quad (2.59)$$

Таким образом, потенциал $U_{\text{æ}_\xi}(r)$ регулярен /3,17/:

$$\lim_{r\to 0} r^2\, U_{\text{æ}_\xi}(r) = 0, \quad (2.60)$$

если выполняется условие

$$I_0^\Sigma = 0, \quad (2.61)$$

означающее отсутствие точечного заряда в центре источника потенциала $V(r)$ (0.38), и сингулярен в противном случае как r^{-3}.

Второй член в (2.55) сосредоточен в точке $r=0$ и эффективен только при $l_\xi=0$ ($j=\frac{1}{2}$, $\xi=-1$). Отвлекаясь от этого члена при $r\neq 0$, можно повторить для ВРИ $J_{lj}(\rho,b;r)$ уравнения

$$\left[G_{ljV}(-b^2) \right]^{-1} J_{lj}(\rho,b;r) = (\rho^2-b^2)\; \chi_l(\rho r), \quad (2.62)$$

отвечающего при $l=l_\xi$ оператору

$$\left[G_{ljV}(-b^2) \right]^{-1} = \partial_r^2 - l_\xi(l_\xi+1) r^{-2} - b^2 - U_{\text{æ}_\xi}(r), \quad (2.63)$$

все рассуждения раздела 1 этого параграфа при $N=3$, и получить аналогичные уравнения и представления для ВРИ:

$$J_{lj}(\rho,b;r) - \chi_l(\rho r) = \int_{\rho+\mu_0}^{\infty} \frac{du}{(u^2-b^2)} \begin{cases} K_{lj}(u,\rho)\; J_{lj}(u,b;r); & (2.64) \\ a_{lj}(u,\rho;b^2)\; \chi_l(ur); & (2.65) \end{cases}$$

и для резольвентного ядра:

$$a_{lj}(u,\rho;b^2) - K_{lj}(u,\rho) = \int_{\rho+\mu_0}^{u-\mu_0} \frac{d\alpha}{(\alpha^2-b^2)} \begin{cases} K_{lj}(u,\alpha)\; a_{lj}(\alpha,\rho;b^2). \\ a_{lj}(u,\alpha;b^2)\; K_{lj}(\alpha,\rho). \end{cases} \quad (2.66)$$

Ядро этих уравнений определяется спектральной плотностью (2.56)

$$K_{l_\xi j}(u,\rho) = \int_{\mu_0}^{u-\rho} d\nu\; \Sigma_{\text{æ}_\xi}(\nu)\; P_{l_\xi}\left[T(u\rho|\nu) \right]. \quad (2.67)$$

Пользуясь рекурентными соотношениями для функций Лежандра

(П.I.17а,б), в обозначениях (2.34) его можно привести к виду:

$$K_{l_\xi j}(u,\rho) = \tilde{A}^{(1)}(u,\rho)\, K_{l_\xi}(u,\rho) + \tilde{A}^{(2)}(u,\rho)\, K_{l_{-\xi}}(u,\rho), \qquad (2.68)$$

где в соответствии с (1.40) при $q=iu$, $p=i\rho$:

$$\tilde{A}^{(1)}(u,\rho) = 1 + \frac{u^2+\rho^2}{2(2m)^2} = \frac{1}{2m} A^{(1)}(q,p);$$

$$\tilde{A}^{(2)}(u,\rho) = -\frac{u\rho}{(2m)^2} = \frac{1}{2m} A^{(2)}(q,p). \qquad (2.69)$$

Сравнение (2.66),(2.68) с (2.39),(2.33) соответственно показывает, что факторизация зависимости от j,l (или от j и μ,λ в спиральном базисе) здесь полностью повторяет процедуру предыдущего раздела 2, и приводит к результатам, аналогичным (2.41) и (2.51):

$$a_{lj}(u,\rho;b^2) = \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} d\nu \Big[P_{l_\xi}\Big[\mathrm{T}(u\rho|\nu)\Big]\, \tilde{D}^{(1)}(\nu;\rho,b^2,u) +$$

$$+ P_{l_{-\xi}}\Big[\mathrm{T}(u\rho|\nu)\Big]\, \tilde{D}^{(2)}(\nu;\rho,b^2,u)\Big]. \quad l=l_\xi=j+\frac{\xi}{2}. \qquad (2.70)$$

Система уравнений для функций $\tilde{D}^{(1),(2)}$ также весьма похожа на систему (2.42) и в таких же обозначениях имеет вид:

$$\tilde{D}^{(1)}_{(2)}(\nu;\rho,b^2,u) - \Sigma(\nu)\, \tilde{A}^{(1)}_{(2)}(u,\rho) = \int\limits_{\mu_o}^{\nu-\mu_o} d\gamma\, \Sigma(\gamma) \int\limits_{\mu_o}^{\nu-\gamma} d\mu\, \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)}^{\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)} d\alpha^2\, (\alpha^2-b^2)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\Big[(\Lambda^+-\alpha^2)(\alpha^2-\Lambda_-)\Big]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left[\tilde{A}^{(1)}_{(2)}(u,\alpha) + \tilde{A}^{(2)}_{(1)}(u,\alpha) \left[\frac{\mathrm{T}_\nu \mathrm{Y}_\mu - \mathrm{X}_\gamma}{\mathrm{T}_\nu^2-1}\right] \right] \tilde{D}^{(1)}_{(2)}(\mu;\rho,b^2,\alpha) \right.$$

$$\left. + \tilde{A}^{(1)}_{(2)}(u,\alpha) \left[\frac{\mathrm{T}_\nu \mathrm{X}_\gamma - \mathrm{Y}_\mu}{\mathrm{T}_\nu^2-1}\right] \tilde{D}^{(2)}_{(1)}(\mu;\rho,b^2,\alpha) \right\}. \qquad (2.71)$$

Нетрудно увидеть, что полученая система также является аналитическим продолжением (1.43),(2.20) системы уравнений, описанной в разделе I.I.3. То есть и для потенциала (2.55) ВРИ уравнения (2.62) при $r\neq 0$ однозначно определяется соотношениями (2.65),(2.70) по скачку полной Т-матрицы по передаче импульса.

Если условие (2.61) выполнено, то ВФИ определяется по ВРИ соотношением (0.39), удовлетворяет уравнению вида (2.23) с ядром (2.67),(2.68) и представляется через резольвенту (2.66),(2.70) равенством (2.22а). Если же это условие не выполнено,- потенциал сингулярен при $r \to 0$, и извлечение физической информации из решения Иоста становится отдельной задачей. Некоторые способы ее решения описаны в следующем разделе.

Для потенциалов, убывающих быстрее кулоновского при $r \to \infty$, во всех рассмотренных выше случаях переход в ВРИ и ВФИ на энергетическую поверхность непосредственно определяет решения Иоста однородного уравнения Шредингера или Дирака и функцию (детерминант) Иоста соответственно:

$$f_l^{(N)}(b,r) = J_l^{(N)}(b,b;r); \qquad \mathrm{F}_{æ}^{\zeta}(\rho,r) = \mathrm{J}_{æ}^{\zeta}(\rho,\rho;r)^{\zeta} . \qquad (2.72а)$$

$$F_l^{(N)}(b) = F_l^{(N)}(b,b); \qquad F_{æ}^{\bar{\zeta}}(b) = F_{æ}^{\zeta}(b,b)^{\bar{\zeta}} . \qquad (2.72б)$$

Для дальнодействующих потенциалов иостовское граничное условие $f_l(b,r) \to e^{-br}$ при $r \to \infty$ оказывается несовместимо с однородным уравнением Шредингера или Дирака /16,27/, и эти простые соотношения нуждаются в модификации /25-28/, пример которой приведен в параграфе 4.2.

Из (2.72) и (2.13),(2.22) при $\rho=b$ вытекают равенства:

$$f_l^{(N)}(b,r) = \chi_j(\rho r) + \int\limits_{b+\mu_o}^{\infty} du\, \frac{\Phi_l^{(N)}(u,b)}{(u^2-b^2)}\, \chi_j(ur) , \qquad (2.73а)$$

$$V(r)\, f_l^{(N)}(b,r) = \int\limits_{b+\mu_o}^{\infty} du\, \Phi_l^{(N)}(u,b)\, \chi_j(ur) , \qquad (2.73б)$$

$$F_l^{(N)}(b,b) = F_l^{(N)}(b) = 1 + \int\limits_{b+\mu_o}^{\infty} du\, \frac{\Phi_l^{(N)}(u,b)}{(u^2-b^2)} \left[\frac{b}{u}\right]^{j} . \qquad (2.74)$$

Функция $\Phi_l^{(N)}(u,b)$ при $N=3$ была введена де Альфаро и Редже /17/. *Таким образом, ее удается связать с аналитически продолженной полувнеэнергетической (half-off-shell) спектральной* *плотностью* T-*матрицы по передаче импульса*. Из (2.17) при $b=\rho$:

$$\Phi_l^{(N)}(u,\rho) = a_l^{(N)}(u,\rho;\rho^2) =$$

$$= \frac{4\pi}{\Omega_N \pi^a} \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} dv\; P_J^a\Big[T(u\rho|v)\Big] \frac{\tilde{D}^{(N)}(v;\rho,\rho^2,u)}{\Big[\Delta(u^2,\rho^2,v^2)\Big]^{a/2}} . \qquad (2.75)$$

Она обладает интересными аналитическими и граничными свойствами, рассмотренными в главе 3. Уравнения (2.14) при $b=\rho$ превращаются соответственно в уравнение для этой функции и в ее представление через резольвенту $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$.

Для Дираковского оператора из (2.41) вытекает:

$$\Phi_{\varkappa_\xi}^{\zeta''\zeta}(u,\rho) = a_{\varkappa_\xi}^{\zeta''\zeta}(u,\rho;\rho^2)^{\zeta} = \frac{iu}{2m} \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} dv \Big[P_{l_\xi}\Big[T(u\rho|v)\Big] \tilde{\mathbb{D}}^{(1)}_{\zeta''\zeta}(v;\rho,\rho^2,u)^{\zeta}$$

$$+ P_{l_{-\xi}}\Big[T(u\rho|v)\Big] \tilde{\mathbb{D}}^{(2)}_{\zeta''\zeta}(v;\rho,\rho^2,u)^{\zeta}\Big], \qquad (2.76)$$

и аналогично в спиральном базисе из (2.51): $T_v \equiv T(u\rho|v)$

$$\Phi_{\mu\lambda}^{(J)\zeta''\zeta}(u,\rho) = \frac{iu}{2m} \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} dv\; d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}\Big[T_v\Big]\; d^{(J)}_{\lambda\mu}\Big[T_v\Big]\; \tilde{\mathbb{D}}_{\mu\lambda}^{\zeta''\zeta}(v;\rho,\rho^2,u)^{\zeta}. \qquad (2.77)$$

Детерминанты (0.29) определяются формулой (2.47) при $\rho=b$:

$$F_{\varkappa_\xi}^{\bar\zeta}(b) = 1 + \int\limits_{b+\mu_o}^{\infty} du \left[\frac{b}{u}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(u;b)^{\bar\zeta}\; N_\xi^{\zeta'}(u,b)^{\bar\zeta}\; \Phi_{\varkappa_\xi}^{\zeta'\bar\zeta}(u,b). \qquad (2.78а)$$

В спиральном базисе, с учетом (П.I.44) и (П.I.46), полагая

$$F_{\mu\lambda}^{(J)\bar\zeta}(b) = \Big\{\Big\{F_{\varkappa_\xi}^{\bar\zeta}(b)\;\delta_{\xi'\xi}\Big\}\Big\}_{\mu\lambda};\quad \tilde{N}_{\mu\lambda}^{(J)\zeta'}(u,b)^{\bar\zeta} = \Big\{\Big\{\delta_{\xi'\xi}\left[\frac{b}{u}\right]^{l_\xi} N_\xi^{\zeta'}(u,b)^{\bar\zeta}\Big\}\Big\}_{\mu\lambda};$$

для матрицы Иоста /3/ можно получить:

$$F_{\mu\lambda}^{(J)\bar\zeta}(b) = \delta_{\mu\lambda} + \int\limits_{b+\mu_o}^{\infty} du \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(u;b)^{\bar\zeta} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \tilde{N}_{\mu\sigma}^{(J)\zeta'}(u,b)^{\bar\zeta}\; \Phi_{\sigma\lambda}^{(J)\zeta'\bar\zeta}(u,\rho). \qquad (2.78б)$$

4. Сингулярные потенциалы типа V (0.47) характеризуются условием /17,38,53/: $\int\limits_0^c dr\, r\, |V(r)| = \infty$, $c<\infty$. Сосредоточенные потенциалы $(\vec{\nabla}^2)^n\, \delta_3(\vec{x})$ [1], возникающие при их регуляризации, или

---

[1]) В этом разделе для простоты принято, что $N=3$.

иным путем, приводят к несамосопряженным гамильтонианам. Построение соответствующих самосопряженных расширений требует либо введения нелокального потенциала /54/, либо выхода из обычного гильбертова пространства физических состояний в более широкое /55/, после чего расширенный полный и свободный гамильтонианы не имеют, вообще говоря, общих инвариантных подпространств /55/, что лишает смысла определения детерминантов (0.11), (0.12), (0.24)[2)]. Строго можно говорить о функции Иоста только как о коэффициенте в разложении регулярного решения, $\varphi_l(k^2;r)\to 0$ при $r\to 0$, по решениям Иоста, $f_l(\mp ik,r)\to e^{\pm ikr}$ при $r\to\infty$:

$$2ik\,\varphi_l(k^2;r) = f_l(ik)\,f_l(-ik,r) - f_l(-ik)\,f_l(ik,r)\ ; \qquad (2.79\text{а})$$

$$f_l(\mp ik) = \left[f_l(\mp ik,r)\overleftrightarrow{\partial}_r\varphi_l(k^2;r)\right]. \qquad (2.79\text{б})$$

Если второе, линейно независимое с $\varphi_l(k^2;r)$ решение выбрать также функцией от k^2, то из равенств :

$$\left[I_l(k^2;r)\overleftrightarrow{\partial}_r\varphi_l(k^2;r)\right] = 1;\ \left[f_l(ik,r)\overleftrightarrow{\partial}_r f_l(-ik,r)\right] = 2ik\ ; \qquad (2.79\text{в})$$

следует /3/:

$$I_l(k^2;r) = \frac{1}{2}\left[\frac{f_l(ik,r)}{f_l(ik)} + \frac{f_l(-ik,r)}{f_l(-ik)}\right], \qquad (2.80\text{а})$$

и обратно:

$$f_l(-ik,r) = f_l(-ik)\ I_l(k^2;r) + ik\,\frac{\varphi_l(k^2;r)}{f_l(ik)}. \qquad (2.80\text{б})$$

Физическое решение регулярно при $r\to 0$ и задано условием при $r\to\infty$ /3-7/:

$$\phi^{(\pm)}_{lV}(k,r) \equiv \frac{(\pm i)^l\,k}{f_l(\mp ik)}\,\varphi_l(k^2;r) \to e^{\pm i\eta_l(k)}\ \sin\left[kr-\tfrac{1}{2}\pi l+\eta_l(k)\right]. \qquad (2.81)$$

Если оператор $\left[G_{lV}(k^2)\right]^{-1}$ определен равенством (2.2) при $N=3$, то:

[2)] Используя формулу $\delta\ ln\{F_l(b)\} = -\,Tr\{G_{lV}(W)\ \delta V\}$, можно показать, что при регуляризации обрезанием /53/: $V(r)=0$ при $r<\varepsilon$; для отталкивающего потенциала (0.47) выражение (0.24) имеет особенность вида $exp\ \{\sqrt{g}\ \ \varepsilon^{-\sigma}(4\sigma)^{-1}+\cdots\}$.

$$\left[G_{lV}(k^2)\right]^{-1}\left\{\begin{array}{l} G^{(\pm)}_{lV}(k;r,y) = \delta(r-y) \\ \left.\begin{array}{l} f_l(\mp ik,r) \\ \varphi_l(k^2\!,r) \\ I_l(k^2\!,r) \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right. \qquad (2.82а)$$

Его функция Грина для локальных потенциалов имеет вид /3-7/:

$$G^{(\pm)}_{lV}(k;r,y) = -\frac{i^{\mp l}}{k}\left[\theta(r-y) f_l(\mp ik,r)\phi^{(\pm)}_{lV}(k,y) + [r \rightleftarrows y]\right], \quad (2.82б)$$

аналогичный (2.5), и связана с вольтерровской функцией Грина:

$$B_{lV}(ik;r,y) = \frac{1}{2ik}\left[f_l(ik,r)f_l(-ik,y) - [r \rightleftarrows y]\right] = B_{lV}(-ik;r,y) =$$

$$= +\frac{i^{\mp l}}{k}\left[f_l(\mp ik,r)\phi^{(\pm)}_{lV}(k,y) - [r \rightleftarrows y]\right] \qquad (2.83)$$

соотношением /3-7,17/:

$$G^{(\pm)}_{lV}(k;r,y) = \theta(y-r) B_{lV}(ik;r,y) - \frac{i^{\mp l}}{k} f_l(\mp ik,r)\,\phi^{(\pm)}_{lV}(k,y). \quad (2.84)$$

С помощью этих формул и уравнения (2.7) для ВРИ легко проверяются представления /31-34/: $Re\ \rho > |Re\ b|$,

$$J_l(\rho,b;r) = (\rho^2-b^2)\int_r^\infty dy\ \chi_l(\rho y)\ B_{lV}(b;r,y), \qquad (2.85а)$$

$$J_l(\rho,b;r) = \chi_l(\rho r) + \int_r^\infty dy\ \chi_l(\rho y)\ V(y)\ B_{lV}(b;r,y). \qquad (2.85б)$$

Все приведенные здесь выше равенства не зависят ни от степени сингулярности ни от знака потенциала. Граничные же условия при $r \to 0$, напротив, существенно от них зависят. Для потенциала вида (0.47) /38,53,56,57/ они таковы:

$$\text{при } \sigma<0: \qquad\qquad \text{при } \sigma>0;\ g>0:$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_l(k^2\!,r)\\ I_l(k^2\!,r)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^{l+1}; \\ \dfrac{r^{-l}}{(2l+1)}; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^{(\sigma+1)/2}\ exp\left[-\sqrt{g}\ (\sigma r^\sigma)^{-1}\right] \\ \dfrac{r^{(\sigma+1)/2}}{2\sqrt{g}}\ exp\left[\sqrt{g}\ (\sigma r^\sigma)^{-1}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0; \\ \infty; \end{array}\right. \qquad (2.86а)$$

тогда как: $\qquad$ при $\sigma>0;\ g<0$:

$$\Rightarrow \left\{r^{(\sigma+1)/2}\ |g|^{-\frac{1}{4}}\ sin\left[\sqrt{|g|}\ (\sigma r^\sigma)^{-1} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\sigma}(l+\tfrac{1}{2}) \mp \tfrac{1}{2}\right] - \delta_l\right]\right.; \qquad (2.86б)$$

т.е.оба решения осциллируя исчезают при $r \to 0$, а δ_l – произвольная фаза отражения в нуле. Однако, независимость этих условий от k позволяет для любого из них получить из (2.79б) равенство:

$$f_l(\rho) = (\rho^2+k^2) \int_0^\infty dr\ \varphi_l(k^2,r)\ f_l(\rho,r), \tag{2.87}$$

где правая часть не зависит от k^2. Подставляя сюда (2.73), $N=3$, можно записать это равенство в виде:

$$f_l(\rho) = \mathcal{F}_l(\rho,-ik) + (\rho^2+k^2) \int_{\rho+\mu_0}^\infty du\ \frac{\Phi_l(u,\rho)\ \mathcal{F}_l(u,-ik)}{(u^2-\rho^2)(u^2+k^2)}, \tag{2.88}$$

где положено

$$\mathcal{F}_l(\rho,-ik) = (\rho^2+k^2) \int_0^\infty dr\ \varphi_l(k^2,r)\ \chi_l(\rho r). \tag{2.89}$$

Отсюда следует, что функцию Иоста можно определить либо как предел (сравни с (2.72))

$$f_l(\rho) = \lim_{k\to i\rho} \mathcal{F}_l(\rho,-ik), \tag{2.90}$$

либо соотношением (2.87), например, при $k^2=0$:

$$f_l(\rho) = \rho^2 \int_0^\infty dr\ \varphi_l(0,r)\ f_l(\rho,r), \tag{2.91}$$

где, кроме решения Иоста, необходимо регулярное решение с нулевой энергией. Смысл функции (2.89) легко установить, когда оператор в (2.82а) имеет при $r=0$ тип "предельная точка" /4,57/, отвечающий граничным условиям (2.86а) (если при $\sigma<0$ считать $l>\frac{1}{2}$). В этом случае, т.к. $(I_l(k^2,r)/\varphi_l(k^2,r))\to+\infty$ при $r\to 0$, из (2.80),(2.83),(2.85а) для функции (2.89) можно получить:

$$\mathcal{F}_l(\rho,-ik) = \lim_{r\to 0} \frac{J_l(\rho,-ik;r)}{I_l(k^2,r)}, \tag{2.92}$$

что является естественным обобщением (0.39) на случай сингулярных потенциалов отталкивания. Из (2.83) и (2.85б) тогда вытекает представление:

$$\mathcal{F}_l(\rho,-ik) = \int_0^\infty dr\ \varphi_l(k^2,r)\ V(r)\ \chi_l(\rho r) + \begin{cases} \overset{o}{f}_l(\rho); & \sigma<0; \\ 0; & \sigma>0,\ g>0; \end{cases} \tag{2.93}$$

а из (2.12) или (2.64) (без j) получается уравнение:

$$\mathcal{F}_l(\rho,b) = \int\limits_{\rho+\mu_0}^{\infty} du \, \frac{K_l(u,\rho)}{(u^2-b^2)} \, \mathcal{F}_l(u,b) + \begin{cases} \overset{o}{f}_l(\rho); & \sigma<0; \\ 0; & \sigma>0, \ g>0; \end{cases} \tag{2.94}$$

Таким образом, функция $\mathcal{F}_l(\rho,b)$ (2.89) является обобщением ВФИ из раздела I этого параграфа на случай сингулярного потенциала отталкивания, а в регулярном случае, как легко видеть из сравнения с (2.23), отличается от прежней ВФИ только нормировкой:

$$\mathcal{F}_l(\rho,b) = \overset{o}{f}_l(\rho) \, F_l(\rho,b), \quad \sigma<0; \tag{2.95}$$

$$\overset{o}{f}_l(\rho) = \left[\frac{2}{\rho}\right]^l \frac{2}{\sqrt{\pi}} \, \Gamma\left[l+\frac{3}{2}\right]. \tag{2.96}$$

При этом представление (2.22а) принимает вид:

$$\mathcal{F}_l(\rho,b) = \overset{o}{R}_l(\rho) + \int\limits_{\rho+\mu_0}^{\infty} du \, \frac{a_l(u,\rho;b^2)}{(u^2-b^2)} \, \overset{o}{R}_l(u), \tag{2.97}$$

где для $\sigma<0$ $\overset{o}{R}_l(\rho) \Rightarrow \overset{o}{f}_l(\rho)$, а при $\rho=-ik$ (2.93) превращается в одну из известных формул /3,17,24,31,34/ для функции Иоста.

При переходе к сингулярному отталкивающему потенциалу $\sigma>0$, $g>0$ в (2.93),(2.94) теряется нормировка на свободную функцию Иоста (2.96), однако все приведенные выше соотношения для $f_l(\rho)$ и $\mathcal{F}_l(\rho,b)$, кроме последнего представления, остаются в силе. Представление (2.97) не может выполняться, поскольку уравнение (2.94) становится однородным. Можно попытаться по известному резольвентному ядру $a_l(u,\rho;b^2)$ подобрать функцию $\overset{o}{R}_l(\rho;\Lambda)$, зависящую от параметра Λ так чтобы $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} \overset{o}{R}_l(\rho;\Lambda)=0$, но интегральный член в (2.97) давал бы конечный результат, не зависящий от $\Lambda\to\infty$. Найти такую функцию в общем случае не проще, чем решить исходное уравнение (2.94). Ясно однако, что наличие у него нетривиального решения связано с сингулярным поведением ядра $K_l(u,\rho)$ при $u\to\infty$ /58/. Это подсказывает рассмотреть соответствующее поведение резольвентного ядра $a_l(u,\rho;b^2)$. Действительно, если при $u\to\infty$ последнее можно представить в факторизованном виде: (сравни (0.8)):

$$a_l(u,\rho;b^2) \Rightarrow A_l(u,b^2)\, C_l(\rho,b), \tag{2.98}$$

причем

$$K_l(u,\rho)/A_l(u,b) \to 0, \text{ при } u\to\infty, \tag{2.99}$$

то переходя к этому пределу во втором уравнении (2.14) или (2.66), получим для $C_l(\rho,b)$ однородное уравнение, тождественное (2.94). То есть можно принять что

$$\mathcal{F}_l(\rho,b) = C_l(\rho,b) = \lim_{u\to\infty} a_l(u,\rho;b^2)/A_l(u,b^2). \tag{2.100а}$$

Функцию $A_l(u,b^2)$ можно независимо найти из первого уравнения (2.14) при $u\to\infty$, когда ядро $K_l(u,\rho)$ заменяется своей вырожденной асимптотикой:

$$K_l(u,\rho) \Rightarrow U_l(u)\, \overset{o}{f}_l(\rho) = \frac{g(2l)!}{(l!)^2}\left[\frac{u}{4\rho}\right]^l \int_0^u dv\, \Sigma(v)\left[1-\frac{v^2}{u^2}\right]^l.$$

Его решение при $u\to\infty$ дает:

$$A_l(u,b^2) = U_l(u)\, exp\left[O_l(u,b^2)\right]. \tag{2.100б}$$

Условие (2.99) выполнено, если первообразная

$$O_l(u,b^2) = \int^u d\alpha\, \frac{U_l(\alpha)\, \overset{o}{f}_l(\alpha)}{(\alpha^2-b^2)}$$

является возрастающей до бесконечности функцией u, что для рассмотренного выше степенного потенциала (0.47):

$$\Sigma(v) = g\, v^{2\sigma}\left[\Gamma(2\sigma+1)\right]^{-1}$$

приводит к ограничениям $\sigma\geqslant 0$, $g\geqslant 0$, соответствующим сингулярному потенциалу отталкивания.

Поскольку $a_l(u,\rho;b^2)$, вообще говоря, обобщенная функция u-ρ, для определения ВФИ удобнее использовать описанный выше предельный переход по параметру $\Lambda\to\infty$ в представлении (2.97), для чего в нем необходимо заменить $\overset{o}{R}_l(\rho)$ регуляторной функцией, в качестве которой, в соответствии с (2.100а,б), можно взять функцию:

$$\overset{o}{R}_l(\rho;\Lambda) = \overset{o}{f}_l(\rho)\,\frac{1}{\Lambda}\,exp\left\{-\frac{1}{\Lambda}\,exp\left[0_l(\rho,b^2)\right]\right\}.$$

Таким образом, сингулярные потенциалы отталкивания (0.47) также включаются в сферу применимости метода ВФИ, и спектральная плотность Т-матрицы по передаче импульса позволяет (хотя и не столь непосредственно как в регулярном случае) построить для них все интересующие величины. Стоит напомнить, что фазы рассеяния,- единственные наблюдаемые характеристики для таких потенциалов, определяются непосредственно по решениям Иоста /3,38/:

$$\eta_l(k) = \frac{1}{2}\pi l + k\int_0^\infty dr\,\left[|f_l(\mp ik,r)|^{-2}-1\right].$$

Необходимость в описанной выше перенормировочной процедуре для определения ВФИ и функции Иоста связана в конечном счете с известной неаналитичностью этих величин по константе связи g в точке g=0 для сингулярных потенциалов /38,53/. В тоже время, как отмечалось в конце раздела 2, $\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2;u)$, $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$, $\Phi_l^{(N)}(u,\rho)$ $J_l^{(N)}(\rho,b;r)$, $f_l(\rho,r)$- целые функции g независимо от поведения потенциала при $r\to 0$.

Для сингулярных потенциалов притяжения $\sigma>0$, $g<0$, точка $r=0$ имеет тип "предельная окружность", отвечающий граничному условию (2.86б) /4,57/. Из всех следующих за ним соотношений остается в силе для произвольных l только определение функции Иоста (2.87) и его вариант (2.91). Последний удобен тем, что пертурбативная и непертурбативня информация в нем разнесены по разным функциям: пертурбативная - только в решении Иоста; непертурбативная - только в регулярном решении при нулевой энергии, которое иногда находится аналитически /38,53/, и содержит параметры, фиксирующие самосопряжнное расширение парциального гамильтониана /56,57/.

В то время как ВРИ и резольвента $a_l(u,\rho;b^2)$ существуют и однозначно определяются спектральной плотностью Т-матрицы для любых локальных потенциалов вида (0.38),(0.47) по формулам (2.17),(2.13) и (2.75),(2.73),— ВФИ для сингулярных потенциалов притяжения в форме (2.89) не существует при $l\geqslant\frac{3}{2}(\sigma+1)$, а в виде (2.92),(2.97),- не существует вовсе, и одной спектральной плотности $\tilde{D}(\nu;\rho,b^2;u)$ в этом случае принципиально не достаточно для определения функции Иоста.

2.2. Внеэнергетическая функция Иоста и уравнение Липпмана-Швингера

Имея в виду возможные теоретико-полевые обобщения метода ВФИ (глава 4) и включение нелокальных взаимодействий, представляется принципиально важным введение ВФИ оперированием с величинами, заданными только в импульсном представлении, без апелляции к граничным условиям в координатном пространстве типа (0.39) или (2.92).

В этом параграфе указывается прямой путь получения динамических уравнений для ВФИ из уравнений Липпмана-Швингера (ЛШ), и формального операторного определения детерминанта Иоста (0.24), (0.29), применимый, в отличие от /33,34/, для любых l из области ее аналитичности. Он основан на формуле обращения анзаца (0.40), выражающей ВФИ через парциальную half-off-shell амплитуду, и естественно обобщающей представление для детерминанта Иоста, которое следует непосредственно из его абстрактного определения (0.24а) без использования локальности потенциала и граничного условия при $r\to 0$ /59/.

I. Для гамильтонианов типа I и IV это представление таково

$$\frac{M_l^{(N)}(k^2)}{F_l^{(N)}(\mp ik)} = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \frac{T_l^{(\pm)(N)}(s,k)}{(s^2-k^2\mp i0)}\left[\frac{s}{k}\right]^j ; \; j=l-a_N. \qquad (2.101)$$

Его нетрудно получить также как в трехмерном случае /34,59/, стартуя с определения другого детерминанта

$$M_l^{(N)}(k^2) = det\left[\mathrm{I} - \mathrm{B}_{lo}^{(N)}(k^2)\,\mathrm{V}\right], \qquad (2.102)$$

являющегося мерой нелокальности потенциала V, и подставляя разбиение вида (2.84) для свободной функции Грина (2.5) на вольтерровую $\mathrm{B}_{lo}^{(N)}(k^2)$ (2.8) и вырожденную (сепарабельную) $\mathrm{C}_{lo}^{(\pm)^{(N)}}(k)$ части:

$$\mathrm{G}_{lo}^{(N)(\pm)}(W(k)) = \mathrm{B}_{lo}^{(N)}(k^2) + \mathrm{C}_{lo}^{(\pm)^{(N)}}(k) ; \qquad (2.103)$$

выделяя затем детерминант $F_l^{(N)}(\mp ik)$ (0.24a) и используя уравнение ЛШ для физического решения $\phi_{lV}^{(\pm)(N)}(k,r) \equiv \langle r|\phi_{lV}^{(N)}(k\pm)\rangle$ с функцией Грина (2.5) и с $\langle r|\phi_{lo}^{(N)}(k)\rangle \equiv \phi_{jo}(kr)$ (П.I.74), и тождество для любого вырожденного оператора $\mathrm{C}=|\alpha\rangle\langle\beta|$:

$$det\left[\mathrm{I} + \mathrm{CV}\right] = 1 + Tr\left[\mathrm{CV}\right] , \qquad (2.104)$$

что в итоге приводит к равенству:

$$\frac{M_l^{(N)}(k^2)}{F_l^{(N)}(\mp ik)} = 1 - \frac{(\mp i)^j}{k}\langle\chi_j(\mp ik)|\mathrm{V}|\phi_{lV}^{(N)}(k\pm)\rangle , \qquad (2.105)$$

где $\langle\chi_j(\mp ik)|r\rangle \equiv \chi_j(\mp ikr)$ (П.I.74). Остается воспользоваться определением парциальной half-off-shell T-матрицы /3-6/:

$$-\frac{1}{k}\,\mathrm{V}|\phi_{lV}^{(N)}(k\pm)\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ds\; T_l^{(\pm)(N)}(s,k)\;|\phi_{lo}^{(N)}(s)\rangle \qquad (2.106)$$

и значением (П.I.73) для матричного элемента $\langle\chi_j(\mp ik)|\phi_{lo}^{(N)}(s)\rangle$, чтобы превратить (2.105) в (2.101). Для локального потенциала V, по определению вольтеррового оператора, детерминант (2.102):

$$M_l^{(N)}(k^2)\Big|_{loc} \equiv 1 , \qquad (2.107)$$

и равенство (2.105) в координатном представлении, с учетом (2.81) и (2.90),(2.95), лишь формой записи отличается от формулы (2.93) при $\rho=\mp ik$, $\sigma<0$. Воспроизведенные выше известные рассуждения (2.101)-(2.107) /59/ систематически используются в дальнейшем.

Парциальные half-off-shell амплитуды $T_l^{(\pm)(N)}(q,k)$ связаны с off-shell амплитудами:

$$T_l^{(\pm)(N)}(q,k) = T_l^{(N)}(q,p;b^2)\big|_{b=0\mp ik}, \qquad (2.108)$$

которые определяются парциальным разложением /35,36/ полной T-матрицы (1.3) при $\vec{q}=q\vec{æ}, \vec{p}=p\vec{v}$, $\lambda=\lambda_N$, $a=a_N=\frac{1}{2}-\lambda_N$:

$$\langle\vec{q}|T^{(N)}(-b^2)|\vec{p}\rangle = -\frac{(qp)^a}{q\Omega_N\lambda\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+2\lambda)C_l^{\lambda}(\vec{æ}\circ\vec{v})\; T_l^{(N)}(q,p;b^2), \qquad (2.109)$$

и, в силу (П.I.8), при достаточно больших l могут быть выражены через ее спектральную плотность /35,36/:

$$T_l^{(N)}(q,p;b^2) = \frac{4\pi\, e^{-i\pi a}}{\pi^a\,\Omega_N 2p}\int_{\mu_o}^{\infty}d\nu\; Q_j^a\big[Z_\nu\big]\,\frac{D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)}{\big[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\big]^{a/2}}, \qquad (2.110)$$

где: $Z_\nu = Z(qp|\nu) = \dfrac{q^2+p^2+\nu^2}{2qp}$, $j=l-a_N$.

В принятой нормировке парциальное уравнение ЛШ для амплитуд (2.108) имеет стандартный вид /3-6,17/:

$$T_l^{(\pm)(N)}(q,k) = T_{lo}^{(N)}(q,k) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}ds^2\,\frac{T_{lo}^{(N)}(q,s)}{(s^2-k^2\mp i0)}T_l^{(\pm)(N)}(s,k), \qquad (2.111)$$

и связано представлением (2.110), с учетом формулы (П.2.6), с уравнением (1.6) для спектральной плотности $D^{(N)}(\nu;-ip,b^2,-iq)$.

Определим теперь ВФИ как аналитическую функцию двух переменных, $F_l^{(N)}(\rho,-ik)$, регулярную в прямом произведении областей

$$\Big\{\rho,k:\ \big[Re\ \rho>0\big]\times\Big[|Im\ k|<\mu_o\Big]\Big\}, \qquad (2.112)$$

и такую, что для нее имеют место равенства (0.40) (с очевидной заменой $l\to j$), и (0.41) (точнее (2.72б)). Эти условия и соотношение (2.101) фиксируют ее общий вид с точностью до мероморфной функции $\rho^2_{,}\ Z_l^{(N)}(\rho^2_{,}k^2)$, исчезающей в разности (0.40):

$$F_l^{(N)}(\rho,-ik) = Z_l^{(N)}(\rho^2,k^2) - F_l^{(N)}(\mp ik)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \frac{T_l^{(\pm)(N)}(s,k)}{(s^2+\rho^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^j. \quad (2.113)$$

Если этот интеграл и детерминант (2.102) существуют, то $Z_l^{(N)}(\rho^2,k^2)$ определяет асимптотику ВФИ при $\rho\to\infty$ и удовлетворяет условию $Z_l^{(N)}(-k^2,k^2) = M_l^{(N)}(k^2)$; если же они не существуют,- то представление (2.113) нуждается в доопределении (см разделы 3 и 4). Для локального несингулярного потенциала (1.10) асимптотическое поведение функции Иоста /3,17/,а следовательно и ВФИ, в области (2.112) фиксировано ее значением в отсутствии потенциала:

$$\lim_{\rho\to\infty} F_l^{(N)}(\rho,-ik) = \lim_{k\to\infty} F_l^{(N)}(\rho,-ik) = 1, \quad (2.114а)$$

что вместе с (2.107) позволяет без потери общности положить:

$$Z_l^{(N)}(\rho^2,k^2)\Big|_{lok.:\ non\ sin.} = 1. \quad (2.114б)$$

Подставив в этом случае в (2.113) уравнение ЛШ (2.111) и воспользовавшись в первом члене получившегося выражения представлением (2.101), можно получить равенство:

$$F_l^{(N)}(\rho,-ik)-1 = H_l^{(N)}(\rho,k) + F_l^{(N)}(\mp ik)\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \frac{T_l^{(\pm)(N)}(s,k)}{(s^2-k^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^j\cdot$$
$$\cdot\left[H_l^{(N)}(\rho,s) - H_l^{(N)}(\rho,k)\right], \quad (2.115)$$

где положено:

$$H_l^{(N)}(\rho,k) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2\ \frac{T_{l0}^{(N)}(s,k)}{(s^2+\rho^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^j, \quad (2.116а)$$

и борновская амплитуда $T_{l0}^{(N)}(q,p)$ дается формулой (2.110) с заменой $D^{(N)}(\nu;\cdots)\to\Sigma^{(N)}(\nu)$. Формула (П.5.I) позволяет представить функцию $H_l^{(N)}$ в виде:

$$H_l^{(N)}(\rho,k) = \int_{\rho+\mu_0}^\infty d\alpha\ \frac{K_l^{(N)}(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^j, \quad (2.116б)$$

где ядро $K_l^{(N)}(u,\rho)$ определено в (2.11). Это представление и повторное использование под интегралом по $d\alpha$ определений (2.113), (2.114) немедленно превращает (2.115) в уравнение на ВФИ /36/:

$$F_l^{(N)}(\rho,-ik)-1 = \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} d\alpha \, \frac{K_l^{(N)}(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+k^2)} \left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^j F_l^{(N)}(\alpha,-ik), \qquad (2.117)$$

тождественное (2.23) при $b=-ik$. Итерируя его, можно снова прийти к представлению (2.22) и уравнениям (2.14), и вывести затем представление (2.17) и уравнение (2.18). Подставляя (2.17) в (2.22) выпишем в развернутом виде обобщение представления (0.37) для произвольной размерности пространства N: $a=a_N$;

$$F_l^{(N)}(\rho,b)-1 = \frac{4\pi}{\Omega_N \pi^a} \int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu \int\limits_{\rho+\nu}^{\infty} \frac{du}{(u^2-b^2)} \left[\frac{\rho}{u}\right]^j P_j^a\Big[\mathrm{T}(u\rho|\nu)\Big]\Big[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\Big]^{-\frac{a}{2}} \cdot$$

$$\cdot \tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,u); \quad \mathrm{T}(u\rho|\nu) = \frac{u^2+\rho^2-\nu^2}{2u\rho}. \qquad (2.118)$$

Поскольку размерность N присутствует в операторе (2.2) только в комбинации j (2.3), его детерминанты, собственные функции и функции Грина для одного и того же потенциала $V(r)$ и различных размерностей r_N и r_L связаны между собой очевидным соотношением

$$F_{l_{(N)}}^{(N)}(\rho,b) = F_{l_{(L)}}^{(L)}(\rho,b); \quad l_{(N)} - a_N = l_{(L)} - a_L = j. \qquad (2.119)$$

Такие же равенства имеют место для $T_l^{(N)}(q,p;b^2)$, $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$, $J_l^{(N)}(\rho,b;r)$ и т.д. С помощью (П.I.10),(П.I.11) нетрудно убедиться, что установленное здесь интегральное представление для ВФИ (2.118), также как и представление (2.110) для $T_l^{(N)}$, автоматически удовлетворяют равенствам (2.119), с учетом формулы преобразования (1.8) для спектральной плотности $\tilde{D}^{(N)}$ и $D^{(N)}$ /35,36/.

2. Для дираковского гамильтониана типа II (0.43а) с локальным потенциалом (0.38) можно повторить все рассуждения (2.101)-(2.107). Соответствующий аналог разбиения (2.103) для функции Грина приведен в (П.I.67), (П.I.70). В итоге, для детерминанта Иоста (0.29):

$$F^{\bar\zeta}_{\varkappa_\xi}(b) = \det\left[\mathrm{I}_{\varkappa_\xi} - \mathrm{G}_{\varkappa_\xi O}(W^{\bar\zeta}(ib))\ \mathrm{V}\right], \tag{2.120}$$

в обозначениях раздела 2 предыдущего параграфа можно получить:

$$\left[F^{\zeta}_{\varkappa_\xi}(\mp ik)\right]^{-1} = 1 - \frac{(\mp i)^{l_\xi}}{\eta^{\zeta}(k)} \int\limits_0^\infty dr \left\{ \overset{\mathrm{T}}{X}{}^{\zeta}_{\varkappa_\xi}(\mp ik, r)\ V(r)\ \psi^{(\pm)\zeta}_{\varkappa_\xi V}(k,r)\right\}, \tag{2.121}$$

где физическое решение отвечает функции Грина (П.I.70):

$$\psi^{(\pm)\bar\zeta}_{\varkappa_\xi V}(k,r) = \phi^{\bar\zeta}_{\varkappa_\xi O}(k,r) + \int\limits_0^\infty dy G^{\bar\zeta}_{\varkappa_\xi O}(\mp ik;r,y) V(r) \psi^{(\pm)\bar\zeta}_{\varkappa_\xi V}(k,y). \tag{2.122}$$

Вводя парциальную half-off-shell амплитуду $T^{\zeta''\bar\zeta(\pm)}_{\varkappa_\xi}(q,k)$:

$$-\frac{V(r)}{\eta^{\zeta}(k)} \psi^{(\pm)\zeta}_{\varkappa V}(k,r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty ds^2 \sum_{\zeta'=\pm 1} \frac{\phi^{\zeta'}_{\varkappa O}(s,r)}{2w^{\zeta}(s)\eta^{\zeta}(s)}\ T^{\zeta'\zeta(\pm)}_{\varkappa}(s,k), \tag{2.123}$$

и учитывая (П.I.72), представлению (2.121) можно придать вид:

$$\left[F^{\bar\zeta}_{\varkappa_\xi}(\mp ik)\right]^{-1} = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty ds^2 \left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(-is;\mp ik)^{\bar\zeta}\ \mathrm{N}^{\bar\zeta}_{\xi}(-ik,-is)^{\zeta'} \cdot$$

$$\cdot T^{\zeta'\bar\zeta(\pm)}_{\varkappa_\xi}(s,k), \tag{2.124}$$

где, с учетом (2.36), (2.43) и (2.48):

$$g^{\zeta'}(-is;\mp ik)^{\bar\zeta} = \frac{-1}{(s^2-k^2\mp i0)}\ \frac{1}{2}\left[1+\frac{W^{\bar\zeta}(k)}{w^{\zeta'}(s)}\right];\quad \mathrm{N}^{\bar\zeta}_{\xi}(\pm ik,\pm is)^{\zeta'} = \left[\frac{w^{\zeta'}(s)+m}{w^{\zeta}(k)+m}\right]^{\frac{1-\xi}{2}}.$$

Уравнение (2.122) и равенство (2.123) эквивалентны уравнению ЛШ

$$T^{\zeta''\bar\zeta(\pm)}_{\varkappa_\xi}(q,k) - T^{\zeta''\bar\zeta}_{\varkappa_\xi O}(q,k) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty ds^2 \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(-is;\mp ik)^{\bar\zeta}\ T^{\zeta''\zeta'}_{\varkappa_\xi O}(q,s) \cdot$$

$$\cdot T^{\zeta'\bar\zeta(\pm)}_{\varkappa_\xi}(s,k), \tag{2.125}$$

для half-off-shell амплитуд, которые связаны с off-shell амплитудами $T^{\zeta''\zeta}_{\varkappa}(q,p;b^2)^{\bar\zeta}$ при $\zeta=\bar\zeta$ таким же соотношением (2.108).

Парциальное разложение спиральных амплитуд (1.17), в обозначениях (1.21), имеет вид:

$$\langle\vec{q},\mu,\zeta''|\mathrm{T}(W^{\bar\zeta}(ib))|\vec{p},\lambda,\zeta\rangle = \frac{(-1)}{2\pi^2 q}\sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty}(2j+1)\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{(j)}_{\lambda\mu}(\mathrm{R}_{\vec{\varkappa}\vec{\nu}})\mathrm{T}^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(q,p;b^2)^{\bar\zeta}. \tag{2.126}$$

Из (1.27) и (П.I.39) для них следует представление при достаточно больших j:

$$T^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(q,p;b^2)^{\bar\zeta} = \frac{(-1)}{4mp}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\; d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}\left[Z_\nu\right]\; e^{(j)}_{\lambda\mu}\left[Z_\nu\right]\; D^{\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta};$$ (2.127)

где $Z_\nu = Z(qp|\nu)$ берется из (2.110).

Сравнивая вытекающее из (1.18а) и (2.126) парциальное уравнение ЛШ, переведенное с помощью (П.I.43),(П.I.46) в диагональный базис $|jlM\rangle$, с off-shell вариантом уравнения (2.125), можно убедиться в справедливости соотношения:

$$\left\{\left[T^{(j)\zeta''\zeta}_{\mu\lambda}(q,p;b^2)^{\bar\zeta}\right]\right\}_{l_{\xi}',l_{\xi}} = \delta_{\xi'\xi}\left[\frac{\varepsilon(q)+m\zeta''}{\varepsilon(p)+m\zeta}\right]^{\frac{1}{2}}\zeta''\; T^{\zeta''\zeta}_{\varkappa_{\xi}}(q,p;b^2)^{\bar\zeta}$$ (2.128)

Пользуясь определениями (1.28),(1.35) и аналогами формул (П.I.47),(П.I.49) для функций Лежандра второго рода, из (2.127) и (2.128) можно вывести представление:

$$T^{\zeta''\zeta}_{\varkappa_\xi}(q,p;b^2)^{\bar\zeta} = \frac{(-1)}{4m}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\Big\{Q_{l_\xi}(Z_\nu)\,\mathbb{D}^{(1)}_{\zeta\zeta''}(\nu;-iq,b^2,-ip)^{\bar\zeta} +$$

$$+ Q_{l_{-\xi}}(Z_\nu)\,\mathbb{D}^{(2)}_{\zeta\zeta''}(\nu;-iq,b^2,-ip)^{\bar\zeta}\Big\};\; Z_\nu = Z(qp|\nu).$$ (2.129)

Стоит обратить внимание на противоположные порядки аргументов p и q в этой формуле и в представлениях (2.41),(2.44). Их можно сделать одинаковыми с помощью соотношения (1.36), но это приведет к появлению дополнительных кинематических множителей.

Уместно подчеркнуть, что, как легко усмотреть из соответствующих динамических уравнений, именно $\mathbb{D}^{(1)(2)}_{\zeta''\zeta}(\nu;-ip,b^2,-iq)^{\bar\zeta}$, $T^{\zeta''\zeta}_{\varkappa}(q,p;b^2)^{\bar\zeta}$, и все величины, определенные в разделе 2 предыдущего параграфа и в (П.I.60')-(П.I.72), являются аналитическими функциями каждой из переменных q,p,k на соответствующих двулистных римановых поверхностях функций (см. (1.24)-(1.26)):

$$w(q=iu)=(m^2-u^2)^{\frac{1}{2}};\; w(p=i\rho)=(m^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}};\; W(k=ib)=(m^2-b^2)^{\frac{1}{2}};$$ (2.130а)

показанных на Рис.1. Униформизация этих поверхностей осуществляется введением переменных E_q, E_p, E_k:

$$q=q(E_q)=\left[E_q^2-m^2\right]^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}\sqrt{E_q^2-m^2}>0; \ E_q>m;\\ -\sqrt{E_q^2-m^2}<0; \ E_q<-m;\end{cases} \tag{2.130б}$$

и аналогично для p и k, и позволяет "склеить" значения указанных величин с противоположными квантовыми числами $\zeta'', \zeta, \bar{\zeta}=\pm 1$ в единую аналитическую функцию от E_q, E_p, E_k:

$$T_{\varkappa}^{\zeta''\zeta}(q,p;b^2)^{\bar{\zeta}} \Rightarrow T_{\varkappa}(E_q,E_p;E_k). \tag{2.131}$$

Тогда как для функций $D_{\mu\lambda}$ и $T_{\mu\lambda}^{(j)}$ в (2.126),(2.127) такая склейка невозможна из-за неаналитичности выделяемого кинематического фактора в формулах (1.35) или (2.128).

Интегралы вида (2.123)-(2.125) от нечетных функций q:

$$f(-q;w^{\zeta''}(q)) = -f(q;w^{\zeta''}(q)) \tag{2.132}$$

при замене (2.130б) преобразуются по правилу /49-51/:

$$\int_0^\infty ds^2 \sum_{\zeta''=\pm 1} \frac{f(s;w^{\zeta'}(s))}{2w^{\zeta'}(s)} = \left[\int_m^\infty + \int_{-\infty}^{-m}\right] dE\, f(q(E);E). \tag{2.133}$$

Соотношения симметрии (1.36),(2.40), или их вариант для парциальных амплитуд (2.129) являются, таким образом, компромиссом между указанными аналитическими свойствами этих величин и требованиями $\mathbb{P}$ и $\mathbb{T}$ -инвариантности (1.19),(1.30).

Следствием $\mathbb{CPT}$ -инвариантности является также следующее соотношение симметрии для детерминанта Иоста (2.120):

$$F_{\varkappa}^{\bar{\zeta}}(b|g) = F_{-\varkappa}^{-\bar{\zeta}}(b|-g), \tag{2.134}$$

где g -выделенная из потенциала V константа связи, установленное для кулонова поля в /60/. Оно вытекает непосредственно из определений (2.120) и (0.16) с помощью легко проверяемого свойства функции Грина (П.I.70):

$$G_{-\varkappa 0}^{-\bar{\zeta}}(b;r,y) = -\sigma_1 G_{\varkappa 0}^{\bar{\zeta}}(b;r,y)\sigma_1. \tag{2.135}$$

Для гамильтониана (0.43б) необходимо заменить в (2.I20) $V \to \sigma_3 V$, при этом в соответствующем равенстве (2.134) знак перед ε будет с обеих сторон одинаков.

Представление half-off-shell амплитуд $T^{\zeta''\bar{\zeta}(\pm)}_{æ_\xi}(q,k)$ через ВФИ имеет прежний вид (0.40) с $l=l_\xi=j+\frac{\xi}{2}$:

$$T^{\zeta''\bar{\zeta}(\pm)}_{æ_\xi}(q,k) = \left[\frac{k}{q}\right]^{l_\xi}\left[F^{\zeta''}_{æ_\xi}(iq,-ik)^{\bar{\zeta}} - F^{\zeta''}_{æ_\xi}(-iq,-ik)^{\bar{\zeta}}\right]\left[2iF^{\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\mp ik)\right]^{-1}, \tag{2.136а}$$

Обращение же этого анзаца теперь не столь прямолинейно. В соответствии с (2.124) и (2.132),(2.133) оно имеет вид:

$$F^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} - Z^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho^2,k^2)^{\bar{\zeta}} = F^{\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\mp ik)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty ds^2\left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi}\sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta}(-is;\rho)^{\zeta'}\cdot$$

$$\cdot N^{\zeta}_{\xi}(\rho,-is)^{\zeta'}\, T^{\zeta'\bar{\zeta}(\pm)}_{æ_\xi}(s,k), \tag{2.136б}$$

где $Z^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho^2,k^2)^{\bar{\zeta}}$ -мероморфная на двулистной римановой поверхности функция ρ^2, исчезающая в разности (2.136а) и такая, что:

$$Z^{\zeta}_{æ_\xi}(-k^2,k^2)^{\bar{\zeta}} = 1. \tag{2.137}$$

Исходная область аналитичности этой ВФИ имеет вид :

$$\Big\{\rho,k\,:\,\big[Re\,\rho>0;\ \rho\notin[m,+\infty)\big]\times\big[|Im\,k|<\mu_0;\ \pm ik\notin[m,+\infty)\big]\Big\},$$

аналогичный (2.112) на каждом римановом листе соответствующей переменной за исключением дополнительного кинематического разреза $\rho>m$ для функции $w(i\rho)$ (2.130а), который, впрочем, легко выделить явно в правой части (2.136б) в виде:

$$F^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} - Z^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho^2,k^2)^{\bar{\zeta}} = F^{(1)}_{æ_\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} + \frac{\eta^{\zeta}(i\rho)}{\eta^{\bar{\zeta}}(k)}\left[\frac{i\rho}{k}\right]^{\xi} F^{(2)}_{æ_\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}}; \tag{2.138}$$

где функции $F^{(1,2)}_{æ}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}}$ уже не зависят от ζ и регулярны при $Re\,\rho>0$. Подставляя в правую часть (2.136б) уравнение ЛШ (2.125) и пользуясь в первом из получившихся слагаемых представлением (2.124), ее можно привести к виду:

$$= H^{\zeta\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\rho,k) - F^{\zeta}_{æ_\xi}(\mp ik)\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta}(-is;\mp ik)^{\bar{\zeta}}\, T^{\zeta'\bar{\zeta}(\pm)}_{æ_\xi}(s,k)\cdot$$

$$\cdot\left[H^{\zeta\zeta'}_{æ_\xi}(\rho,s) - N^{\zeta}_{\xi}(-ik,-is)^{\zeta'} H^{\zeta\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\rho,k)\right], \tag{2.139}$$

где введена функция

$$H^{\zeta\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\rho,k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(-is;\rho)^{\zeta}\, N^{\zeta}_{\xi}(\rho,-is)^{\zeta'}\, T^{\zeta'\bar{\zeta}}_{æ_\xi 0}(s,k). \tag{2.140}$$

Здесь борновская амплитуда уравнения ЛШ (2.125) имеет вид:

$$T^{\zeta'\bar{\zeta}}_{æ_\xi 0}(s,k) = \frac{(-1)}{4m}\int_{\mu_0}^\infty d\nu\, \Sigma(\nu)\left[\frac{1}{\eta^{\bar{\zeta}}(k)}\, Q_{l_\xi}\left[Z_\nu\right] + \eta^{\zeta'}(s) Q_{l_{-\xi}}\left[Z_\nu\right]\right], \tag{2.141}$$

где Z_ν приведено в (2.110). Из формулы (П.5.8) и определения (2.33),(2.34) вытекает представление:

$$H^{\zeta\bar{\zeta}}_{æ_\xi}(\rho,k) = \int_{\rho+\mu_0}^\infty d\alpha \left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta}(\alpha;-ik)^{\bar{\zeta}}\, N^{\zeta'}_{\xi}(\alpha,-ik)^{\bar{\zeta}}\, K^{\zeta'\zeta}_{æ_\xi}(\alpha,\rho). \tag{2.142}$$

Его подстановка, с привлечением явного вида $g^{\zeta'}(\cdots)^{\bar{\zeta}}$ и $N^{\zeta'}_{\xi}(\cdots)^{\bar{\zeta}}$ из (2.124), и повторное использование представления (2.136б) под интегралом по $d\alpha$ превращают равенство (2.139) в уравнение:

$$F^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}} - Z^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho^2;k^2)^{\bar{\zeta}} = \int_{\rho+\mu_0}^\infty d\alpha \left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(\alpha;-ik)^{\bar{\zeta}}\, K^{\zeta'\zeta}_{æ_\xi}(\alpha,\rho)\cdot$$

$$\cdot\left[F^{\zeta'}_{æ_\xi}(\alpha,-ik)^{\bar{\zeta}} - Z^{\zeta'}_{æ_\xi}(\alpha^2;k^2)^{\bar{\zeta}} + N^{\zeta'}_{\xi}(\alpha,-ik)^{\bar{\zeta}}\right]. \tag{2.143}$$

Простым переопределением ВФИ, эквивалентным условию:

$$Z^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho^2;k^2)^{\bar{\zeta}} \equiv N^{\zeta}_{\xi}(\rho,-ik)^{\bar{\zeta}}, \tag{2.144}$$

это уравнение приводится к виду (2.46) при $b=-ik$. Очевидно, что функция в правой части равенства (2.144) подчиняется всем требованиям (2.137), предъявленным к левой части (2.144). Так что это равенство определяет свободную ВФИ, и полностью фиксирует вид (2.45) ее связи с ВРИ, являющейся, в конечном счете, следствием исходного определения детерминанта Иоста (2.120).

Вводя по формуле (2.47) резольвентное ядро $a^{\zeta'\zeta}_{æ}(u,\rho;b^2)^{\bar{\zeta}}$, можно, итерируя (2.143)≡(2.46), вновь получить уравнения (2.39) и обосновать представления (2.41),(2.51) и систему (2.42).

3. Нелокальному потенциалу типа IV (0.46) со спектральной плотностью (1.41) отвечает при $N=3$ ядро уравнения ЛШ (2.111) следующего вида: $Z(qp|\nu)$ –снова берется из (2.110),

$$\hat{T}_{lo}(q,p) = -\frac{1}{2p}\int_{\mu_o}^{\infty} d\nu\; Q_l\Big[Z(qp|\nu)\Big]\;\Big[\Sigma_1(\nu) + (q^2+p^2)(2m)^{-2}\,\Sigma_2(\nu)\Big].$$

Аналогом ядра (2.11) тогда служит выражение:

$$\hat{K}_l(u,\rho) = \int_{\mu_o}^{u-\rho} d\nu\; P_l\Big[\mathrm{T}(u\rho|\nu)\Big]\;\Big[\Sigma_1(\nu) - (u^2+\rho^2)(2m)^{-2}\,\Sigma_2(\nu)\Big].$$

Легко видеть,что интегралы, соответствующие выражениям (2.116), теперь линейно расходятся, что лишает смысла определения детерминантов (0.24а),(2.102) и ВФИ (2.113). В тоже время, используя (П.5.3), можно убедиться в конечности разностей этих выражений:

$$H_l(\rho,s) - H_l(\rho,k) = (k^2-s^2)\int_{\rho+\mu_o}^{\infty}\frac{d\alpha\;\hat{K}_l(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+s^2)(\alpha^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^l,$$

$$H_l^{\Lambda}(\rho,k) = \left[\frac{\Lambda^2+k^2}{\Lambda^2-\rho^2}\right]\Big[H_l(\rho,k) - H_l(\Lambda,k)\Big] =$$

$$= -(\Lambda^2+k^2)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds^2\,\frac{\hat{T}_{lo}(s,k)}{(s^2+\rho^2)(s^2+\Lambda^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^l,$$

и в существовании такого же предела у разности:

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\Big[H_l^{\Lambda}(\rho,s) - H_l^{\Lambda}(\rho,k)\Big] = (k^2-s^2)\int_{\rho+\mu_o}^{\infty}\frac{d\alpha\;\hat{K}_l(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+s^2)(\alpha^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^l.$$

Это подсказывает обратиться в данном случае к представлению (2.113), вычтенному в точке $\rho=\Lambda$ при $\Lambda\to\infty$. Повторяя для него все преобразования двух предыдущих разделов, с использованием вычтенного же представления для $F_l(\mp ik)\equiv F_l(\mp ik,-ik)$ и очевидного тождества $H_l^{\Lambda}(\rho,i\Lambda)=0$, и вводя функции:

$$T_l^{\Lambda}(\rho,-ik) = \Big[F_l(\rho,-ik) - Z_l(\rho^2;k^2) + Z_l(-k^2;k^2)\Big](\Lambda^2-\rho^2)^{-1}\,h(\Lambda^2),$$

$$M_l^\Lambda(\rho^2_, k^2) = \left[F_l(\Lambda,-ik) - Z_l(\Lambda^2_, k^2) + Z_l(-k^2_, k^2)\right](\Lambda^2-\rho^2)^{-1}\, h(\Lambda^2),$$

можно получить следующие аналоги равенств (2.113),(2.115):

$$T_l^\Lambda(\rho,-ik) - M_l^\Lambda(\rho^2_, k^2) = -F_l(\mp ik)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds^2\ \hat{T}^{(\pm)}_l(s,k)}{(s^2+\rho^2)(s^2+\Lambda^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^l h(\Lambda^2) =$$

$$= M_l^\Lambda(-k^2_, k^2)\left[H_l^\Lambda(\rho,k) - H_l^\Lambda(\rho,-i\Lambda)\right] + F_l(\mp ik)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds^2\ \hat{T}^{(\pm)}_l(s,k)}{(s^2-k^2)(s^2+\Lambda^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^l\cdot$$

$$\cdot\left[H_l^\Lambda(\rho,s) - H_l^\Lambda(\rho,k)\right]\, h(\Lambda^2).$$

Заменяя здесь во втором равенстве при $\Lambda\to\infty$ каждую $\left[\cdots\cdots\right]$ ее указанным выше пределом и вновь используя первое равенство под интегралом по $d\alpha$, можно прийти к уравнению знакомого вида для величины $T_l(\rho,-ik) = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} T_l^\Lambda(\rho,-ik)$:

$$T_l(\rho,-ik) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[M_l^\Lambda(\rho^2_, k^2) + \int_{\rho+\mu_o}^\infty d\alpha\,\frac{\hat{K}_l(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^l T_l(\alpha,-ik)\right].$$

Нетрудно убедиться по индукции, что при условиях (см. (2.59)):
$I_0^{\Sigma_2} = 0$; $|I_1^{\Sigma_2}|<\infty$;
итерации этого уравнения Вольтерра при любом конечном Λ даются сходящимися интегралами, т.е. итерационный ряд сходится к решению в знакомой форме:

$$T_l(\rho,-ik) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[M_l^\Lambda(\rho^2_, k^2) + \int_{\rho+\mu_o}^\infty du\,\frac{\hat{a}_l(u,\rho;-k^2)}{(u^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{u}\right]^l M_l^\Lambda(u^2_, k^2)\right],$$

где $\hat{a}_l(u,\rho;b^2)$ подчиняется независящим от Λ уравнениям (2.14), (2.66) с ядром $\hat{K}_l(u,\rho)$.

Функцию $T_l(\rho,-ik)$ естественно считать перенормированной ВФИ, $h(\Lambda^2)$-константой перенормировки, а независящий от ρ^2 предел $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} M_l^\Lambda(\rho^2_, k^2) = \hat{M}_l(k^2)$-перенормированным "детерминантом" (2.102). Предполагая, что при подходящем выборе $h(\Lambda^2)$, эти пределы существуют и не равны нулю, заменяя для удобства $\Lambda^2\to -\Lambda^2$, можно переопределить перенормированную ВФИ в виде, весьма похожем на локальный случай (2.22а),(2.97):

$$F_l(\rho,-ik) \equiv \frac{T_l(\rho,-ik)}{\hat{M}_l(k^2)} = 1 + \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda^2 \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} du \, \frac{\hat{a}_l(u,\rho;-k^2)}{(u^2+k^2)(u^2+\Lambda^2)} \left[\frac{\rho}{u}\right]^l .$$

Если же $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} M_l^\Lambda(\rho^2,k^2)=0$ при конечной ненулевой ВФИ, необходимо вернуться к предыдущей формуле, содержащей тогда только предел интегрального члена. Наконец, возможен третий (осциллирующий) случай, когда ни при каком выборе $h(\Lambda^2)$ не существует и этот предел.

Ограничения на потенциал можно ослабить, если не фиксировать заранее зависимость функции $M_l^\Lambda(\rho^2,k^2)$ от ρ^2 (сравни раздел 4 предыдущего параграфа). Такое расширение произвола оправдывается при рассмотрении потенциалов типа III в следующем разделе. В этих предположениях по известному резольвентному ядру $\hat{a}_l(\cdots)$ всегда можно определить какой из перечисленных выше случаев имеет место, и установить необходимую для существования предела зависимость $M_l^\Lambda(\rho^2,k^2)$ от ρ^2 и Λ. Перенормированная функция Иоста есть, как обычно, значение ВФИ при $\rho=-ik$.

4. После всего изложенного гамильтониан типа III почти не нуждается в подробном независимом рассмотрении. Парциальные амплитуды для потенциала (0.45) (см. разделы I.I.3. и 2.I.3.) имеют такую же спиновую структуру как релятивистские амплитуды (2.127),(2.I29) для гамильтониана Дирака из раздела 2, а ядро уравнения ЛШ (2.111) может быть представлено в двух формах:

$$T_{l_\xi jo}(q,k) \equiv -\frac{1}{2p}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \Sigma(\nu)\left[Q_{l_\xi}\left[Z_\nu\right]\left[1-\frac{q^2+p^2}{2(2m)^2}\right]+Q_{l_{-\xi}}\left[Z_\nu\right]\frac{qp}{(2m)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2p}\int\limits_{\mu_o}^{\infty} d\nu\, \Sigma_{\varkappa_\xi}(\nu)\, Q_{l_\xi}\left[Z_\nu\right] + \frac{\delta_{lo}\, q}{2(2m)^2}\, I_o^\Sigma, \qquad (2.145)$$

где $Z_\nu=Z(qp|\nu)$ определено в (2.110). Второй член в последнем ра венстве отвечает второму члену в (2.55). Эквивалентность этих двух форм вытекает из формулы (2.56) и рекурентных соотношений (П.I.I7а,б), справедливых и для функций Q_l. Нетрудно увидеть, что первая форма (2.145) позволяет полностью повторить рассуждения предыдущего раздела о нелокальных потенциалах типа IV, поскольку, несмотря на расходимость интегралов

$$H_{l_\xi j}(\rho,k) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \frac{T_{l_\xi j0}(s,k)}{(s^2+\rho^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi},$$

их разность, как и в предыдущем разделе, с учетом (П.5.3), дается конечным выражением:

$$H_{l_\xi j}(\rho,s) - H_{l_\xi j}(\rho,k) = (k^2-s^2)\int_{\rho+\mu_0}^\infty d\alpha \frac{K_{l_\xi j}(\alpha,\rho)}{(\alpha^2+s^2)(\alpha^2+k^2)}\left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^{l_\xi}, \quad (2.146)$$

где $K_{l_\xi j}(\alpha,\rho)$ определено в (2.67),(2.68),(2.69),(2.34).

В результате, для перенормированной ВФИ при условии (2.61) можно получить точно такие же уравнения и представления, например:

$$F_{lj}(\rho,b) \equiv \frac{T_{lj}(\rho,b)}{M_{lj}(-b^2)} = 1 + \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda^2 \int_{\rho+\mu_0}^\infty du \frac{a_{lj}(u,\rho;b^2)}{(u^2-b^2)(u^2+\Lambda^2)}\left[\frac{\rho}{u}\right]^l, \quad (2.147)$$

где $l=l_\xi$ и резольвентное ядро $a_{lj}(\cdots)$ подчиняется уравнениям (2.66), из которых уже известным путем получается представление (2.70) и система уравнений (2.71). Однако, вторая форма (2.145) позволяет продвинуться несколько дальше. Во-первых, если выполнено условие (2.61),- в каждом парциальном канале имеется локальный несингулярный потенциал. Поскольку в этом случае равенство (2.147) должно совпадать с представлением (2.22а), то предельный переход $\Lambda\to\infty$ в нем можно совершить под интегралом и, в соответствии с (2.107), считать $M_{lj}(-b^2)=1$. Во-вторых, если условие (2.61) не выполнено,- соответствующий локальный потенциал сингулярен. Как показано в разделе 2.I.4., для таких потенциалов в случае отталкивания ($\xi I_0^{\Sigma} > 0$), можно указать функции $M^{\Lambda}_{lj}(\rho^2;k^2) \equiv \overset{\circ}{R}_{lj}(\rho,\Lambda)/\overset{\circ}{f}_l(\rho)$, такие что $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} M^{\Lambda}_{lj}(\rho^2;k^2)=0$, но существует конечный предел для интеграла:

$$T_{lj}(\rho,b) = \lim_{\Lambda\to\infty} \int\limits_{\rho+\mu_0}^{\infty} du\, \frac{a_{lj}(u,\rho;b^2)}{(u^2-b^2)} \left[\frac{\rho}{u}\right]^l M^{\Lambda}_{lj}(u^2;-b^2), \tag{2.148}$$

определяющий в этом случае ВФИ. Это вполне согласуется со схемой перенормировки ВФИ для нелокальных потенциалов, если не ограничиваться видом функции $M^{\Lambda}_{lj}(\rho^2;k^2)$, диктуемым процедурой вычитания предыдущего раздела.

В случае притяжения ($\xi I_0^{\Sigma} < 0$) ВФИ для сингулярного потенциала не существует (см. раздел 2.I.4.), т.е. невозможно подобрать функцию $M^{\Lambda}_{lj}(\rho^2;k^2)$, обеспечивающую конечный предел (2.148), что также не противоречит обсуждению предыдущего раздела.

Таким образом, имеет место тесная связь между вычислениями ВФИ для нелокальных и сингулярных потенциалов, обусловленная существованием взаимодействий, которые, как потенциал типа III, допускают двойственную трактовку: как зависящий от импульса нелокальный, и как зависящий от l и j, но локальный в каждой парциальной волне сингулярный потенциал. При этом процедура перенормировки для нелокального потенциала оборачивается способом решения однородного уравнения Вольтерра на ВФИ (2.94), $\sigma>0$, для сингулярного потенциала отталкивания. Во всех случаях основой для построения ВФИ служит резольвентное ядро $a_{lj}(u,\rho;b^2)$, однозначно определяемое формулой (2.70) по аналитическому продолжению $\tilde{D}^{(1),(2)}(\nu;\rho,b^2;u)$ спектральной плотности T-матрицы по передаче импульса, удовлетворяющему системе уравнений (2.71).

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВРИ, ВФИ, СВЯЗАННЫХ С НИМИ ФУНКЦИЙ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

3.I. Теоремы об аналитичности ВРИ, ВФИ и резольвентного ядра

В этом параграфе изучаются аналитические свойства ВРИ по всем переменным. Аналитические свойства ВФИ и $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$ получаются из них либо предельным переходом, либо простой переформулировкой соответствующих теорем.

Имея в виду соотношения (2.119), несложно увидеть, что путем переопределения спектральной плотности потенциала (1.10) по формуле (1.8), при любом $N\geqslant 2$ можно с помощью равенств (П.I.10),(П.I.80) привести ядро (2.11) и соотношение (2.10) к виду, совпадающему с $N=3$, но, с заменой $l\to j=l_{(N)}-a_N$. Поэтому аналитические свойства ВРИ $J_l^{(N)}(\rho,b;r)$ для гамильтониана типа I одинаковы при любых $N\geqslant 2$ и достаточно рассмотреть технически наиболее прозрачный случай $N=3$ для произвольных значений l /31,32/.

В (2.12),(2.14) удобно перейти от ρ и b к симметричным переменным x и y /23,31/:

$$x=\rho+b;\quad y=\rho-b;\quad x+y=2\rho;\quad x-y=2b; \tag{3.1}$$

переопределив ядро этих уравнений по формуле:

$$K_j(2\rho;\alpha,\beta)\equiv K_{l_{(N)}}^{(N)}(\rho+\alpha,\rho+\beta)=\int\limits_{\mu_0}^{\alpha-\beta}d\mu\ \Sigma^{(3)}(\mu)\ P_j\left[1+\frac{(\alpha-\beta)^2-\mu^2}{2(\rho+\alpha)(\rho+\beta)}\right], \tag{3.2}$$

и положив:

$$J_{l_{(N)}}^{(N)}(\rho,b;r)=J_j(r;x,y)=J_j(r;y,x). \tag{3.3}$$

Второе равенство легко усмотреть из уравнения (2.12) в новых переменных, или из эквивалентного ему итерационного ряда:

$$J_l(r;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}J_l^{(n)}(r;x,y), \tag{3.4a}$$

$$J_l^{(n)}(r;x,y) = \int\limits_{\mu_o}^{\infty} \frac{d\alpha\ K_l(x+y;\alpha,0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)}\, J_l^{(n-1)}(r;\alpha+x,\alpha+y) = \tag{3.4б}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\nu_{k-1}+\mu_o}^{\infty} \frac{d\nu_k\ K_l(x+y;\nu_k,\nu_{k-1})}{(\nu_k+x)(\nu_k+y)} \right\} \chi_l((\rho+\nu_n)r)\ , \tag{3.4в}$$

где $\nu_o=0$, $2\rho=x+y$, и индекс j заменен на $l=l_{(3)}$.

Предположим, что существуют $\eta\geqslant 0$ и непрерывная неубывающая положительная функция $B(\nu)$, такие что:

$$\int\limits_{\mu_o}^{\nu} d\mu\ |\Sigma^{(3)}(\mu)| \leqslant e^{\nu\eta}\, B(\nu), \tag{3.5}$$

$$\int\limits_{\mu_o}^{\infty} \frac{dB(\nu)}{\nu} = N < \infty\ . \tag{3.6}$$

Имеет место теорема /31/:

Теорема 3.1. ВРИ (3.4а-в) при условиях (3.5),(3.6) является целой функцией $\lambda^2=(l+\frac{1}{2})^2$, а также является регулярной аналитической функцией трех комплексных переменных r,x,y или r,ρ,b в области

$$0_\eta^{\varepsilon,\delta} = \Big\{ r,x,y\colon\ |arg(r-\eta)| \leqslant \tfrac{\pi}{2}-\delta;\ |arg\ x| \leqslant \pi-\varepsilon;\ |arg\ y| \leqslant \pi-\varepsilon;$$

$$|arg(x+y)| \leqslant \pi-\varepsilon; \Big\} = \tag{3.7}$$

$$= \Big\{ r,\rho,b\colon\ |arg(r-\eta)| \leqslant \tfrac{\pi}{2}-\delta;\ |arg(\rho\pm b)| \leqslant \pi-\varepsilon;\ |arg\ \rho| \leqslant \pi-\varepsilon; \Big\}$$

при любом комплексном l, и любых сколь угодно малых ε, и δ.

Доказательство: Первое утверждение вытекает непосредственно из обобщенной теоремы Пуанкаре в формулировке /17/ на основе дифференциального уравнения (2.1),(2.2) и независящего от l граничного условия (2.6) [1]. Второе утверждение для каждого члена ряда (3.4а) следует по индукции из (3.4б),(3.4в) и свойств интеграла типа Коши. Остается убедиться в равномерной сходимости

[1] Смотри также замечания в конце раздела 2.I.2.

ряда (3.4а) в области $O_{\eta}^{\varepsilon,\delta}$. Из интегрального представления для $P_l(z)$ (П.I.86б) несложно вывести оценку при любом комплексном l, полагая $\lambda=l+\frac{1}{2}$ и $L=|Re\ \lambda|-\frac{1}{2}$. Для $L>0$:

$$|P_l(z)| \leqslant e^{\pi|\lambda|}(2|z|+1)^L. \tag{3.8}$$

Поскольку в области (3.7) при $\beta>0$ $|arg(\rho+\beta)|\leqslant\pi-\varepsilon$, то при $\alpha>\beta$ с учетом (1.54), для аргумента z функции Лежандра из (3.2) можно получить:

$$2|z|+1 \leqslant 3 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{|\rho+\alpha|\,|\rho+\beta|} \leqslant \left|\frac{\rho+\alpha}{\rho+\beta}\right| \left[3\left(1+\frac{\alpha-\beta}{|\rho+\alpha|}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{|\rho+\alpha|}\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\rho+\alpha}{\rho+\beta}\right| \left[3\left(1+\frac{1}{sin\ \varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{sin\ \varepsilon}\right)^2\right] \equiv \left|\frac{\rho+\alpha}{\rho+\beta}\right| \mathrm{A}(\varepsilon), \tag{3.9}$$

откуда для ядра (3.2), с учетом (3.5), вытекает оценка:

$$\left|\mathrm{K}_l(2\rho;\alpha,\beta)\right| \leqslant e^{(\alpha-\beta)\eta}\ \mathrm{B}(\alpha-\beta) \left|\frac{\rho+\alpha}{\rho+\beta}\right|^L \mathrm{M}_L(\varepsilon), \tag{3.10}$$

$$\mathrm{M}_L(\varepsilon) = e^{\pi|\lambda|}\Big(\mathrm{A}(\varepsilon)\Big)^L.$$

Из интегрального представления (П.I.80б), с учетом поведения при $|\rho r|\to 0$ и $|\rho r|\to\infty$, для $L>0$, $|arg(\rho r)|<\frac{3}{2}\pi$, можно вывести оценку /17/:

$$|e^{\rho r}\ \chi_l(\rho r)| \leqslant C_\lambda \left[\frac{1+|\rho|\,|r|}{|\rho|\,|r|}\right]^L;\ C_\lambda \leqslant \left(4e^{3\pi/2}\right)^{|\lambda|} \frac{\Gamma(|\lambda|)}{\sqrt{\pi}}. \tag{3.11}$$

В итоге, поскольку $(1+|\rho+\nu|\,|r|) \leqslant (1+|\rho|\,|r|)(1+\nu|r|)$, для n-ой итерации (3.4в) получается оценка:

$$\left|e^{\rho r} \mathrm{J}_l^{(n)}(r;x,y)\right| \leqslant C_L \left[\frac{1+|\rho|\,|r|}{|r-\eta|\,|\rho|}\right]^L \frac{\left[\mathrm{M}_L(\varepsilon)\right]^L}{sin^L\delta\ n!} \left[\int\limits_{\mu_o}^{\infty} \frac{d\alpha\ \mathrm{B}(\alpha)}{|\alpha+x|\,|\alpha+y|}\right]^n, \tag{3.12а}$$

где: $C_L = C_\lambda e(L/e)^L$, $2\rho=x+y$. Поэтому весь ряд (3.4а), с учетом (3.6) и (1.54), мажорируется функцией:

$$\left|e^{\rho r}\mathrm{J}_l(r;x,y)\right| \leqslant C_L \left[\frac{1+|\rho|\,|r|}{|r-\eta|\,|\rho|\,sin\ \delta}\right]^L exp\left[\frac{\mathrm{M}_L(\varepsilon)\ \mathrm{N}}{sin^2\varepsilon}\right]. \tag{3.12б}$$

равномерно в области $O_{\eta}^{\varepsilon,\delta}$ при произвольном l с $L\geqslant 0$. Учитывая, что в области (3.7) аргумент функции Лежандра из (3.2) подчиняется условию $|arg\ z|\leqslant\pi-\varepsilon$, и пользуясь представлением (П.I.86в), при $-\frac{1}{2}<L<0$ для нее нетрудно найти оценку, заменяющую (3.8):

$$|F_l(z)| \leqslant \frac{C(\lambda)}{\sqrt{\sin\,\varepsilon}} = M_\lambda(\varepsilon).$$

При этом в (3.11) и (3.12) необходимо отбросить сомножители зависящие от ρ, r, δ. В итоге получается равномерная оценка вида (3.12) с заменой $M_L(\varepsilon) \to M_\lambda(\varepsilon)$.

Таким образом, ВРИ (3.4а-в) при фиксированных y $(Im\ y \neq 0)$, r $(Re(r-\eta)>0)$ и любом l является аналитической функцией x в комплексной плоскости с двумя параллельными разрезами $x<-\mu_o$, и $x+y<0$, показанными на Рис.5. В силу симметрии, такими же будут аналитические свойства по y при фиксированном x $(Im\ x \neq 0)$. Из соотношений (3.1) легко найти соответствующие свойства по переменным ρ и b, показанные на Рис.6,7.

Если нижняя грань всех η, удовлетворяющих (3.5), существует и равна нулю, то предельным переходом (0.39) для $Re\ l \geqslant 0$ можно установить те же аналитические свойства по x, y или ρ, b у соответствующей ВФИ:

$$F_l^{(N)}(\rho,b) \equiv E_l^{(N)}(x,y) = E_l^{(N)}(y,x) \tag{3.13}$$

Применяя приведенные выше оценки к ряду (2.15), нетрудно проверить, что для любой интегрируемой функции $\Sigma^{(3)}(\nu)$ он сходится равномерно и определяет резольвенту $a_l^{(N)}(u,\rho;b^2)$ как аналитическую функцию переменных ρ, b или x, y при: $u=\alpha+\rho$; $\rho+b=x$; $\rho-b=y$;

$$a_l(u{=}\rho{+}\alpha,\rho;b^2) = d_l(\rho+b,\rho-b;u-\rho) = d_l(x,y;\alpha) = d_l(y,x;\alpha), \tag{3.14}$$

регулярную при фиксированном $\alpha>\mu_o$ в той же области (3.7). Однако, длина разрезов на Рис.6,7 ограничена теперь величиной α, а на Рис.5,- величиной 2α. Уравнения (2.14) в новых переменных принимают вид: $(J \to l)$

$$d_l(x,y;\alpha) - K_l(x+y;\alpha,0) = \int\limits_{\mu_o}^{\alpha-\mu_o} \frac{d\beta}{(\beta+x)(\beta+y)} \begin{cases} K_l(x+y;\beta,0)\ d_l(x+\beta,y+\beta;\alpha-\beta) \\ K_l(x+y;\alpha,\beta)\ d_l(x,y;\beta). \end{cases} \tag{3.15}$$

Уравнения (2.12),(2.14),(2.23) и (3.4б),(3.15) позволяют произвести исчерпывающий анализ аналитических свойств своих решений.

В частности, вычисление в замкнутом виде скачков на всех имеющихся разрезах. Для вычисления скачка на динамическом разрезе $-\infty<x<-\mu_o$ Рис.5 достаточно заметить, что, поскольку $K_l(x+y;\alpha,\alpha)=0$, вклад от обращения в нуль двух и более знаменателей $(\nu+x)$ в (3.4в) отсутствует. Вычисляя тогда скачек (0.10) по x от уравнения (2.12) в новых переменных (см.(3.4б)), можно получить уравнение на скачек /31/:

$$disc\, J_l(r;x,y)\Big|_{x<-\mu_o} = \frac{2i\pi}{x-y} K_l(x+y;-x,0)\, J_l(r;0,y-x) + \int_{\mu_o}^{-x-\mu_o} \frac{d\alpha\, K_l(x+y;\alpha,0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)}\, disc\, J_l(r;\alpha+x,\alpha+y)\Big|_{x+\alpha<-\mu_o}, \tag{3.16}$$

где значение верхнего предела определяется при первой итерации. Сравнивая итерации этого уравнения с первым уравнением (3.15), с учетом (2.72а), можно записать его решение в виде:

$$disc\, J_l(r;x,y)\Big|_{x<-\mu_o} = \frac{2i\pi}{x-y}\, d_l(x,y;-x)\, f_l\left[\frac{y-x}{2},r\right] \tag{3.17}$$

Скачек по y получается заменой $x\rightleftarrows y$. Точно также находятся из (2.12) скачки ВРИ по переменным ρ и b:

$$disc\, J_l(\rho,b;r)\Big|_{\pm b>\rho+\mu_o} = \frac{2i\pi}{2b}\, a_l(\pm b,\rho;b^2)\, f_l(\pm b,r), \tag{3.18}$$

или же получаются из (3.17) заменой переменных. Пользуясь определением (2.75) и соотношениями (2.16),(3.14), в двух последних равенствах можно заменить соответственно:

$$d_l(x,y;-x) = a_l\left[\frac{y-x}{2},\frac{x+y}{2};\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right] = \Phi_l\left[-\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right] \equiv \Psi_l(y,x), \tag{3.19а}$$

$$a_l(b,\rho;b^2) = a_l(-\rho,-b;b^2) = \Phi_l(-\rho,-b). \tag{3.19б}$$

Из (3.17),(3.18) и (0.39) вытекают выражения для скачков ВФИ:

$$disc\, F_l(\rho,b)\Big|_{\pm b>\rho+\mu_o} = \frac{2i\pi}{2b}\left[\frac{\rho}{\pm b}\right]^l F_l(\pm b)\,\Phi_l(-\rho,\mp b). \tag{3.20}$$

Применение процедуры (3.16) к уравнениям (2.14),(3.15) приводит к соответствующим выражениям для скачков резольвентного ядра:

$$disc\, a_l(u,\rho;b^2)\Big|_{u-\mu_o>b>\rho+\mu_o} = \frac{2i\pi}{2b}\,\Phi_l(-\rho,-b)\,\Phi_l(u,b); \tag{3.21а}$$

$$disc\ d_l(x,y;\alpha)\Big|_{-(\alpha-\mu_o)<x<-\mu_o} = \frac{2i\pi}{x-y}\,\Phi_l(y,x)\ \Phi_l(-y-\alpha,-x-\alpha). \quad (3.21б)$$

В иной форме эти равенства были получены для целых l в /33/. Их обобщение на произвольные значения l /31,32,35/ позволяет, пользуясь (3.3), автоматически написать соответствующие обобщения этих равенств и их многочисленных следствий для произвольных значений размерности $N\neq 3$.

В переменных ρ и b кинематический разрез имеется у ВРИ только по переменной ρ при $\rho<0$ на Рис.6. Комбинируя выражения ВРИ (2.85) с представлениями (2.73), с учетом (П.I.76б,д), можно прийти к равенству:

$$J_l(\rho,b;r) - \chi_l(\rho r) = \left[f_l(b,r)\int\limits_{\mu_o-b}^{\infty} du\ \Phi_l(u,-b) - \left[b\to -b\right]\right]\frac{1}{2b(u^2-\rho^2)}\cdot$$
$$\cdot\left[\chi_l(ur)\ \overleftrightarrow{\partial}_r\ \chi_l(\rho r)\right]; \qquad где:\ -b=e^{-i\pi}b; \qquad (3.22)$$

из которого очевидны аналитические свойства ВРИ по ρ, в частности соотношения обхода вокруг точки $\rho=0$,- совпадающие с таковыми для свободного решения $\chi_l(\rho r)$ по любому замкнутому контуру, не пересекающему другие разрезы: b-фиксировано,

$$J_l(e^{i\pi}\rho,b;r) - J_l(e^{-i\pi}\rho,b;r) + 2i\ sin(\pi l)\ J_l(\rho,b;r) = 0. \quad (3.23)$$

Аналогичный характер имеет кинематическая особенность $2\rho=x+y=0$ функций $d_l(x,y;\alpha)$, $\Phi_l(y,x)$, $a_l(\alpha+\rho,\rho;b^2)$, что можно проверить с помощью основного представления (2.17) и свойств функций Лежандра, либо исходя непосредственно из уравнений (2.14),(3.15), и соотношений обхода для ядра $K_l^{(N)}(\alpha+\rho,\rho)=K_l(2\rho;\alpha,0)=\tilde{K}_l(2\rho;\alpha)$:

$$\tilde{K}_l(2\rho+i0;\alpha) - \tilde{K}_l(2\rho-i0;\alpha) = \theta(\alpha-\mu_o)\ \theta(-\rho)\ \theta(\alpha+\rho)\ 2i\ sin(\pi l)\cdot$$
$$\cdot\left[\theta(-\alpha-2\rho-\mu_o)\ \tilde{K}_l(2\rho;-\alpha-2\rho) - \theta(\alpha+2\rho-\mu_o)\ \tilde{K}_l(-2\rho;\alpha+2\rho)\right],$$

получив из них такое же соотношение для $d_l(x,y;\alpha)$. Функция $\Phi_l(y,x)$, определенная равенством (3.19а), имеет по y те же аналитические свойства резольвенты (3.14). Ее скачек на наложившихся друг на друга разрезах Рис.5 равен:

$$disc\, \Phi_l(y,x)\Big|_{x<y<-x} = \frac{2i\pi}{y-x}\, \Phi_l(x,y)\Phi_l(0,x-y) +$$

$$+ 2i\, \sin(\pi l)\Big[\Phi_l(x,y) - \Phi_l(-x,-y)\Big], \qquad (3.24)$$

т.е. выражается через такую же функцию и ее частное значение:

$$\Phi_l(0,-2\tau) = \Phi_l(\tau,-\tau) = \int_{\mu_0}^{2\tau} d\nu\, P_l\Big[\frac{\nu^2}{2\tau^2} - 1\Big]\, \tilde{D}(\nu;-\tau,\tau;\tau). \qquad (3.25)$$

Последнее равенство вытекает из (2.75) и, как известно /7,61/, определяет скачек приведенной парциальной амплитуды (0.35) на левом разрезе для произвольных комплексных значений момента l:

$$disc\, T_l(k)\, k^{-2l-1}\Big|_{b=-ik>\frac{1}{2}\mu_0} = -\frac{i}{2}\pi\, \Phi_l(0,-2b)\, b^{-2l-2}. \qquad (3.26)$$

Исходя из уравнений (2.64)-(2.67) для гамильтониана типа III, можно полностью повторить проведенный выше анализ аналитических свойств ВРИ и a_{lj}, а при соблюдении (2.61),- и ВФИ и получить ту же область аналитичности $O_\eta^{\varepsilon,\delta}$ (3.7) и такие же формулы для скачков (3.17)-(3.26). Для нелокальных гамильтонианов типа IV эти же соотношения применимы к резольвентному ядру $\hat{a}_l$ и к ВФИ, если она существует (см. раздел 2.2.3), т.к. дополнительно вводимая при перенормировке особенность исчезает в пределе $\Lambda\to\infty$.

2. Для дираковских гамильтонианов типа II аналогичные приведенным выше оценки дают такие же аналитические свойства (3.7) по ρ и b на каждом из двух листов $\zeta=\pm1$ функции $w^\zeta(i\rho)$ и $\bar{\zeta}=\pm1$ функции $W^{\bar{\zeta}}(ib)$ соответственно, чьи разрезы показаны пунктиром на Рис.6,7. Однако,при переходе к симметричным переменным (3.1) пришлось бы вводить по две независимых пары таких листов, что представляется неоправданно громоздким. Тем более, что зависимость от ζ и $\bar{\zeta}$ всегда можно отфакторизовать представлением вида (2.138) для спинора $J^\zeta_{\varkappa}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}}$ ценой введения двух (или четырех) новых, не зависящих от одной (или обеих) переменных $\zeta,\bar{\zeta}$. Такая факторизация будет использована в следующем параграфе.

Повторив процедуру (3.16) для уравнений (2.35),(2.39), можно получить формулы для скачков ВРИ и резольвентного ядра, идентичные (3.18),(3.21) в соответствующих обозначениях (2.72),(2.76). Свойства функции (2.36) гарантируют при этом совпадение соответственных листов $\zeta' \to \bar{\zeta}$, и, с учетом (2.40), дают:

$$\mp \, disc \; J^{\zeta}_{\ae}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}}\Big|_{\rho<-\mu_o \pm b} = disc \; J^{\zeta}_{\ae}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}}\Big|_{\pm b>\rho+\mu_o} =$$

$$= \frac{2i\pi}{2b} \, J^{\bar{\zeta}}_{\ae}(\pm b,b;r)^{\bar{\zeta}} \, a^{\bar{\zeta}\zeta}_{\ae}(\pm b,\rho;b^2)^{\bar{\zeta}} = \tag{3.27}$$

$$= \frac{2i\pi}{2b} \, \overset{\pm}{F}{}^{\bar{\zeta}}_{\ae}(b,r) \, \frac{\eta^{\zeta}(i\rho)\, b}{\eta^{\bar{\zeta}}(ib)\, \rho} \, \Phi^{\zeta\bar{\zeta}}_{\ae}(-\rho,\mp b).$$

Записав решение (2.31) в форме (2.85б), с помощью (П.I.65), (П.I.67) можно получить следующий аналог равенства (3.22):

$$J^{\zeta}_{\ae}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}} - X^{\zeta}_{\ae}(\rho,r) = \Big[F^{\bar{\zeta}}_{\ae}(-b,r) \int_{b+\mu_o}^{\infty} du \sum_{\zeta'=\pm 1} a^{\zeta'\bar{\zeta}}_{\ae}(u,b;b^2)^{\zeta} - \big[b \leftrightarrow -b \big] \Big] \cdot$$

$$\cdot g^{\zeta'}(u;\rho)^{\zeta} \, \Big[2i\eta^{\bar{\zeta}}(ib) \Big]^{-1} \Big[X^{\zeta' \, T}_{\ae}(u,r)\, i\sigma_2 X^{\zeta}_{\ae}(\rho,r) \Big]; \; где: \; -b = e^{-i\pi} b; \tag{3.28}$$

явно представляющий все аналитические свойства по ρ. В частности соотношения обхода вокруг $\rho=0$ совпадают с (П.I.66) т.е. имеют вид (3.23), с заменой $l \to \ae$.

3.2. Следствия аналитических свойств. Приложения к обратной задаче рассеяния.

Интегральная теорема Коши позволяет превратить установленные выше аналитические свойства в новые соотношения между off-shell и half-off-shell величинами.

1. Используя контур Г Рис.8б и формулы (3.18),(3.21а), нетрудно получить соответственно:

$$J_l(\rho,b;r) - \chi_l(\rho r) = \int_{\rho+\mu_o}^{\infty} d\beta \, \frac{\Phi_l(-\rho,-\beta)}{(\beta^2-b^2)} \, f_l(\beta,r), \tag{3.29}$$

$$a_l(u,\rho;b^2) = K_l(u,\rho) + \int\limits_{\rho+\mu_o}^{u-\mu_o} d\beta \, \frac{\Phi_l(-\rho,-\beta)}{(\beta^2-b^2)} \, \Phi_l(u,\beta) \tag{3.30}$$

Ясно, что соотношение (3.29) имеет место и для гамильтонианов типа III и V. Для обобщения его на дираковские гамильтонианы типа II необходимо применить теорему Коши либо по переменной b к независящим от $\bar{\zeta}''$ комбинациям:

$$\mathcal{J}^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{(\pm)} = \left[J^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}''} \pm J^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{-\bar{\zeta}''}\right] \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & (3.31а) \\ \left[2W^{\bar{\zeta}''}(ib)\right]^{-1}, & (3.31б) \end{cases}$$

свободным, как видно из (2.35), от корневой особенности функции $w(ib)=(m^2-b^2)^{1/2}$:

$$J^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}} = \mathcal{J}^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{(+)} + W^{\bar{\zeta}}(ib)\ \mathcal{J}^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{(-)}; \tag{3.32}$$

либо непосредственно по переменной $w(ib)$ к ВРИ в целом, используя пару контуров Рис.8а, замкнутых на ее римановой поверхности /51/, эквивалентных прежнему замкнутому на каждом листе контуру Г Рис.8б, поскольку вклады кинематических разрезов $\pm b>m$ сокращаются в сумме по листам /49,50/. С учетом равенства (2.36), можно получить:

$$J^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{\bar{\zeta}} - X^{\zeta}_{æ}(\rho,r) = \sum_{\zeta'=\pm 1} \oint \frac{d\beta}{2i\pi} \frac{dw^{\zeta'}(i\beta)}{d\beta} \frac{\left[J^{\zeta}_{æ}(\rho,\beta;r)^{\zeta'} - X^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\right]}{\left[w^{\zeta'}(i\beta) - W^{\bar{\zeta}}(ib)\right]} =$$

$$= \int\limits_{\rho+\mu_o}^{\infty} d\beta \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(\beta;b)^{\bar{\zeta}}\ F^{\zeta'}_{æ}(\beta,r)\ a^{\zeta'\zeta}_{æ}(\beta,\rho;\beta^2)^{\zeta'}, \tag{3.33}$$

что отличается от (3.29) наличием суммы по листам и заменой: $(\beta^2-b^2)^{-1} \to$ на $g^{\zeta'}(\beta;b)^{\bar{\zeta}}$. С этой же оговоркой соотношение (3.30) выполняется для всех типов гамильтонианов I-V и имеет весьма общий характер, поскольку операции (0.10)→(1.43)→(2.17), связывающие уравнение ЛШ (0.6) с уравненинием (2.14), переводят в указанное соотношение спектральное представление Лоу, вытекающее из операторного тождества (0.7) /3-6/.

Для исследования обратной задачи рассеяния полезен другой класс представлений ВРИ, вытекающий из свойств по переменной ρ при $b=\rho-2z$, или $x=2\rho-2z$, $y=2z$, при фиксированном значении z:

$$J_l(r;2\rho-2z,2z) = J_l(\rho,\rho-2z;r) = \chi_l(\rho r) + \tag{3.34}$$

$$+\left\{\int_{z+\frac{1}{2}\mu_0}^{\infty} \frac{d\beta\ \Phi_l(-2z,2z-2\beta)}{4\beta(\beta-2z)(\beta-\rho)} f_l(\beta-2z,r) + \begin{bmatrix} z\to-z \\ \rho\to-\rho \end{bmatrix}\right\}\left[\chi_l(\beta r)\ \overleftrightarrow{\partial}_r\ \chi_l(\rho r)\right].$$

Действительно, вводя вспомогательную функцию: (3.35)

$$C_l(\rho,z;r,\xi)=\frac{1}{2\rho}\left[J_l(e^{-i\pi}\rho,\rho-2z;\xi)\chi_l(\rho r)-J_l(\rho,\rho-2z;\xi)\chi_l(e^{-i\pi}\rho r)\right],$$

нетрудно убедиться с помощью (3.22),(3.23) в ее регулярности при $\rho=0$ и однозначности при обходе этой точки:

$$C_l(e^{2i\pi}\rho,\cdots\cdots) = C_l(\rho,\cdots\cdots). \tag{3.36}$$

Так что она является регулярной аналитической функцией ρ в плоскости с двумя динамическими разрезами, показанными на Рис.9, скачки на которых определяются формулами (3.17),(3.19а), (3.35). Из формул и оценок предыдущего параграфа вытекает, что при любом $b(\rho)$

$$\lim_{\rho\to\infty} e^{\rho r}\ J_l(\rho,b(\rho);r) = \lim_{\rho\to\infty} e^{\rho r}\ \chi_l(\rho r) = 1, \tag{3.37}$$

равномерно в $O_{\eta}^{\varepsilon,\delta}$. Откуда для функций:

$$\overset{0}{C}_l(\rho;r) = C_l(\rho,z;r,r)\ ;\ C_l'(\rho;r) = \partial_r\ C_l(\rho,z;r,\xi)\Big|_{\xi=r} \tag{3.38}$$

получаются равномерные вне разрезов асимптотики при $\rho\to\infty$:

$$C_l(\rho;r) = O(1/\rho^2);\quad C_l'(\rho;r) = -1+O(1/\rho^2); \tag{3.39}$$

и теорема Коши приводит к представлениям:

$$\left.\begin{matrix} C_l(\rho;r) \\ C_l'(\rho;r)+1 \end{matrix}\right\} = \{\hat{\mathcal{L}}_l^{(\beta)}(\rho,z;r)\}\begin{cases}\chi_l(\beta r), \\ \partial_r\ \chi_l(\beta r),\end{cases} \tag{3.40}$$

где интегральный оператор $\{\hat{\mathcal{L}}_l^{(\beta)}\}$ дается фигурными скобками в (3.34). Остается при $\xi\Rightarrow r$ подставить (3.40) в тождество:

$$\left[C_l(\rho,z;r,\xi)\ \overleftrightarrow{\partial}_r\ \chi_l(\rho r)\right] = J_l(\rho,\rho-2z;\xi). \tag{3.41}$$

При $l=0$ представлению (3.34) можно придать вид: $2\rho=x+y$,

$$e^{\rho r} J_0(r;x,y) = \mathrm{E}(r;x,y) + \frac{1}{2}\Big[\mathrm{E}(r;y,-y) - \mathrm{E}(r;-y,y)\Big], \qquad (3.42)$$

где положено:

$$\mathrm{E}(r;x,y) \equiv 1 + \int\limits_{\mu_0}^{\infty} d\alpha \, \frac{e^{-\alpha r}\, \Phi_0(y,-\alpha)}{(\alpha+x)(\alpha+y)}\, \mathrm{E}(r;\alpha+y,0), \qquad (3.43)$$

$$\mathrm{E}(r;2\beta,0) = e^{\beta r} J_0(r;2\beta,0) \equiv e^{\beta r} f_0(\beta,r).$$

В силу (3.37) не зависящее от x выражение в $\Big[\cdots\Big]$ в (3.42) должно быть равно нулю, откуда /62/ :

$$e^{\rho r} J_0(r;x,y) \equiv \mathrm{E}(r;x,y), \qquad (3.44)$$

и указанное выражение тождественно равно нулю из-за свойств симметрии (3.3): $\mathrm{E}(r;x,y) = \mathrm{E}(r;y,x)$.

Приведенный вывод (3.34) без изменений переносится на гамильтонианы типа III и V.

Для дираковского гамильтониана типа II релятивистская и спинорная структура ВРИ требуют отдельного рассмотрения. Роль функции (3.35) играет теперь матрица: $b \equiv b(\rho) = \rho - 2z$,

$$\mathrm{C}^{\zeta}_{æ}(\rho,z;r)^{\bar\zeta} = \Big[\mathrm{J}^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{\bar\zeta}\, \overset{\mathrm{T}}{\mathrm{X}}{}^{\zeta}_{æ}(e^{-i\pi}\rho,r) - \mathrm{J}^{\zeta}_{æ}(e^{-i\pi}\rho,b;r)^{\bar\zeta}\, \overset{\mathrm{T}}{\mathrm{X}}{}^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[2i\eta^{\zeta}(i\rho)\Big]^{-1}, \qquad (3.45)$$

обладающая в силу (3.28) такими же свойствами однозначности (3.36) и регулярности при $\rho=0$, но имеющая, наряду с динамическими, корневые кинематические особенности $W^{\bar\zeta}(i(\rho-2z))$, $w^{\zeta}(i\rho)$, показанные пунктиром на Рис.9. Ее скачкам на динамических разрезах с помощью (3.27),(3.45) можно придать вид:

$$disc\, \mathrm{C}^{\zeta}_{æ}(\rho,z;r)^{\bar\zeta}\Big|_{\mp\rho=\beta>\frac{1}{2}\mu_0\mp z} = \pm\, 2i\pi\, \mathrm{h}^{\zeta}_{æ}(\beta,\mp z;r)^{\bar\zeta}\, \overset{\mathrm{T}}{\mathrm{X}}{}^{\zeta}_{æ}(\beta,r), \qquad (3.46)$$

$$\mathrm{h}^{\zeta}_{æ}(\beta,z;r)^{\bar\zeta} = \frac{\mathrm{a}^{\bar\zeta\zeta}_{æ}(\beta-2z,-\beta;(\beta-2z)^2)^{\bar\zeta}\; \mathrm{F}^{\bar\zeta}_{æ}(\beta-2z,r)}{4i\eta^{\zeta}(i\beta)(\beta-2z)}.$$

На основе уравнения (2.35) и определяемых им аналитических свойств можно установить, что при $\rho\to\infty$ и b -фиксированном:

$$e^{\rho r}\mathrm{J}^{\zeta}_{æ}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} \Rightarrow e^{\rho r}\, \mathrm{X}^{\zeta}_{æ}(\rho,r) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i\eta^{\zeta}(i\infty) \end{bmatrix}, \qquad (3.47a)$$

равномерно вне разрезов. В частности, можно отождествить: $\rho\to\infty$,

$$i\eta^{\zeta}(i\rho)\ J^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} \Rightarrow i\eta^{\zeta}(i\rho)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,r) \Rightarrow (i\sigma_2)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,r). \qquad (3.47б)$$

Пользуясь далее рассуждениями работы /50/ применительно к уравнению (2.31), не трудно установить поведение при $\rho\to\infty$ и фиксированном z:

$$J^{\zeta}_{\text{æ}}(\pm\rho,\rho-2z;r)^{\bar\zeta} \Rightarrow R^{\zeta\bar\zeta}(\pm z,r)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\pm\rho,r), \qquad (3.48)$$

где матрица R имеет вид для (0.43а,б) соответственно:

$$R^{\zeta\bar\zeta}(\pm z,r) - I = \int_r^\infty d\xi\ e^{\mp 2z(\xi-r)}\ \frac{d}{d\xi}\begin{cases}\exp\left\{i\sigma_2\left[\theta(r)-\theta(\xi)\right]\right\}\ \delta_{\zeta\bar\zeta}; & (3.49а)\\ (\sigma_1\theta(\xi))\ \delta_{\zeta,-\bar\zeta}\ ; & (3.49б)\end{cases}$$

$$\theta(r) = \int_r^\infty d\xi\ V(\xi).$$

Следовательно, асимптотика (3.45) при $\rho\to\infty$, $|Re\ z|<\frac{\mu_0}{2}$, такова

$$C^{\zeta}_{\text{æ}}(\infty,z;r)^{\bar\zeta} = \left[R^{\zeta\bar\zeta}(z,r)+(z\to-z)\right]\frac{\sigma_2}{2i} + \frac{1}{2i\eta^{\zeta}(i\infty)}\left[R^{\zeta\bar\zeta}(z,r)-(z\to-z)\right]. \qquad (3.50)$$

Избавляясь от одного корневого ветвления $W^{\bar\zeta}(i(\rho-2z))$ разбиением $C^{\zeta}_{\text{æ}}(\cdots)^{\bar\zeta}$ в виде (3.30), причем полагая в соответствующих равенствах (3.31) $\bar\zeta''=\zeta$, а со вторым ветвлением обращаясь как при выводе (3.33), с помощью (3.46), (3.50) можно получить для $C^{\zeta}_{\text{æ}}(\cdots)^{\bar\zeta}$ спектральное представление, заменяющее (3.40). После чего очевидное из (П.I.64) тождество:

$$C^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,z;r)^{\bar\zeta}\ (i\sigma_2)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,r) = J^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,\rho-2z;r)^{\bar\zeta},$$

приводит к соответствующему представлению для ВРИ:

$$J^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,b;r)^{\bar\zeta} - C^{\zeta}_{\text{æ}}(\infty,z;r)^{\bar\zeta}\ (i\sigma_2)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,r) = (-1)\circ$$

$$\circ\sum_{\zeta'=\pm1}\sum_{\iota=\pm1}\left\{\int_{z+\frac{1}{2}\mu_0}^{\infty} d\beta\ \beta\ h^{\zeta}_{\text{æ}}(\beta,z;r)^{\iota\zeta'}\left[1+\bar\zeta\zeta\frac{w^{\zeta'}(i\beta)-w^{\zeta}(i\rho)+W^{\zeta}(i(\rho-2z))}{W^{\iota\zeta'}(i(\beta-2z))}\right]+\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}z\to-z\\ \rho\to-\rho\end{bmatrix}\right\}\ g^{\zeta'}(\beta;\rho)^{\zeta}\left[\overset{T}{X}{}^{\zeta'}_{\text{æ}}(\beta,r)\ (i\sigma_2)\ X^{\zeta}_{\text{æ}}(\rho,r)\right]. \qquad (3.51)$$

Комбинируя представление (3.22) с соотношениями (0.39), (0.35),(0.40) и (П.I.74), нетрудно получить спектральное представление для half-off-shell парциальной T-матрицы:

$$T_l^{(+)}(q,k) = S_l(k)\, T_l^{(-)}(q,k) = \frac{q}{2ik}\left[\tau_l(iq,ik) - S_l(k)\, \tau_l(-iq,-ik)\right], \tag{3.52}$$

явно определяющее ее аналитические свойства по q:

$$\tau_l(-iq,b) = \int\limits_{b+\mu_0}^{\infty} du\, \frac{\Phi_l(u,b)}{(u^2+q^2)} \left[\frac{q}{iu}\right]^l . \tag{3.53}$$

С помощью (2.73),(2.74),(П.I.73) через эту функцию легко выразить решение Иоста в импульсном представлении:

$${}_0\langle ql|f_l(b)\rangle = \frac{q}{(q^2+b^2)} \left[\left[\frac{q}{ib}\right]^l F_l(b) - \tau_l(-iq,b)\right], \tag{3.54}$$

а поскольку в связанных состояниях (см.(0.13)): $F_l(b_{nl}) \equiv 0$,- так же легко выразить через нее в этом представлении волновые функции дискретного спектра, нормированные условием:

$$\int\limits_0^{\infty} dq\, q^2\, |\psi_{nl}(q)|^2 = 1;$$

$$\psi_{nl}(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\, B_n(l)}\;\; \tau_l(-iq,b_{nl})\, (q^2+b_{nl}^2)^{-1}; \tag{3.55}$$

$$B_n(l) = e^{\mp i\pi(l+1)}\, F_l(e^{\pm i\pi} b_{nl}) \left[\dot{F}_l(b_{nl})\right]^{-1};$$

где точка означает производную по b.

Интересно отметить замечательную универсальность функции

$$\Phi_l(u,\rho) = \Psi_l(-u-\rho,-u+\rho) = \Psi_l(y,x), \tag{3.56}$$

связанной равенствами (2.75),(3.19) с half-off-shell спектральной плотностью T-матрицы по передаче импульса $\tilde{D}(\nu;\rho,\rho^2,u)$. Будучи с одной стороны, минимальным расширением скачка S-матрицы на левом разрезе (3.25),(3.26) за энергетическую поверхность, она определяет скачки на динамических разрезах всех off-shell величин: (3.17)-(3.21),(3.52),(3.53), включая и свой собственный (3.24). С другой стороны, уравнения (2.14) при $\rho=b$ или $u=-b$ однозначно определяют ее по плотности потенциала $\Sigma(\nu)$, после чего все искомые в задаче рассеяния величины находятся простыми квад ратурами (2.73),(2.74);(3.52),(3.53);(3.55). Наконец, она же определяет и дальнейшее расширение с энергетической поверхности (3.29),(3.30). Комбинируя эти последние соотношения и полагая

$\Omega_l(u,\rho) = \Phi_l(u,\rho)(\rho^2-u^2)^{-1}$,

можно получить для этой функции нелинейные уравнения, не зависящие от вида потенциала:

$$\Omega_l(u,\rho) + \Omega_l(-\rho,-u) = \int_{\rho+\mu_0}^{u-\mu_0} d\alpha\, \Omega_l(u,\alpha)\, \Omega_l(-\rho-,\alpha) =$$

$$= \int_{\rho+\mu_0}^{u-\mu_0} d\alpha\, \Omega_l(\alpha,\rho)\, \Omega_l(-\alpha-,u), \tag{3.57}$$

2. В этом разделе рассмотрены приложения полученных выше результатов к обратной задаче теории рассеяния. Полагая в (3.34),(3.51) $z=0$, с учетом (2.72), можно получить уравнения:

$$f_l(\rho,r) - \chi_l(\rho r) = \int_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty} \frac{d\beta\, \Phi_l(0,-2\beta)}{2\beta(\beta^2-\rho^2)} f_l(\beta,r) \left[\chi_l(\beta r)\, \overleftrightarrow{\partial}_r\, \chi_l(\rho r)\right]; \tag{3.58}$$

$$J^{\zeta}_{æ}(\rho,\rho;r)^{\iota\zeta} - R^{\zeta\cdot\iota\zeta}(0,r)\, X^{\zeta}_{æ}(\rho,r) = \int_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty} \sum_{\zeta'=\pm1} \frac{d\beta\, g^{\zeta'}(\beta;\rho)^{\zeta}}{(-i)\,\eta^{\zeta'}(i\beta)}\,\cdot$$

$$\cdot a^{\iota\zeta'\cdot\zeta}_{æ}(\beta,-\beta;\beta^2)^{\iota\zeta'} F^{\iota\zeta'}_{æ}(\beta,r) \left[X^{\zeta\,T}_{æ}(\beta,r)\,(i\sigma_2)\, X^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\right]. \tag{3.59}$$

Из (2.76), с учетом (2.40), очевидно, что:

$$a^{\iota\zeta\cdot\zeta}_{æ}(\beta,-\beta;\beta^2)^{\iota\zeta} = \frac{\eta^{\zeta}(i\beta)}{\eta^{\iota\zeta}(i\beta)}\, \Phi^{\iota\zeta\cdot\zeta}_{æ}(\beta,-\beta) \equiv \frac{\eta^{\zeta}(i\beta)}{\eta^{\iota\zeta}(i\beta)}\, \phi^{\iota\zeta\cdot\zeta}_{æ}(\beta), \tag{3.60a}$$

а из (3.49) следует для (0.43а) и (0.43б) соответственно:

$$R^{\zeta\cdot\iota\zeta}(0,r) \Rightarrow \begin{cases} \exp\,[\,i\sigma_2\theta(r)\,]\,, & \iota=1, \\ I, & \iota=-1, \end{cases} \quad (а); \Rightarrow \begin{cases} I, & \iota=1, \\ I-\sigma_1\theta(r), & \iota=-1, \end{cases} \quad (б).$$

Поэтому (3.59) при $\iota=1$, в соответствии с (2.72а), превращается в уравнение типа (3.58) для $F^{\zeta}_{æ}(\rho,r)$ со скачком $\phi^{\zeta'\cdot\zeta'}_{æ}(\beta) \equiv \phi^{\zeta'}_{æ}(\beta)$.

Данный здесь вывод этих уравнений обратной задачи методами прямой задачи рассеяния, в отличии от предложенных ранее /41-43/, справедлив при любых комплексных l и $æ$, и позволяет избежать путаницы /42/ в определении функций:

$$\phi_l(\beta)\equiv\Phi_l(0,-2\beta), \quad \phi_{\ae}^{\zeta}(\beta)\equiv\phi_{\ae}^{\zeta\zeta}(\beta)\equiv\Phi_{\ae}^{\zeta\zeta}(\beta,-\beta), \tag{3.60б}$$

однозначно фиксируя ее связь как с данными рассеяния,- S-матрицей (3.26), так и с потенциалом: (3.25),(3.19),(2.14).

Действительно, подставляя (3.58) в определение амплитуды (0.35), учитывая (0.39) при $\rho=b$ и (П.I.74), можно прийти к обычному N/D -представлению для приведенной парциальной амплитуды:

$$\frac{T_l(k)}{k^{2l+1}} = \frac{k^{-2l}}{2ik}\left[\frac{F_l(ik)}{F_l(-ik)} - 1\right] = -\int\limits_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty} \frac{d\beta\ \phi_l(\beta)\ \beta^{-2l}\ F_l(\beta)}{2\beta\ \ (\beta^2+k^2)\ F_l(-ik)}. \tag{3.61}$$

В тоже время, из (2.15а,б) и (3.19),(3.60а) явствует, что функция $\phi_l(\beta)$ является не менее гладкой чем $\Sigma(\nu)$ и не может содержать дельта-образных вкладов от нулей $F_l(-ik)$,отвечающих связанным состояниям $k=ib_{nl}$ на разрезе $b_{nl}>\frac{\mu_0}{2}$ /43/. Поэтому, отождествление в (3.26) $\phi_l(\beta)$ со скачком левой части (3.61) означает, что в таких точках интегралы в (3.58),(3.59),(3.61) должны пониматься в смысле главного значения Коши /44/, чем исключается возможность "двойного счета" этих состояний /42/.

Из (3.58) легко получить его простое двухпотенциальное обобщение /31,44/ точно такого же вида, с заменами:

$$\overset{(1)}{\chi_l}(\rho r)\to \overset{(1)}{f_l}(\rho,r);f_l(\rho,r)\to \overset{(2)}{f_l}(\rho,r);\ \phi_l(\beta)\to \overset{(2)}{\phi_l}(\beta)-\overset{(1)}{\phi_l}(\beta)\equiv\Delta^{21}\phi_l(\beta).$$

Стандартный переход /43/ к уравнениям Марченко-Блажека для оператора преобразования $A_l^{21}(r,y)$, переводящего $\overset{(1)}{f_l}$ в $\overset{(2)}{f_l}$, дает для него представление при любых комплексных l:

$$A_l^{21}(r,y) = \int\limits_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty} \frac{d\beta}{2\beta}\ \Delta^{21}\phi_l(\beta)\ \overset{(2)}{f_l}(\beta,r)\ \overset{(1)}{f_l}(\beta,y);\quad r\leqslant y; \tag{3.62}$$

где функция $\phi_l(\beta)$ определяется равенствами (3.26),(3.60а) и главное значение имеет указанный выше смысл. Вычисляя контурный интеграл:

$$\frac{2}{\pi}\oint\limits_{\gamma} dk\ \Delta^{21}\left[k^{-2l-1}T_l(k)\right]\ (-ik)^{2l+1}\overset{(2)}{f_l}(-ik,r)\ \overset{(1)}{f_l}(-ik,y),$$

по контуру γ на Рис.10, и пользуясь (3.62) как определением, можно получить представление, справедливое в более широком классе потенциалов, допускающих единственное продолжение $S_l(k)$ на комплексные значения l /43/, которое при целых значениях l переходит в известные выражения /42,43/.

Как и должно быть, независимо от положения полюсов дискретного спектра относительно разреза, это представление имеет вид:

$$2\,\Delta_l^{21}(r,y) = e^{-i\pi l}\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\ \Delta^{21}S_l(k)\ \overset{(2)}{f_l}(-ik,r)\ \overset{(1)}{f_l}(-ik,y)\ -$$

$$-\,2\sum_{n=1}^{n_l^{max}}\left[\overset{(2)}{\mathrm{B}}_n(l)\ \overset{(2)}{f_l}(\overset{(2)}{b}_{nl},r)\ \overset{(1)}{f_l}(\overset{(2)}{b}_{nl},y) - \begin{bmatrix} 2\rightleftarrows 1\\ r\rightleftarrows y\end{bmatrix}\right], \qquad (3.63)$$

где сумма берется *по всем связанным состояниям* $k=ib_{nl}$ -полюсам функций $k^{-2l-1}\ T_l(k)$. Вычеты в полюсах определяются равенствами /3-6,17,61/:

$$\mathrm{B}_n(l) = -2i(b_{nl})^{2l+1}\left[res\ T_l(k)\ (k)^{-2l-1}\right]\Big|_{k=ib_{nl}},$$

$$\left[\mathrm{B}_n(l)\right]^{-1} = \int\limits_0^{\infty} dr\left[f_l(b_{nl},r)\right]^2 = \frac{\mathrm{C}_n(l)}{\pi\ b_{nl}^2}\left[\Gamma(l+\tfrac{3}{2})\ \left[\frac{2}{b_{nl}}\right]^l\ F_l(b_{nl})\right]^2, \qquad (3.64)$$

где $\mathrm{C}_n(l)$ такая же нормировочная константа для регулярного решения $\varphi_l(k^2,r)$, заданного условием (2.86а) с $\sigma<0$. Они однозначно определены согласно формуле (3.55) и для $b>\frac{\mu_0}{2}$ на Рис.10 с учетом соотношений обхода для функций Иоста /17/, справедливых всюду, где исчезает ее динамический разрез:

$$e^{-i\pi l}\ F_l(e^{i\pi}b) - e^{i\pi l}\ F_l(e^{-i\pi}b) + 2i\ sin(\pi l)\ F_l(b) = 0.$$

Привлекая нормированную волновую функцию:

$$\left[\phi_{nl}(r)\right]^2 = \mathrm{B}_n(l)\ \left[f_l(b_{nl},r)\right]^2,$$

можно, с учетом (0.35), при малых вариациях всех данных рассеяния, для вариации потенциала записать на основе (3.63) следующее обобщение результатов Ньютона /3/ и Иоста, Кона /17,43/:

$$\delta V(r) = -2\frac{d}{dr}\delta A_l(r,r) = -\frac{d}{dr}\int\limits_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty}\frac{d\beta}{\beta}\,\delta\phi_l(\beta)\left[f_l(\beta,r)\right]^2 = \tag{3.65}$$

$$= 2\frac{d}{dr}\left\{e^{-i\pi l}\,\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\left[S_l(k)\left[f_l(-ik,r)\right]^2\;\delta\eta_l(k)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{n_l^{max}}\left[\left[\phi_{nl}(r)\right]^2\delta\left[ln\left[B_n(l)\right]\right] + B_n(l)\frac{\partial}{\partial b^2}\left[f_l(b,r)\right]^2\Big|_{b=b_{nl}}\delta b_{nl}^2\right]\right\},$$

где при вещественном l можно заменить:

$$\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\left[\cdots\cdots\right] \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}dk\; Im\left[\cdots\cdots\right].$$

Следует отметить, что вариации нормировочных констант (3.55),(3.64) и фаз рассеяния, не являются независимыми. Однако, даже при минимальной области аналитичности $F_l(b)$: $Re\ b>0$, возникающие ограничения отнюдь не "противоречат природе обратной задачи" /42/, и должны учитываться при сравнении результатов различных подходов /44/. Например, результат Ньютона /3/ для вариации одной фазы рассеяния был получен методом Гельфанда-Левитана при условиях: $\delta b_{nl}^2=0$, $\delta C_{nl}=0$, для которых, в отличии от принятого в /42/, $\delta\left[ln\left[B_n(l)\right]\right]\neq 0$. Для ее вычисления необходимо воспользоваться равенствами (3.55),(3.64), представлением (0.13) для $F_l(b)$, и заметить, что при указанных условиях $(F_l(b_n)=0)$:

$$\delta\left[ln\left[F_l(b)\right]\right]\Big|_{b\Rightarrow b_n} \Rightarrow \delta\left[ln\left[\dot{F}_l(b)\right]\right],$$

что дает:

$$\delta\left[ln\left[B_n(l)\right]\right] = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}dk^2\,\frac{\delta\eta_l(k)}{(k^2+b_{nl}^2)},$$

и приводит (3.65) к виду /3/.

Обычно уравнения (3.58),(3.59) получают при целых l из уравнений Марченко /42,43,50/ обратным превращением формулы для оператора преобразования (3.63) в выражение (3.62), с потерей указанного выше прескрипта главного значения интеграла, что и приводит к неопределенностям в толковании функции $\phi_l(\beta)$ /42/.

Для дираковского случая (3.59) можно полностью повторить приведенное выше обсуждение. Единственное отличие состоит в заключительной процедуре /43,50/ извлечения потенциала из матричных элементов оператора преобразования $A_{\varkappa}(r,y)$:

$$A_{\varkappa}(r,y) = \int\limits_{\frac{\mu_0}{2}}^{\infty} d\beta \sum_{\zeta'=\pm 1} \frac{i\,\phi_{\varkappa}^{\zeta'}(\beta)}{2w^{\zeta}(i\beta)\,\eta^{\zeta'}(i\beta)}\, F_{\varkappa}^{\zeta'}(\beta,r)\, \overset{T}{X}{}_{\varkappa}^{\zeta'}(\beta,y). \tag{3.66}$$

Представления (2.17),(2.22) для ВФИ могут быть использованы при исследовании связей между одномерной (радиальной) и трехмерной обратными задачами рассеяния для локальных потенциалов /45,46/. В N-мерном пространстве внеэнергетический вариант введенного в /46/ оператора Иоста на единичной сфере имеет вид:

$$\langle\vec{w}|I^{(N)}(\rho,b)|\vec{v}\rangle \equiv I^{(N)}(\rho,b;(\vec{w}\circ\vec{v})) =$$

$$= \left[\Omega_N\lambda\right]^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (l+\lambda)\; C_l^{\lambda}(\vec{w}\circ\vec{v})\; F_l^{(N)}(\rho,b), \tag{3.67}$$

где Ω_N и $\lambda=\lambda_N$ даны в (П.I.3). Представления (2.17),(2.22) и формулы (П.I.I5),(П.I.I6), с учетом разложения дельта-функции на сфере $\delta_{\Omega_N}(\vec{w},\vec{v})$, позволяют найти эту сумму в замкнутом виде :

$$I^{(N)}(\rho,b;(\vec{w}\circ\vec{v})) - \delta_{\Omega_N}(\vec{w},\vec{v}) =$$

$$= \int\limits_{\mu_0}^{\infty} d\nu \int\limits_{\rho+\nu}^{\infty} d\alpha\; \frac{\tilde{D}^{(N)}(\nu;\rho,b^2,\alpha)}{(\alpha^2-b^2)}\; S^{(N)}((\vec{w}\circ\vec{v});\nu,\rho,\alpha). \tag{3.68}$$

Необходимый для решения трехмерной обратной задачи оператор Иоста /46/ получится здесь при $\rho=b=-ik$, $N=3$. Привлекая представление (П.I.I) нетрудно заметить, что формальный детерминант введенного оператора при $\rho=b$ совпадает с (0.23). Уравнение (2.23) приводит к следующему линейному уравнению для этого оператора:

$$\langle\vec{w}|I^{(N)}(\rho,b)|\vec{v}\rangle \equiv \mathcal{I}^{(N)}(\vec{r};\vec{b});\ \vec{r}=\rho\vec{w};\ \vec{b}=b\vec{v};\ \vec{u}=u\vec{n};$$

$$\mathcal{I}^{(N)}(\vec{r};\vec{b}) - \delta_{\Omega_N}(\vec{w},\vec{v}) = \int\limits_{\vec{u}^2\geqslant\vec{r}^2} d^N u\; \frac{\mathcal{R}^{(N)}(\vec{u};\vec{r})}{(\vec{u}^2-\vec{b}^2)}\; \mathcal{I}^{(N)}(\vec{u};\vec{b}), \tag{3.69}$$

с ядром:

$$\mathcal{R}^{(N)}(\vec{u};\vec{r}) = u^{1-N} \int\limits_{\mu_o}^{u-\rho} d\gamma\ \Sigma^{(N)}(\gamma)\ S^{(N)}((\vec{w}\circ\vec{n});\gamma,\rho,u).$$

Эти формулы позволяют непосредственно исследовать существенное в трехмерной обратной задаче поведение по $\vec{w}$ и $\vec{v}$ /46/.

ГЛАВА 4. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Сдвиг уровней дискретного спектра

В этом параграфе рассмотрены двухпотенциальные обобщения полученных в главе 2 уравнений и связанные с ними формулы теории возмущений для функции Иоста и сдвигов уровней дискретного спектра.

Комбинируя уравнения (2.23) и представления (2.22а) для двух потенциалов $\overset{(1)}{V}(r)$ и $\overset{(2)}{V}(r)$ вида (0.42),(1.10), с помощью уравнений (2.14) можно получить следующее обобщение (2.23):

$$\overset{(2)}{F}{}_l^{(N)}(\rho,b) - \overset{(1)}{F}{}_l^{(N)}(\rho,b) = \int\limits_{\rho+\mu_0}^{\infty} du\, \frac{\overset{(2)}{F}{}_l^{(N)}(u,b)}{(u^2-b^2)} \left[\frac{\rho}{u}\right]^{j} \int\limits_{\rho}^{u-\mu_0} da\, \overset{(2-1)}{K}{}_l^{(N)}(u,\alpha)\cdot$$

$$\cdot\left[\delta(\alpha-\rho) + \frac{\overset{(1)}{a}{}_l^{(N)}(\alpha,\rho;b^2)}{(\alpha^2-b^2)}\right], \tag{4.1}$$

и такое же равенство с заменой ($1\rightleftarrows 2$), учитывая, что в обозначениях (2.11):

$$\overset{(2-1)}{K}{}_l^{(N)}(u,\rho) = \overset{(2)}{K}{}_l^{(N)}(u,\rho) - \overset{(1)}{K}{}_l^{(N)}(u,\rho) \equiv \overset{(v)}{K}{}_l^{(N)}(u,\rho) \tag{4.2}$$

Аналогичные уравнения имеют место для ВРИ. Можно убедиться, что цепочка операций (0.10)→(1.43)→(2.17)→(2.22), связывающая уравнение ЛШ (0.6) с уравнением для ВФИ (2.23), переводит двухпотенциальный вариант уравнения ЛШ:

$$\overset{(2)}{\mathrm{T}}(W) - \overset{(1)}{\mathrm{T}}(W) = \left[\mathrm{I} + \overset{(1)}{\mathrm{T}}(W)\, \mathrm{G}_0(W)\right] \mathrm{v} \left[\mathrm{I} + \mathrm{G}_0(W)\, \overset{(2)}{\mathrm{T}}(W)\right], \tag{4.3}$$

$$\mathrm{v} = \overset{(2)}{\mathrm{V}} - \overset{(1)}{\mathrm{V}}, \tag{4.4}$$

в соответствующие обобщения уравнений (1.6)→(2.18)→(2.14),и наконец, в уравнение (4.1). При $\rho=b=-ik$, подставляя в (4.1) представление для ВФИ (2.113),(2.114б), пользуясь затем определением (2.101),(2.107) и переходя в координатное представление, с помощью равенств (П.5.2),(2.73а),(0.38), можно для локального возмущения (4.4) получить (при N=3):

$$\overset{(2)}{F}_l(-ik) - \overset{(1)}{F}_l(-ik) \equiv \Delta^{21}F_l(-ik) = \frac{i^{-l}}{k}\int_0^\infty dr\, \overset{(1)}{f}_l(-ik,r)\, v(r)\cdot$$

$$\cdot\, \overset{(2)}{F}_l(-ik)\, \overset{(2)}{\psi}{}^{(+)}_{lV}(k,r) = (1\rightleftarrows 2), \qquad (4.5)$$

где: $\psi^{(\pm)}_{lV}(k,r)$ определена в (2.81), и $v|\vec{x}\rangle = v(r)|\vec{x}\rangle$. Для малых вариаций $v(r)=\delta V(r)$ это дает с учетом (2.82б):

$$\delta\, ln\Big[F_l(-ik)\Big] = -\int_0^\infty dr\, G^{(+)}_{lV}(k;r,r)\,\delta V(r) \equiv -Tr\,\Big\{G^{(+)}_{lV}(k^2)\,\delta V\Big\}. \quad (4.6)$$

Так что при $\rho=b$ формула (4.1) эквивалентна для малых вариаций абстрактному определению (0.24а,б), поскольку:

$$\delta G_{lV}(k^2) = G_{lV}(k^2)\,\delta V\, G_{lV}(k^2). \qquad (4.7)$$

Следовательно, вытекаюшая из нее формула для сдвига дискретного уровня энергии:

$$F_l(b) = 0;\; b^2=b^2_{nl}=-2m\,\varepsilon_{nl};$$

$$\delta\varepsilon_{nl} = -\,\delta F_l(b)\,\Big[\frac{d}{d\varepsilon}\,F_l(b)\Big]^{-1};\; b=b_{nl}; \qquad (4.8)$$

совпадает в первом порядке по $v(r)$ с обычным средним значением

$$\delta\varepsilon_{nl} = \langle nl|\delta V|nl\rangle. \qquad (4.9)$$

С точностью до величин второго порядка малости по $v(r)$ формула для сдвига имеет вид:

$$\Delta\varepsilon_{nl} = -\Big[\frac{d}{d\varepsilon}\,F_l(b)\Big]^{-1}\Big\{\Delta F_l(b) - \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\varepsilon}\Big[\Big(\Delta F_l(b)\Big)^2\Big(\frac{d}{d\varepsilon}\,F_l(b)\Big)^{-1}\Big]\Big\}\Big|_{b=b_{nl}}; \qquad (4.10)$$

где $b^2=-2m\varepsilon$; $F_l(b), b_{nl}$ – невозмущенные величины, а $\Delta F_l(b)$ берется с соответствующей точностью. В отличии от формул обычной тео рии возмущений /13-15/ здесь нет необходимости суммировать по полной системе собственнных функций невозмущенного гамильтониана H_V.

Необходимо отметить, что теория возмущений применима только для вычисления сдвига уровня $\Delta\varepsilon_{nl}$. Само значение ε_{nl} нельзя получить в конечном порядке по $V \to gV$, так как $\varepsilon_{nl}(g)$ не является регулярной функцией g в точке $g=0$ для обычных несингулярных короткодействующих потенциалов вида (0.38) ($\mu_o>0$). Действительно, такие потенциалы при любом g имеют конечное число связанных состояний, которые полностью исчезают при $g<g_o$, где критическое значение $g_o>0$ вследствии неравенства Баргмана /3-5,17/ для полного числа связанных состояний с моментом l:

$$n_l^{max} \leqslant (2l+1)^{-1}|g| \int_0^\infty dr\; r\; |V(r)|.$$

Для дальнодействующих потенциалов ($\mu_o=0$) $\varepsilon_{nl}(g)$ может оказаться регулярной при $g=0$, но, как показано в следующем параграфе, теория возмущений неприменима теперь к функции Иоста из-за сингулярностей ВФИ на энергетической поверхности, точное выделение которых в конечном порядке по g невозможно,- что связано с зависящими от g искажениями асимптотических состояний для этих потенциалов /16,25,27/.

4.2. Кулоновский потенциал ($N=3$)

Кулоновский потенциал: $\mu_o=0$, $\Sigma(\mu)=g\,\delta(\mu)$, является дальнодействующим и, как указывалось во введении, все полученные выше результаты претерпевают для него некоторую модификацию. Ее проще всего усмотреть из явного решения.

Далее в этом и следующем параграфах : $N=3$;

$$a = \frac{g}{2b} = \frac{ig}{2k}; \quad w = \frac{(q^2+b^2)(p^2+b^2)}{b^2}; \quad \tilde{w} = \frac{(u^2-b^2)(\rho^2-b^2)}{b^2};$$

$$\zeta(y) \equiv \left[1 + \frac{2}{y} \pm \frac{2}{y}\sqrt{1+y}\,\right]^{\mp 1} \equiv \left[\sqrt{1+y}\, -1\right]\left[\sqrt{1+y}\, +1\right]^{-1}; \qquad (4.11)$$

где фиксирована положительная при $y>0$ ветвь корня, $|\zeta(y)|\leqslant 1$.
Решение уравнения (1.42) имеет вид:

$$D^c(\nu;-ip,b^2;-iq) = g\,\delta(\nu) + g\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\zeta(w/\nu^2)\right]^a. \qquad (4.12)$$

Решение продолженного уравнения (1.44) таково:

$$\tilde{D}^c(\nu;\rho,b^2;u) = g\,\delta(\nu) + g\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\zeta(\tilde{w}/\nu^2)\right]^{-a}. \qquad (4.13)$$

Аналитическое продолжение (1.43) от (4.12) к (4.13) можно проследить явно: $w \Rightarrow e^{2i\pi}\tilde{w}$ влечет $\zeta(e^{2i\pi}y) \Rightarrow \left[\zeta(y)\right]^{-1}$, при $|y|>1$.

Подставляя (4.12) в формулу (0.9), легко получить известное представление кулоновской Т-матрицы /25,63/: $t = -(\vec{q}-\vec{p})^2$,

$$\langle\vec{q}|T^c(-b^2)|\vec{p}\rangle = \frac{-g}{(2\pi)^2 m}\left[\frac{1}{t} + 4a\int_0^1 \frac{dx\; x^a}{w(1-x^2)-4xt}\right]. \tag{4.14а}$$

Тогда как подстановка (4.13) в (2.17),(2.22а) дает новое представление для кулоновской ВФИ:

$$F_l^c(\rho,b) = \left[\frac{v+1}{v-1}\right]^a \int_0^1 \frac{dx}{x}\left[\frac{v-x}{v+x}\right]^a x^l\left[l + \frac{v^2-1}{4v\eta_v(x)}\int_{\eta_v(x)}^1 d\eta\; \eta^{a-2}\;(\eta^2-\eta_v^2(x))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot P_l'\left[\Psi(x,\eta)\right]\right];\quad Re\; l>0; \tag{4.14б}$$

$$v=(\rho/b);\; \eta_v(x)=\left[\frac{v-1}{v+1}\right]\left[\frac{v+x}{v-x}\right];\; \Psi(x,\eta)=1+x^2-\frac{\left[(\eta-\eta_v(x))(v+1)(v-x)\right]^2}{4v^2\eta};$$

$P_l'(\Psi)$ -определено в (П.6.4). При $l=0$ справа остается только множитель перед первым интегралом. Величины (4.12)-(4.14) сингулярны на энергетической поверхности, и физический смысл имеют лишь коэффициенты при этих сингулярностях. Если, следуя работам /25-28/, определить half-off-shell значения спектральной плотности равенствами /35,36/:

$$D^{c\,(+)}_{h.s.}(v;-k^2;-iq) = \lim_{p\to k,\;\epsilon\to 0+}\left[\frac{k^2+i\epsilon-p^2}{4k^2 i}\right]^{-a}\frac{D^c(v;-ip,-k^2-i\epsilon,-iq)}{\Gamma(1-a)} =$$

$$= \frac{2g}{\Gamma(-a)\; v}\left[\frac{-iv^2}{q^2-k^2-i0}\right]^{-a}; \tag{4.15}$$

$$\tilde{D}^c_{h.s.}(v;b^2;u) = \lim_{\rho\to b}\left[\frac{\rho-b}{2ib}\right]^a\frac{\tilde{D}^c(v;\rho,b^2,u)}{\Gamma(1+a)} = \frac{2g}{\Gamma(a)\; v}\left[\frac{-iv^2}{u^2-b^2}\right]^a; \tag{4.16}$$

где, при предельном переходе формально считается, что $g=g_1+ig_2$, $g_{1,2}>0$,- то несложно распространить все результаты главы 2 на кулоновский случай. Для функции Иоста получается представление

$$F_l^c(b) = \lim_{\rho\to b}\left[\frac{\rho-b}{2ib}\right]^a\frac{F_l^c(\rho,b)}{\Gamma(1+a)} = \int_b^\infty du\,\frac{\Phi_l^c(u,b)}{(u^2-b^2)}\left[\frac{b}{u}\right]^l \equiv \tau_l^c(b,b), \tag{4.17}$$

где $\Phi_l^c(u,b)$ получается таким же предельным переходом из резольвенты $a_l^c(u,\rho;b^2)$ и дается формулой (2.75) (при $N=3$) с заменой:

$$\tilde{D}^{(N)}(\nu;b,b^2;u) \Rightarrow \tilde{D}^c_{h.s.}(\nu;b^2;u). \qquad (4.18)$$

Аналогично, для решения Иоста можно получить выражение:

$$f^c_l(b,r) \equiv \lim_{\rho\to b}\left[\frac{\rho-b}{2ib}\right]^a \frac{J^c_l(\rho,b;r)}{\Gamma(1+a)} = \int_b^\infty du\, \frac{\Phi^c_l(u,b)}{(u^2-b^2)}\,\chi_l(ur), \qquad (4.19)$$

которое независимо проверяется в (П.3.8). Следует подчеркнуть, что первые равенства в (4.15),(4.16) и формулы (4.17),(4.19) сохраняются при наличии короткодействующей добавки к потенциалу. Для чисто кулоновского взаимодействия $V^c(r)=g\,(2mr)^{-1}$ из (2.75), (4.16),(4.18) следует:

$$\Phi^c_l(u,b) = g\, i^{-a}\, P^{-a}_l\left[\frac{u^2+b^2}{2ub}\right]. \qquad (4.20)$$

Подставляя это в (4.17) и пользуясь формулой (П.I.86а) и представлением Эйлера /64,ф.2.1(10)/, нетрудно вывести известное выражение для функции Иоста: $F^c_l(b) = i^{-a}\,\Gamma(l+1)\left[\Gamma(l+1+a)\right]^{-1}$.

Из (2.110) при $b^2=-k^2-i\epsilon$, в пределе $p\to k$, $\epsilon\to 0$, с учетом (4.15), вытекает равенство /28,65,66/:

$$T^{c\,(+)}_l(s,k) = i^{1-a}\, a\, Q^a_l\left[\frac{s^2+k^2}{2sk}\right]; \qquad (4.21)$$

Его подстановка в (2.113), с учетом (2.114), приводит к простому новому представлению для кулоновской ВФИ при $Im\,k=0$, $Re\,\rho>0$:

$$F^c_l(\rho,-ik) - 1 = \frac{a\,e^{-i\pi a}\,\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1+a)\; i\pi}\int_0^\infty \frac{ds^2}{(s^2+\rho^2)}\left[\frac{s}{k}\right]^l Q^a_l\left[\frac{s^2+k^2}{2sk}\right]. \qquad (4.22)$$

Пользуясь формулами (П.I.93) и (П.I.86г,д) можно перейти здесь при целых l к интегралу по всей оси s и, замыкая контур в полуплоскости, не содержащей особенностей функции $Q^a_l\left[Z_0(sk)\right]$, аргумент которой понимается как предел $Z_0(sk)=\lim_{\nu\to 0} Z(sk|\nu)$ аргумента в (2.110) (без обхода точки $Z_0=1$), воспризвести для $\rho=0-iq$ представление из работы /26/:

$$F^c_l(-iq,-ik) - 1 = C_{la}\left[æ^l\left[\frac{æ+1}{æ-1}\right]^a P^{(-a,a)}_l\left[\frac{æ^2+1}{2æ}\right] - A_l(æ^2;a^2)\right], \qquad (4.23)$$

где: $æ=(q/k)$; $C_{la}=\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}\,F^c_l(-ik)F^c_l(ik)$; а вычитательный полином теперь однозначно фиксируется соображениями размерности, четности по k и асимптотическими условиями (2.114а), поскольку правая часть (4.23), в силу (П.I.94), (П.I.86г,д) действительно исчезает при $q\to\infty$ как q^{-1} для:

$$A_l(\varkappa^2;a^2) = \sum_{m=0}^{l} h_{lm}(a^2)\ (\varkappa^2)^{l-m}\ ;$$

$$h_{lm}(a^2) = \left[\frac{d}{dy}\right]^{2m} \left[\frac{y^l}{(2m)!}\left[\frac{1+y}{1-y}\right]^a P_l^{(-a,a)}\left[\frac{1+y^2}{2y}\right]\right]\Bigg|_{y=0}. \qquad (4.24)$$

Для состояний дискретного спектра $\varepsilon=-|\varepsilon|$, $b\Rightarrow b_n=|\varepsilon|/(2n)$, $a\Rightarrow -n$. Выражению (4.16) при этом можно придать смысл как обобщенной функции /37/:

$$\tilde{D}^c_{h.s.}(\nu;b_n^2\ ;u) = 2\varepsilon\,\frac{n!\,i^{-n}}{(2n)!}\,(u^2-b_n^2)^n\,\delta^{(2n)}(\nu). \qquad (4.25)$$

Подставляя его в (2.75) (см.(4.18)), либо пользуясь формулами /64,ф.3.3(14),ф.3.2(44)/, выражение (4.20) при $n=-a\geq l+1$ также можно осмыслить как обобщенную функцию /37/:

$$\Phi_l^c(u,b_n) = \varepsilon i^n \sum_{\kappa=0}^{l} \frac{(l+\kappa)!\,(-1)^\kappa}{(l-\kappa)!\,\kappa!}\,(u+b_n)^{n-\kappa}\,\delta^{(n-\kappa-1)}(u-b_n), \qquad (4.26а)$$

$$\frac{\Phi_l^c(u,b_n)}{(u^2-b_n^2)} = \varepsilon i^n \sum_{\kappa=0}^{l} \frac{(l+\kappa)!\,(-1)^{\kappa+1}}{(l-\kappa)!\,\kappa!\,(n-\kappa)}\,(u+b_n)^{n-\kappa-1}\,\delta^{(n-\kappa)}(u-b_n). \qquad (4.26б)$$

Переходя от (4.26а,б) к импульсному (3.53),(3.55) или координатному (4.19) представлениям соответственно, можно убедиться в правильности получаемых кулоновских волновых функций дискретного спектра /67/.

Для сдвига уровня из (4.1),(4.8) с учетом (4.17),в кулоновском случае $\overset{(1)}{V} \equiv V^c$ находим:

$$2m\,\Delta\varepsilon_{nl} = \int_0^\infty d\nu\ \Sigma_v(\nu)\ O_{nl}(\nu) = \frac{2(-1)^{l+1}\,i^n\,b_n^2}{n\,(n-l-1)!\,l!}\int_{b_n}^\infty da\ \frac{\Phi_l^c(a,b_n)}{(a^2-b_n^2)}\,\cdot$$

$$\cdot\int_a^\infty du\ \frac{\overset{(V)}{K}_l(u,a)}{(u^2-b_n^2)}\left[\frac{b_n}{u}\right]^l F_l^c(u,b_n);\qquad b_n=\frac{|\varepsilon|}{2n}; \qquad (4.27)$$

где $\overset{(V)}{K}_l(u,\rho)$ определяется равенством (4.2) при $N=3$, т.е. (2.34) со спектральной плотностью $\Sigma_v(\nu)$ потенциала (4.4). Можно проверить, что в соответствии с (4.9), вытекающее отсюда выражение для $O_{nl}(\nu)$ совпадает с $\langle nl|e^{-\nu r}\, r^{-1}|nl\rangle$ и может быть записано в виде: $\nu = 2b_n\tau$,

$$\frac{\tau^2}{2b_n}\, O_{nl}(\nu) \equiv \Omega_{nl}(\tau) = \frac{1}{2n(\tau+1)^{2n}} \sum_{\kappa=1}^{n-l} C_{n+l}^{\kappa-1}\, C_{n-l-1}^{\kappa-1}\, (\tau^2)^{\kappa} =$$

$$= \frac{(\tau-1)^{2n}\,(\tau^2)^{l+1-n}}{2n\,(n-l-1)!} \left[\frac{d}{dx}\right]^{n-l-1} \left[\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+l+1}\right]\Bigg|_{x=1/\tau^2}. \qquad (4.28)$$

С помощью теоремы Коши из последнего выражения вытекает предельное соотношение при $\tau = \dfrac{2n}{\lambda}$, $\lambda \equiv |\varepsilon|\,\dfrac{2}{\nu}$, $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_{nl}(\tau) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\, I_{2l+1}(\lambda); \qquad (4.29)$$

где $I_{\kappa}(\lambda)$- модифицированная функция Бесселя /12,ф.7.2(12)/.

Следует иметь в виду, что хотя соотношения (2.113),(2.114б) и (3.52)-(3.54) сохраняют в кулоновском случае свой вид, но все уравнения для half-off-shell величин: (2.111) - для $T_l^{c(\pm)}(q,k)$ (4.21); (2.14) ($\rho=b$) - для $\Phi_l^c(u,b)$ (4.20); (1.42) - для $D_{h.s.}^{c(+)}$ (4.15); (1.44) - для $\tilde{D}_{h.s.}^{c}$ (4.16), *заменяются* при предельном переходе (4.15)-(4.19) соответствующими *однородными уравнениями*. Здесь нет противоречия с неоднородным уравнением для состояния рассеяния, поскольку в кулоновском поле /25,29/ это состояние *больше не связано* обычным образом /3-6/ с $T_l^{c(\pm)}(q,k)$ (4.21).

Тем не менее, рассуждения параграфа 2.2, приводящие к уравнению (2.117), эффективны также и для однородного уравнения ЛШ (2.111), поскольку, в условиях предельного перехода в (4.15), (4.16), в соответствии с (4.14б),(4.11) имеем $F_l^c(-ik,-ik)=0$.

Исчезновение общего свободного члена $\Sigma(\nu)$ в half-off-shell вариантах кулоновских уравнений (1.42),(1.44) приводит к радикально иной аналитической структуре их решений (4.15),(4.16): в то время как для короткодействующих потенциалов борновский член $\Sigma(\nu)$ выживает в этом пределе ($\rho\to b$; $p\to k$), что сохраняет аналитическое продолжение (1.43) и для half-off-shell плотностей $D_{h.s}$, - предельные выражения (4.15),(4.16) *не связаны* более этим аналитическим продолжением. Аналогичный факт отмечался в /47/ для системы функций разложения Гильберта-Шмидта в этой задаче.

Как показано в следующем параграфе, такая "память" у $D^{c}_{h.s.}$ об области перехода на энергетическую поверхность существенна для правильного определения локального потенциала взаимодействия кулоновской системы с длинноволновыми вакуумными флуктуациями электромагнитного поля.

4.3. Локальный потенциал в задаче о Лэмбовском сдвиге

Важную роль в понимании структуры калибровочных теорий играет описание взаимодействия с длинноволновыми флуктуациями вакуума калибровочного поля /68-70/. Считается, что эффекты этого взаимодействия в принципе не могут быть абсорбированы в локальный статический потенциал, поскольку, пока вакуумные частоты много меньше характерной частоты обращения частицы, усреднение по ним будет полностью "размазывать" потенциальную картину ее движения. В качестве примера обычно приводится низкочастотная часть Лэмбовского сдвига в КЭД /69,70/.

Цель этого параграфа - показать, что в указанном примере в случае s-состояний нелокальные эффекты составляют не более 1-2% всего низкочастотного вклада, а их квазиклассический учет позволяет построить локальный потенциал, дающий известные "логарифмы Бете" /13,14,67/ с 10% точностью для всех значений n и l:

$$\Delta\varepsilon_{nl} = \frac{8}{3}\,\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{(Z\alpha)^2}{n}\,|\varepsilon_{nl}|\left[L^{>}_{nl} + L^{<}_{nl}\right]; \quad \varepsilon_{nl} = -\,Z^2 Ry/n^2;$$

$$L^{<}_{nl} = ln\left[\frac{Z^2 Ry}{K(n,l)}\right] - \delta_{lo}\; ln\left[\frac{Z^2 Ry}{\omega}\right]; \qquad (4.30)$$

где: $Ry = m\alpha^2/2$; m-масса электрона; $\alpha = (137)^{-1}$; $\hbar = c = 1$; Z-заряд ядра. В пределе $n=\infty$,- для логарифма средней энергии возбуждения из состояния с нулевой энергией удается получить простое точное выражение, величина которого для $l=0$ составляет:

$$L^{<}_{\infty 0}\Big|_{conv.} = -2.656 \ ,$$

в отличии от значения -2.721 /14,67/, полученного экстраполяцией с низших n /67/.

I. Качественно столь значительная потенциальность s-волнового низкочастотного вклада связана с наличием сшивки с явно локальной высокочастотной частью /13,14,21/. Действительно, матричный элемент для скалярного оператора возмущения в импульсном представлении зависит в этой задаче от трех независимых инвариантов:

$$\langle\vec{q}|v|\vec{p}\rangle = v(t;\delta_q,\delta_p); \qquad t = -(\vec{q}-\vec{p})^2; \tag{4.31}$$

$$\delta_p = m^2-W^2+\vec{p}^2 \equiv b^2+\vec{p}^2; \quad \delta_q = b^2+\vec{q}^2; \quad b^2 \equiv m^2-W^2 = -2m\varepsilon \ .$$

Высокочастотная часть возмущения зависит только от передачи импульса $v^{>}=v^{>}(t)$ и соответствует локальному потенциалу в координатном пространстве, а все нелокальные эффекты связаны с зависимостью от виртуальностей δ_q,δ_p (4.31) в его низкочастотной части $v^{<}(t;\delta_q,\delta_p)$. Ясно, что их гладкая логарифмическая сшивка:

$$v^{>}(t)\ ln\left[\frac{m}{2\omega}\right] + v^{<}(t;\delta_q,\delta_p)\ ln\left[\frac{\omega}{K(n,0)}\right],$$

оказалась бы невозможной, будь эта нелокальность сколь-нибудь существенна при вычислении среднего по состояниям $|n0\rangle$. Для $l\neq 0$ эти рассуждения теряют силу и приближение $\delta_q=\delta_p=0$ оказывается слишком грубым, воспроизводя лишь смену знака, но не величину сдвига. Однако, квазиклассичность высших моментов позволяет в обкладках $|nl\rangle$, подчиняющихся уравнению:

$$\hat{\delta}_P|nl\rangle \equiv (b^2_{nl} + \hat{P}^2)|nl\rangle = -2m\,V^c|nl\rangle,$$

пренебречь некоммутативностью $\hat{P}^2$ и V^c. Тогда в этих обкладках можно заменить $\delta_q,\delta_p \Rightarrow -2mV^c(r)$, что также приводит к эффективному локальному потенциалу, построенному в следующем разделе.

Традиционные методы расчета радиационных смещений /13,14/,

/21,67,71/ не позволяют отделить нелокальные эффекты от локальных. Последние, однако, нетрудно выделить с помощью предложенной в главах I,2 динамической схемы и ее обобщиний в двух последних параграфах, включающей уравнения (1.42),(4.1)-(4.4) и равенство (4.8) в виде соотношений (4.27)-(4.29) для кулоновского поля. Результаты раздела 2.2.3 в принципе позволяют распространить эту схему и на нелокальные потенциалы типа IV (0.46), однако для выделения чисто локальных эффектов явный вид соответствующих формул не потребуется. Принципиальной для дальнейшего является лишь процедура аналитического продолжения (1.43), затрагивающая теперь и спектральную плотность возмущения:
$disc\ v^{<}(t;\delta_q,\delta_p)\Big|_{t=\nu^2}$.

2. Предлагаемый метод расчета допускает наглядную физическую интерпретацию в духе Швингеровской теории источников /71/, если рассматривать взаимодействие с внешним полем как предельный случай некогеррентного обмена с его источником и считать, что эффективная *многочастичная* функция распространения кулоновских "квантов" имеет ненулевую спектральную плотность, определяемую скачком по передаче импульса (4.12) кулоновской Т-матрицы (4.14а). Обычно искусственное разделение сдвига на низко- и высокочастотную части /14,67/ приобретает здесь ясный физический смысл разделения вкладов различных промежуточных состояний в t-канале: двухфермионное состояние в вершинной диаграмме Рис.11 (и в поляризации вакуума) отвечает высокочастотной части,а "состояния" внешнего поля Рис.12,- низкочастотной части сдвига. Вклад двухфермионного промежуточного состояния в диаграммах Рис.12 с $N\geq 2$ будет содержать жесткие пропагаторы электрона, и следовательно, подавлен по степеням $(Z\alpha)$, а реальное промежуточное состояние с *одним* кулоновским "квантом" на Рис.11, суть на

Рис.12 при N=1, запрещено условием калибровочной инвариантности. Последнее требование однозначно фиксирует операторную структуру контрчленов перенормировки массы связанного электрона для диаграммы Рис.12, т.е. $v^{<} \Rightarrow v^{<}_{renorm.}$:

$$\int_0^{\omega} dk_o \; \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi} k_o \frac{\vec{P}}{m} G_V^c(\varepsilon - k_o) \circ \frac{\vec{P}}{m} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^{\omega} dk_o \; \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi} k_o \left[\frac{\vec{P}}{m}, \left[\circ\frac{\vec{P}}{m}, G_V^c(\varepsilon - k_o)\right]\right], \tag{4.32}$$

где частота обрезания: $m\alpha^2 \ll \omega \ll m\alpha$; кулоновская функция Грина: $G_V^c(\varepsilon) = -2m\left[b^2 + \vec{P}^2 + 2m V^c\right]^{-1}$; $b^2 = -2m\varepsilon$; $V^c(r) = -\frac{Z\alpha}{r} = \frac{\varepsilon}{2mr}$.

Аналогичный перенормированный оператор возникает из иных соображений в подходе, развитом в /71/. В импульсном представлении, с учетом (0.3)-(0.5), этот оператор принимает вид:

$$v^{<}(t;\delta_q,\delta_p) = \frac{t}{2m^2}\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2m\omega} dz\; z \left[\frac{\langle\vec{q}|T^c(-b_z^2)|\vec{p}\rangle}{(z+\delta_q)(z+\delta_p)} - \frac{\delta_3(\vec{q}-\vec{p})}{2m(z+\delta_p)}\right], \tag{4.33}$$

где в обозначениях (4.31),(4.32): $z = 2mk_o$, $b_z^2 = b^2 + z$.

Спектральная плотность высокочастотной части Рис.11 $\Sigma_1^{>}(\nu)$ определяется, с учетом поправки Френча, известным выражением /14,ф.(117.15)/ для мнимой части формфактора электрона:

$$\Sigma_1^{>}(\nu) = m\,\nu\,\frac{Z\alpha}{\pi t}\frac{\alpha}{t\,\eta(t)} \langle \bar{u}^{(+)}(\vec{q})|\gamma^o\left[2(t-2m^2)\,\mathcal{L}(t) + 8m^2 - 3t\right] +$$
$$+ 2mi\,\sigma^{o\lambda}(q-p)_\lambda|u^{(+)}(\vec{p})\rangle; \quad t \equiv (q_\lambda - p_\lambda)^2 \Rightarrow -(\vec{q}-\vec{p})^2 \Rightarrow \nu^2;$$

где: член с $\sigma^{\mu\lambda} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\lambda]$, $\mu,\lambda = 0,1,2,3$ (см.(П.I.54)-(П.I.56)) отвечает аномальному магнитному моменту; $\eta(t) = \left[1 - \frac{4m^2}{t}\right]^{1/2}$ и, в зависимости от способа инфракрасного обрезания, $\mathcal{L}(t)$ равно:

$$\mathcal{L}(t) \Rightarrow ln\left[\frac{t-4m^2}{\lambda^2}\right],\ \delta_q = \delta_p = 0; \Rightarrow 2\,ln\left[\frac{t-4m^2}{\delta}\right],\ \delta_q = \delta_p = \delta,\ \lambda = 0;$$

$$\Rightarrow 2\,ln\left[\frac{t-4m^2}{\delta_q}\right] + ln\left[\frac{t}{m^2}\right],\ \delta_p = \lambda = 0; \quad \Rightarrow ln\left[\frac{t}{4\omega^2}\right],\ \omega \leqslant k_o,\ \delta_q = \delta_p = \lambda = 0.$$

Первые три выражения отвечают ковариантным способам обрезания, и находятся с помощью обычных правил Куткоского /14,21/. Используемое здесь нековариантное обрезание, при котором эти правила неприменимы, приводит к последнему выражению. Его можно получить, вычитая из первого выражения скачок по t низкочастотной инфракрасно сингулярной части вершинной диаграммы Рис.11 для $\lambda \leqslant k_o = \sqrt{\lambda^2+\vec{k}^2} \leqslant \omega$ (масса фотона $\lambda \ll \omega$) в режиме рассеяния при нерелятивистских скоростях электрона $|\vec{p}|, |\vec{q}| \ll m$ /72/:

$$\frac{-i\alpha}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k\ [4(qp)\gamma^\mu + O(k^\mu)]}{(k^2-\lambda^2)(k^2-2(qk))(k^2-2(pk))} \equiv \frac{i\alpha}{(2\pi)^2} 4(qp)\gamma^\mu\ \mathcal{J}(t;\omega,\lambda).$$

Вычисляя интеграл по dk_o в длинноволновом пределе:

$(k^2-\lambda^2+i0)^{-1} \Rightarrow -2i\pi\ \delta(k^2-\lambda^2)\ \theta(k_o)$,

с учетом (П.I.40), ей можно придать вид: $k(w) = (w^2-\lambda^2)^{1/2}$; $w \equiv k_o$; $\tau(w) = 4m^2\ (w/k(w))^2$;

$$\mathcal{J}(t;\omega,\lambda) \Rightarrow \frac{i}{2} \int\limits_{\lambda}^{\omega} \frac{dw}{k(w)} \int\limits_{\tau(w)}^{\infty} d\nu^2\ \left[\nu^2(\nu^2-\tau(w))\right]^{-\frac{1}{2}}\ (\nu^2-t)^{-1}\ ;$$

откуда, при $\lambda \ll \omega$ следует:

$$\frac{1}{2i}\ disc_t\ \mathcal{J}(t;\omega,\lambda) \Rightarrow \frac{i\pi}{2t\ \eta(t)} \left[ln(\eta(t)) + ln\left[\frac{2\omega}{\lambda}\right]\right].$$

Поправка Френча /14,71,72/ $ln\left[\frac{2\omega}{\lambda}\right] = \frac{5}{6}$ в выражении для Лэмбовского сдвига полностью эквивалентна замене в $\Sigma_1^{>}(\nu)$ первого выражения для $\mathcal{L}(t)$ последним. Действительно, подстановка такой спектральной плотности в (4.27) дает привычный результат /14,71/:

$L^{>}_{nl} = \delta_{lo}\ \left[ln\left[\frac{m}{2\omega}\right] + \frac{11}{24}\right]$,– без учета поляризации вакуума и аномального магнитного момента. Для $l \neq 0$ получается величина более высокого порядка по $Z\alpha$. Сопоставляемый обычно этому вкладу потенциал $\delta_3(\vec{x})$ эффективно возникает из представления (0.38) как предел при $r^{-1} \infty\ b_n \ll 2m = \mu_o \leqslant \mu$, так как при $\mu \to \infty$:

$$v^{>}(r) \infty \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{4\pi r} \Rightarrow \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \Rightarrow \delta_3(\vec{x}).$$

Слагаемое с N=0 в (4.33), отвечающее свободному электрону, исчезает автоматически. Вклад слагаемого с N=1 не зависит от t и исчезает в скачке (0.10). При обычном способе вычислений он сокращается с аналогичными, не зависящими от t вкладами других диаграмм /73/. Пользуясь выражениями (4.12),(4.13), для продолженной спектральной плотности $disc\, v^{<}(t;\delta_q,\delta_p)\Big|_{t=\nu^2}$ можно получить представление: $g = -2m\,(Z\alpha)$,

$$\tilde{\Sigma}_2^{<}(\nu;\delta_q,\delta_p) = -\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{Z\alpha}{m}\int_0^{2m\omega} dz\; z\,\frac{\nu^2}{b_z^2\, w_z(\delta)}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\zeta\left[\frac{w_z(\delta)}{\nu^2}\right]\right]^{-a_z}, \qquad (4.34)$$

где: $w_z(\delta) = (z+\delta_q)(z+\delta_p)/b_z^2$; $b_z^2 = b^2+z$; $a_z = \dfrac{g}{2b_z}$;

$(z+\delta_p) = (b_z^2+\vec{p}^2) \Rightarrow (b_z^2-\rho^2)$; $(z+\delta_q) = (b_z^2+\vec{q}^2) \Rightarrow (b_z^2-u^2)$;

В этой формуле уже можно положить $u=\rho=b=b_n$ т.е. $\delta_q=\delta_p=0$, после чего она представляет спектральную плотность $\tilde{\Sigma}_2^{<}(\nu)$ локального потенциала $v_2^{<}(r)$ вида (0.38). Подставляя ее в (4.27) и выделяя член с $ln(\omega)$, имеющийся в соответствии с (4.30), только при $l=0$, приходим к следующему выражению для $L_{nl}^{<}\Big|_{conv}$, допускающему численный анализ на ЭВМ /35,40/:

$$\delta_{l0}\left[2\,ln\,\frac{n}{2}-\frac{5}{2}\right] + 2n\int_0^1\frac{d\beta}{\beta}\int_0^1\frac{ds}{s}\, s^{A_n(\beta)}\left[2\,\Omega_{nl}(\tau(s,\beta)) - \delta_{l0}\beta^2\right], \qquad (4.35)$$

где принято: $\nu=2b_n\tau$; $z=4b_n^2\,\beta(1-\beta)^{-2}$; $\tau=\tau(s,\beta)=\left[s^{-1}-s\right]\left[\beta^{-1}-\beta\right]^{-1}$; $A_n(\beta)=2n(1-\beta)(1+\beta)^{-1}$; и $\Omega_{nl}(\tau)$- дается (4.28). Соответствующие значения приведены в таблице 1. Для $l=0$ их отличие от точных /14,67,71/ не превышает 1-2%. Описанное в предыдущем разделе квазиклассическое приближение аккумулируется в следующий эффективный потенциал /35,40/: $g = -2m\,(Z\alpha)$,

$$v_3^{<}(r) = \int_0^{\infty} d\nu\; \tilde{\Sigma}_2^{<}\left[\nu;\frac{|g|}{r},\frac{|g|}{r}\right]\frac{e^{-\nu r}}{2mr}\,,$$

который заменой переменных $\nu=\gamma\left[1+\dfrac{|g|}{rz}\right]$ снова приводится к виду:

$$v_3^{<}(r) = \int_0^{\infty} d\gamma\; \Sigma_3^{<}(\gamma)\,\frac{e^{-\gamma r}}{2mr}\,.$$

Новая спектральная плотность $\Sigma_3^{<}(\gamma)$ отличается от $\tilde{\Sigma}_2^{<}(\gamma)$ наличием затухающей экспоненты $exp\left[-\dfrac{\gamma|g|}{z}\right]$, которая, не меняя поведения при $z\to\infty$, резко подавляет асимптотику при $\gamma\to\infty$, обращая в нуль коэффициент при $ln(\omega)$ в выражении для s-волнового сдвига. Ясно однако, что возникшая существенная особенность по передаче импульса типа $e^{-\sqrt{t}}$ является артефактом сделанного приближения, и должна быть устранена. Зафиксировав *только в этой экспоненте* $\gamma \Rightarrow \gamma_n = 2b_n\vartheta$, и выделяя имеющийся тогда правильный $ln(\omega)$, можно получить следующую основу для численных расчетов $L^{<}_{nl}\Big|_{conv.}$:

$$\delta_{l0}\left[ln\,\frac{n}{4\vartheta} - C_э\right] + 2n\int_0^1 \frac{d\beta}{\beta}\, e^{-f_n(\beta)}\int_0^1 \frac{ds}{s}\, s^{A_n(\beta)}\left[2\,\Omega_{nl}(\tau(s,\beta)) - \delta_{l0}\right]; \tag{4.36}$$

где: $f_n(\beta) = \vartheta\,\frac{n}{\beta}(1-\beta)^2$; $C_э=0.5772\cdots$ – константа Эйлера. При $\vartheta=1.27$ почти все известные "логарифмы Бете" подгоняются с 10% точностью. С 1-2% точностью их можно подогнать, считая ϑ-зависящим от l (но не от n !). Тогда $\vartheta_0 \simeq 0.5$; $\vartheta_1 \simeq 1.55$; $\vartheta_2 \simeq 1.02$.

Стоит отметить, что первая поправка на некоммутативность $\vec{p}^2$ и V^c является в принципе вычислимой величиной.

При $n \to \infty$ квазиклассическое приближение становится точным, но так как $exp\left[-\frac{\gamma_n|\varepsilon|}{z}\right] \Rightarrow 1$, то обе спектральные плотности: $\tilde{\Sigma}^{<}_2(\gamma)$ и $\Sigma^{<}_э(\gamma)$, с учётом соотношения (4.29) и формулы (П.I.95), дают одно и то же предельное выражение:

$$L^{<}_{\infty l}\Big|_{conv.} = \delta_{l0}\left[-2\,ln2-2C_э\right] + \frac{2}{(2l+1)}\int_0^1 d\zeta\; ln(\beta(\zeta))\,\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta)^2\,\zeta^{2l}\right], \tag{4.37}$$

представляющееся точным результатом в данном порядке по $Z\alpha$.

Здесь: $y \equiv \beta(\zeta)\; sh(\beta(\zeta)) = (1-\zeta)^2/\zeta$; а $\zeta(y)$ совпадает с (4.11).

В таблице 1 приводится сравнение значений: $-\,L^{<}_{nl}\Big|_{conv.}$ из /14,67,71/ с вычисленными соответственно по формулам: (4.35) ($\delta_{q.p}=0$); (4.36) ($\delta_{q.p}=|\varepsilon|/r$, при $\vartheta=1.27$); (4.37) ($n=\infty$).

Таблица 1

l	n	/14,67/	$\delta_{qp} = 0$	$\delta_{qp} = \boxed{\frac{\varepsilon}{r}}$	l	n	/14,67/	$\delta_{qp} = 0$	$\delta_{qp} = \boxed{\frac{\varepsilon}{r}}$
0	1	2.984	2.956	3.286	1	3	-0.0382	-0.076	-0.0404
0	2	2.812	2.842	3.063	1	4	-0.0420	-0.076	-0.045
0	3	2.768	2.789	2.961	1	∞	–	-0.076	-0.076
0	4	2.750	2.759	2.902	2	3	-0.0052	-0.0162	-0.0046
0	8	–	2.724	2.798	2	4	–	-0.0160	-0.0058
0	∞	2.721	2.656	2.656	2	∞	–	-0.0160	-0.0160
1	2	-0.0300	-0.077	-0.0330					

Таким образом, показано, что взаимодействие связанного кулоновским полем s-электрона с длинноволновыми флуктуациями электромагнитного вакуума с хорошей точностью описывается своей локальной потенциальной частью вида (0.38) с $\mu_o=0$, определяемой из первых принципов, а не феноменологической подгонкой. Предложен однозначный способ выделения этого (зависящего от энергии) локального вклада и квазиклассический метод учета нелокальных эффектов в высших угловых моментах. Показано, что относительный сдвиг $\Delta\varepsilon_{nl}/\varepsilon_n$ кулоновских "нулевых мод" ($n=\infty$) оказывается целиком связан с указанным локальным вкладом, так как нелокальные эффекты в этом пределе исчезают.

В том же порядке по α эти утверждения относятся к сдвигам уровней позитрония, связанных с водородными простым пересчетом /74/. Если для тяжелых кварков пренебречь силами конфаймента, то тяжелый кварконий будет во многом похож на позитроний /68/, /75/. Поэтому можно ожидать, что его взаимодействие с длинноволновыми флуктуациями глюонного вакуума тоже будет хорошо передаваться своей локальной версией. Следуя по пути, проложенному в /69/, можно получить для соответствующей спектральной плотности в обозначениях (4.34) при $z=M_Q k_o$; $g=\frac{1}{6}M_Q\alpha_s$; $a_z=g(2b_z)^{-1}$;

$$\tilde{\Sigma}^<_z(\nu;\delta_q,\delta_p) = 2g\int_0^{\omega} dk_o\,\frac{R(k_o)}{b_z^2\, w_z(\delta)}\,\nu^2\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\zeta\left[\frac{w_z(\delta)}{\nu^2}\right]\right]^{a_z}. \tag{4.38}$$

Полагая $\delta_{q,p}\Rightarrow 0$ придем к локальной добавке в потенциал кваркония. В калибровке $A^a_o(\vec{x},t)=0$, в которой и применима гамильтонова картина /69/, функция $R(k_o)$ имеет вид:

$$R(k_o) = \frac{\alpha_s}{24\pi}\,(2\pi)^2\sum_{\vec{k}\lambda}\left|\langle 0|\vec{A}^a(0)|\vec{k},\lambda\rangle\right|^2\,\delta(k_o-\mathcal{E}(\vec{k})), \tag{4.39}$$

где:

$$\left|\langle 0|\vec{A}^a(0)|\vec{k},\lambda\rangle\right|^2 = \left|\langle 0|\vec{E}^a(0)|\vec{k},\lambda\rangle\right|^2\,\left[\mathcal{E}(\vec{k})\right]^{-2}. \tag{4.40}$$

Положительность k_o диктуется положительностью спектра глюонного гамильтониана $H_G|\vec{k},\lambda\rangle = \mathcal{E}(\vec{k})|\vec{k},\lambda\rangle$ в /69/. Формулы (4.38),(4.39) отличаются от абелевого случая (4.34) в двух отношениях.

Во-первых, в КЭД взаимодействие с сохраняющимся током оставляет в (4.39) только по две поперечные компоненты потенциала $\vec{A}(0)$, матричные элементы которых выражаются непосредственно через спектральную плотность фотонного пропагатора /14/:

$$R(k_o) \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{k_o^2} d\mu^2\,\sqrt{k_o^2-\mu^2}\;\rho_{КЭД}(\mu^2) \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}\,k_o. \tag{4.41}$$

В КХД цветной кварковый ток не сохраняется и соотношение (4.40) связывает $R(k_o)$ с неизвестным калибровочно-инвариантным корреля тором вида:

$$\langle 0|\vec{E}^a(t)\;\hat{\mathbb{P}}\,exp\left[\int_0^t d\xi\; B_o(\xi)\right]\circ\vec{E}^a(0)|0\rangle,$$

где: $B_\mu(x)=A^a_\mu(x)\,T^a$, и $\hat{\mathbb{P}}\,exp[\cdots]$ в принятой калибровке обращает ся в единицу.

Во-вторых, пертурбативные флуктуации в КЭД, не имея определе ленной характерной ненулевой частоты, не могут изменить результат (4.34) аналитического продолжения (1.43) по сравнению со случаем $k_o=0$, т.е. там принимается, что $arg(2mk_o+\delta_p) \Rightarrow arg\,\delta_p$.

Непертурбативные флуктуации в КХД имеют характерный ненулевой масштаб энергий k_o^{ch} /76/. Поэтому аналитическое продолжение (1.43) при стремящихся к нулю виртуальностях: $M_Q k_o^{ch} \gg \delta_{q,p}$ не будет приводить к изменению знака у степени $\zeta(y)$ в (4.38), так как теперь необходимо принять, что $arg(M_Q k_o^{ch}+\delta_p) \Rightarrow arg(M_Q k_o^{ch})$. Положительность этой степени в (4.38) теперь связана с положительностью g и соответствует отталкиванию кварков в октетном по цвету состоянии. В итоге, все формальные различия в поведении плотностей (4.34) и (4.38) сводятся только к замене (4.41).

4.4. Метод ВФИ и квазипотенциальный подход в квантовой теории поля

Как известно, нулевым приближением любого расчета сдвигов связанных состояний в квантовой теории поля служит точное непертурбативное решение некоторой эффективной одночастичной задачи /77-81/. Последняя является компромиссом между детальностью физического описания и возможностью предъявить явные аналитические выражения для спектра и волновых функций связанных состояний. Квазипотенциальный подход /39,79-83/ имеет несомненные преимущества в качестве такого удобного нулевого приближения. Сохраняя трехмерность описания и вероятностную интерпретацию, он позволяет учесть основные релятивистские эффекты запаздывания и отдачи довольствуясь классом локальных (квази-)потенциалов.

В этом параграфе предпринята попытка обобщить развитый выше метод ВФИ на квазипотенциальные уравнения с такими потенциалами.

Рационализованные варианты этих уравнений /79-81/ отличаются друг от друга и от рассмотренных выше шредингеровских гамильтонианов типа I,III-V только зависимостью от внешнего энергетического параметра $b^2(W)$ у приведенной массы системы $m(b^2)$ и потенциала взаимодействия $U(b^2)$, которая не влияет ни на одну из операций, связывающих функцию Иоста (или ВФИ) со спектральной плотностью Т-матрицы по передаче импульса $D(\nu;-ip,b^2;-iq)$. Следовательно, для этих рационализованных вариантов достаточно заменить в формулах, полученных для гамильтонианов типа I,III-V:

$$m \Rightarrow m(b^2);\ V \Rightarrow U(b^2);\ \Sigma(\nu) \Rightarrow \Sigma(\nu;b^2);\ b^2 \equiv b^2(W); \tag{4.42}$$

где на энергетической поверхности теперь $W \Rightarrow \varepsilon_1+\varepsilon_2$ - полная энергия двух частиц m_1 и m_2 в системе их центра масс, в которой их свободная функция Грина имеет обычный шредингеровский вид:

$$\left[G_0(W)\right]^{-1} = \left[2m(b^2)\right]^{-1}\left[\nabla_x^2 - b^2(W)\right];$$

$$b^2(W) = -(2W)^{-2}\,\Delta(W^2,m_1^2,m_2^2);\quad \varepsilon_{1,2} \equiv \varepsilon_{1,2}(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_{1,2}^2}. \tag{4.43}$$

Здесь $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ - относительная координата; $\vec{p}$ - импульс одной из частиц в с.ц.м., и $\Delta(x,y,z)$ определено в (П.4.I).

Уравнения релятивистской гамильтоновой теории /39,82,83/ претендуют на большую содержательность, связанную, с одной стороны, с заложенной в них гиперболической геометрией трехмерного релятивистского импульсного пространства, а с другой стороны, с их близостью к теоретикополевому методу ковариантной одновременной редукции двухчастичной задачи в квантовой теории поля /84-86/, связывающему квазипотенциальные амплитуды непосредственно с матричными элементами коммутаторов гейзенберговских токов.

Как отмечалось во введении, для этого случая пока не удается полностью реализовать программу предыдущих параграфов, выразив функцию Иоста через спектральную плотность Т-матрицы. Возникающие здесь трудности, однако, характерны для этого варианта квазипотенциального подхода и не связаны со спецификой метода ВФИ, благодаря которому, быть может, их и удастся преодолеть.

1. Уже на первом шаге, при выводе уравнений для спектральной плотности из квазипотенциального уравнения ЛШ для двух одинаковых частиц массы m с полной энергией в с.ц.м $W \equiv 2w$ /39/:

$$A(\vec{q},\vec{p};w) = -\frac{m\,U(\vec{q},\vec{p};w)}{4\pi} + \frac{m}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k\;U(\vec{q},\vec{k};w)\;A(\vec{k},\vec{p};w)}{\varepsilon(\vec{k})\;2\;(w+i0-\varepsilon(\vec{k}))} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{4\mu_o^2}^{\infty} d\nu^2\,\frac{disc\,A(\vec{q},\vec{p};w)}{(\nu^2-t)} = \frac{1}{q}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\;P_l\left(\frac{\vec{q}\circ\vec{p}}{qp}\right)\;T_l(q,p;w), \quad (4.44)$$

с квазипотенциалом:

$$\frac{U(\vec{q},\vec{p};w)}{4\pi} = \int_{4\mu_o^2}^{\infty} d\nu^2\,\frac{\rho(\nu^2;w)}{(\nu^2-t)} = -\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\;P_l\left(\frac{\vec{q}\circ\vec{p}}{qp}\right)\;T_l^0(q,p;w), \quad (4.45)$$

возникают существенные отличия от результатов главы I.

Далее используются параметризации /39,83/:

$$q^o = \varepsilon(\vec{q}) = m\,ch\,\varkappa; \quad q \equiv |\vec{q}| = m\,sh\,\varkappa; \quad \varepsilon(\vec{q}) \equiv \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}\;;$$

$$p^o = \varepsilon(\vec{p}) = m\,ch\,\eta; \quad p \equiv |\vec{p}| = m\,sh\,\eta; \quad w = m\,ch\,\omega;$$

$$k^o = \varepsilon(\vec{k}) = m\,ch\,v; \quad k \equiv |\vec{k}| = m\,sh\,v; \quad t \equiv (q_\lambda - p_\lambda)^2 = 2m(m-\Delta^o);$$

$$\Delta^o = \varepsilon(\vec{\Delta}) = m\,ch\,\chi_\Delta; \quad |\vec{\Delta}| = m\,sh\,\chi_\Delta; \quad (4.46)$$

где трехвектор передачи импульса в геометрии Лобачевского с лоренцовским бустом $L_{\vec{p}}$: $L_{\vec{p}}(m,\vec{0}) = (p^o,\vec{p}) \equiv p_\lambda$, равен /83/:

$$\vec{\Delta} = L_{\vec{p}}^{-1}\;\vec{q} = \vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}\left[\varepsilon(\vec{q}) - (\vec{q}\circ\vec{p})\;(m+\varepsilon(\vec{p}))^{-1}\right];$$

$$ch\,\chi_\Delta = ch\,\varkappa\cdot ch\,\eta - \frac{(\vec{q}\circ\vec{p})}{qp}\;sh\,\varkappa\cdot sh\,\eta. \quad (4.47)$$

Разрез по передаче импульса $t>0$ оказывается здесь естественным образом разбит на две области, параметризуемых в виде:

1) $0 \leqslant \mu_o^2 \leqslant \nu^2 = 2m^2\;(1-\cos\tau) \leqslant 4m^2\;; \Rightarrow 0 \leqslant \tau_o \leqslant \tau \leqslant \pi\;;$

2) $4m^2 \leqslant \nu^2 = 2m^2\;(1+ch\,\lambda) \leqslant \infty; \Rightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant \infty; \quad \tau = \pi + i\lambda.$ (4.48)

Знакомое по главе I уравнение типа Вольтерра возникает только в первой области. В терминах функций

$$D^<(\tau;-i\eta,-i\omega,-i\varkappa) = 2m\;(\sin\tau)\frac{(-1)}{2i\pi}\,disc\;A(\vec{q},\vec{p};w)\Big|_{t=\nu^2=2m(1-\cos\tau)}; \quad (4.49а)$$

$$\Sigma^<(\tau;-i\omega) = 2m^2\;(\sin\tau)\rho(\nu^2=2m^2(1-\cos\tau);\;w); \quad (4.49б)$$

оно имеет вид:

$$D^{<}(\tau;-i\eta,-i\omega,-i\varkappa) = \Sigma^{<}(\tau;-i\omega) - \int\limits_{\tau_o}^{\tau-\tau_o} d\gamma\, \Sigma^{<}(\gamma;-i\omega) \int\limits_{\tau_o}^{\tau-\gamma} d\mu \,\cdot \tag{4.50}$$

$$\cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bar{\Omega}_-(\tau;\mu,\gamma;\varkappa,\eta)}^{\bar{\Omega}_+(\tau;\mu,\gamma;\varkappa,\eta)} d(ch\, v)\, \frac{D^{<}(\mu;-i\eta,-i\omega,-iv)}{2(ch\, v - ch\, \omega)\left[(\bar{\Omega}_+ - ch\, v)(ch\, v - \bar{\Omega}_-)\right]^{1/2}},$$

где функции $\bar{\Omega}_-^+$ определены в (П.8.4)-(П.8.6). Уравнение во второй области является уравнением Фредгольма, свободный член которого включает интеграл по первой области. В терминах функций:

$$D^{>}(\lambda;-i\eta,-i\omega,-i\varkappa) = 2m\, sh\, \lambda\, \frac{-1}{2i\pi}\, disc\, A(\vec{q},\vec{p};w)\Big|_{t=v^2=2m(1+ch\,\lambda)}; \tag{4.51а}$$

$$\Sigma^{>}(\lambda;-i\omega) = 2m^2\, sh\, \lambda\, \rho(v^2=2m^2(1+ch\,\lambda);\, w); \tag{4.51б}$$

его можно кратко, но несколько символически представить в виде:

$$D^{>}(\lambda;-i\eta,-i\omega,-i\varkappa) = \Sigma^{>}(\lambda;-i\omega) - \left[\int\limits_{\tau_o}^{\pi} d\gamma\, \Sigma^{<}(\gamma;-i\omega) + \int\limits_{0}^{\infty} d\xi\, \Sigma^{>}(\xi;-i\omega)\right] \cdot \tag{4.52}$$

$$\cdot \left[\int\limits_{\tau_o}^{\pi(<)} d\mu + \int\limits_{0}^{\infty(>)} d\zeta\right] \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bar{\Omega}_-\left(\pi+i\lambda;\, {}^{\mu}_{\pi+i\zeta},{}^{\gamma}_{\pi+i\xi};\varkappa,\eta\right)}^{\infty} d(ch\, v)\, \frac{D^{(\lessgtr)}\left[{}^{\mu}_{\zeta};-i\eta,-i\omega,-iv\right]}{2(ch\, v - ch\, \omega)\left[(ch\, v - \bar{\Omega}_+)(ch\, v - \bar{\Omega}_-)\right]^{1/2}};$$

где аргументы функций $\bar{\Omega}_-^+(\cdots\cdots)$, $D^{(\lessgtr)}\left[{}^{\mu}_{\zeta};\cdots\cdots\right]$ берутся в соответствии с областью интегрирования по γ,ξ или μ,ζ. Ясно, что оно останется неоднородным и в случае

$$\Sigma^{>}(\lambda;-i\omega) = 0. \tag{4.53}$$

Естественно считать, что две части разреза (4.48) в выражении для потенциала (4.45) с плотностями (4.49б) и (4.51б) связаны с различными физическими процессами, поскольку *релятивистское* взаимодействие двух частиц, допускающее обмен в t-канале инвариантной массой, превышающей $2m$, открывает возможность их аннигиляции в s-канале (см. Рис.13). В тоже время, сама постановка задачи о связанном состоянии в квантовой теории поля, например в случае позитрония /14,21/, предполагает пренебрежение его аннигиляцией, и наоборот, при вычислении его ширины допустимо пре небрежение связью, поскольку характерный масштаб аннигиляции порядка комптоновской длины m^{-1}, много меньшей размера связанного состояния (боровского радиуса). Эти соображения подсказывают необходимость ограничить рамки данного квазипотенциального описания связанных состояний условием (4.53). Для всех потенциалов однобозонного обмена, используемых в ядерной физике, КЭД, и адронной спектроскопии это условие соблюдается с запасом /83/.

2. В качестве парциального эквивалента уравнения (4.44), соответствующего дифференциальному уравнению Шредингера, в релятивистской гамильтоновой теории принимается конечно-разностный оператор /39,82,83/ ($m=1$):

$$G^{-1}_{lU}(\chi) = -2\, ch(i\partial_r) - \frac{l(l+1)}{r(r+i)} \exp(i\partial_r) - U(r;\chi) + 2\, ch\, \chi . \quad (4.54)$$

В нерелятивистском пределе: $m\to\infty$, $r \Rightarrow mr$, $\chi \Rightarrow k/m$, $U \Rightarrow m^{-2}V$, он переходит в оператор (2.2). При $U=0$ соответствие с этим пределом выделяет два типа решений:

$$s_l(\chi,r) = \langle r|\chi l\rangle_o \ ; \qquad e_l^{(2)}(\chi,r) = \langle r|e_l^{(2)}(\chi)\rangle ; \quad (4.55)$$

приведенных в (П.7.I),(П.7.2). В этих матричных обозначениях, сопряжение и транспонирование в которых определено с учетом (П.7.3),(П.7.5), формулы (П.7.9)-(П.7.II),(П.7.I3),(П.7.I5) можно представить в виде:

$$G^{(\pm)}_{lo}(\chi) = B^{(R)}_{lo}(\chi) - \frac{i^{\mp l}}{sh\,\chi} |\chi l\rangle_o \langle e_l^{(2)}(\mp\chi)| =$$

$$= B^{(J)}_{lo}(\chi) - \frac{i^{\mp l}}{sh\,\chi} |e_l^{(2)}(\mp\chi)\rangle\, {}_o\langle \chi l| , \quad (4.56)$$

напоминающем разбиение (2.103), в котором, однако, функции Грина $B^{(R,J)}_{lo}(\chi)$ (П.7.I2) не являются вольтерровскими операторами;

$$\overset{T}{B}{}^{(R)}_{lo}(\chi) = B^{(J)}_{lo}(\chi);\quad B^{(R,J)}_{lo}(-\chi) = B^{(R,J)}_{lo}(\chi);$$

$$\left[G^{(\pm)}_{lo}(\chi)\right]^{\dagger} = G^{(\mp)}_{lo}(\chi); \quad (4.57)$$

$${}_o\langle \chi l|\eta l\rangle_o = \frac{\pi}{2}\,\delta(\chi-\eta); \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi\; |\chi l\rangle_{oo}\langle \chi l| = I \ ; \quad (4.58)$$

Физическое $\psi^{(\pm)}_{lU}(\chi,r) = \langle r|\chi l,\pm\rangle$, регулярное $\varphi_l(\chi,r) = \langle r|\chi l,\mathrm{R}\rangle$, и иостовское $f_l(\chi,r) = \langle r|f_l(\chi)\rangle$ решения даются тогда формальными решениями соответствующих интегральных уравнений /39,82/:

$$|\chi l,\pm\rangle = \left[\mathrm{I} - \mathrm{G}^{(\pm)}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right]^{-1} |\chi l\rangle_0;$$

$$|\chi l,\mathrm{R}\rangle = \left[\mathrm{I} - \mathrm{B}^{(\mathrm{R})}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right]^{-1} |\chi l\rangle_0; \tag{4.59}$$

$$|f_l(\chi)\rangle = \left[\mathrm{I} - \mathrm{B}^{(\mathrm{J})}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right]^{-1} |e^{(2)}_l(\chi)\rangle;$$

С помощью (4.56)-(4.59), повторяя рассуждения (2.101)-(2.106) можно убедиться, что детерминанты:

$$F^{(\pm)}_l(\chi) = det\left[\mathrm{I} - \mathrm{G}^{(\pm)}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right];$$

$$M^{(\mathrm{R})}_l(\chi) = det\left[\mathrm{I} - \mathrm{B}^{(\mathrm{R})}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right]; \tag{4.60}$$

$$M^{(\mathrm{J})}_l(\chi) = det\left[\mathrm{I} - \mathrm{B}^{(\mathrm{J})}_{l0}(\chi)\,\mathrm{U}\right];$$

связаны между собой соотношениями, очень похожими на нерелятивистские формулы (2.105) и (2.22б) при $\rho=\mp ik$ (ср./82/):

$$M^{(\mathrm{R})}_l(\chi)=F^{(\pm)}_l(\chi)\left[1+\frac{i^{\mp l}}{sh\,\chi}\int\limits_0^\infty dr\; v_l(r)\;\psi^{(\pm)}_{lU}(\chi,r)\;U(r;\chi)\;e^{(2)}_l(\mp\chi,r)\right], \tag{4.61}$$

$$F^{(\pm)}_l(\chi) = M^{(\mathrm{J})}_l(\chi)\;\left[1 - \frac{i^{\mp l}}{sh\,\chi}\int\limits_0^\infty dr\; v_l(r)\;s_l(\chi,r)\;U(r;\chi)\;f_l(\mp\chi,r)\right], \tag{4.62}$$

$$M^{(\mathrm{R})}_l(\chi) \equiv M^{(\mathrm{J})}_l(\chi) \equiv M_l(\pm\chi). \tag{4.63}$$

Так как half-off-shell амплитуда, связанная с парциальным разложением (4.44):

$$T^{(\pm)}_l(æ,\eta) = T_l(ch\,æ,ch\,\eta;ch\,\eta\pm i0), \tag{4.64}$$

определяется равенством:

$$-\frac{1}{sh\,\eta}\,U(r;\eta)\;\psi^{(\pm)}_{lU}(\eta,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dæ\;T^{(\pm)}_l(æ,\eta)\;s_l(æ,r)\;, \tag{4.65}$$

то вводя квазипотенциальную функцию Иоста отношением:

$$Z^{(\pm)}_l(\chi) = F^{(\pm)}_l(\chi)\;\left[M_l(\chi)\right]^{-1}, \tag{4.66}$$

и полагая:

$$\Gamma_l^{(\pm)}(\text{æ},\eta) = i^{\mp l}\int_0^\infty dr\ v_l(r)\ s_l(\text{æ},r)\ e_l^{(2)}(\mp\eta-i0,r);$$
$$\Gamma_l^{(-)}(\text{æ},\eta) = (-1)^l\ \Gamma_l^{(+)}(\text{æ},-\eta);\ \Gamma_l^{(\pm)}(-\text{æ},\eta) = (-1)^{l+1}\ \Gamma_l^{(\pm)}(\text{æ},\eta); \qquad (4.67)$$

из (4.61) легко получить следующий аналог равенства (2.101):

$$\left[Z_l^{(\pm)}(\eta)\right]^{-1} = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\text{æ}\ T_l^{(\pm)}(\text{æ},\eta)\ \Gamma_l^{(\pm)}(\text{æ},\eta)\ . \qquad (4.68)$$

Интегралу $\Gamma_l^{(\pm)}(\text{æ},\eta)$ (4.67) можно придать форму (П.I.90), упрощающую проверку его соответствия с нерелятивистским пределом (П.I.73), однако, введение ВФИ с его использованием, исходя из парциального уравнения ЛШ по схеме параграфа 2.2, представляется затруднительным. Поэтому стоит вновь обратиться к релятивистскому конфигурационному представлению /39/.

Нетрудно заметить, что если для потенциала (4.45), при условии (4.53), имеет место представление, аналогичное (2.73б) :

$$U(r;\eta)\ f_l(\mp\eta-i0,r) = \int_{\tau_0\mp i\eta}^{\infty\mp i\eta} d\sigma\ \Phi_l(\sigma;\mp i\eta)\ e_l^{(2)}(-i\sigma,r), \qquad (4.69)$$

то равенство (4.62) приводится, с учетом (4.66),(4.67), к виду, напоминающему представление (2.74):

$$Z_l^{(\pm)}(\eta) = 1 \mp \frac{i^{l\mp l}}{sh\ \eta}\ E_l(\mp i\eta); \qquad (4.70)$$

где:

$$E_l(\beta) = \int_{\tau_0+\beta}^\infty d\sigma\ \Phi_l(\sigma;\beta)\ \Gamma_l^{(-)}(i\beta,-i\sigma)\ . \qquad (4.71)$$

Представление (4.69) для иостовского решения (4.59) удается установить однако, лишь с точностью до неизвестной i-периодической функции, зависящей вообще говоря от потенциала U. Возникающие неоднозначности связаны во-первых, с отсутствием второго граничного условия (при $r=0$), что не позволяет зафиксировать такую мультипликативную i-периодическую функцию в физическом решении исходного конечноразностного уравнения (4.54):

$$G^{-1}_{lU}(\chi)\ \psi^{(\pm)}_{lU}(\chi,r) = 0, \tag{4.72}$$

частному, но не единственному выбору которой отвечает первое из равенств (4.59). Во-вторых, поскольку любая l-периодическая функция $h(r)$ коммутирует с оператором (4.54):

$$\left[G^{-1}_{lU}(\chi),\ h(r)\right] = 0, \quad h(r\pm l) = h(r), \tag{4.73}$$

ее присутствие в потенциале

$$U(r;\omega) = \int\limits_{\tau_0}^{\pi} d\tau\ \Sigma^{<}(\tau;\ -i\omega)\ V_0(r;\tau) \tag{4.74}$$

воспринимается этим оператором как константа /83/, определяемая к тому же самим потенциалом не единственным образом: $g \Rightarrow \{\cdots\}$

$$V_0(r;\tau) \equiv \frac{ch((\pi-\tau)r)}{r\ sh(\pi r)} = \left\{\hat\theta(r)\right\}\frac{ch((\pi-\tau)r)}{r\ exp(\pi r)} = \left\{cth(\pi r)\right\}\frac{ch((\pi-\tau)r)}{r\ ch(\pi r)}, \tag{4.75}$$

где $\hat\theta(r)$ определена в (П.7.14). В третьих, свободное решение $e^{(2)}_l(\chi,r)$ (П.7.2) также фиксируется уравнением (4.72) с $U=0$ и граничныи условием:

$$\lim_{r\to\infty} e^{\beta r}\ e^{(2)}_l(-i\beta,r) = 1 \tag{4.76}$$

с точностью до l-периодической функции.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующее равенство, доказанное в (П.7.19)-(П.7.21):

$$U(r;\omega)\ e^{(2)}_l(-i\beta,r) = \int\limits_{\tau_0+\beta}^{\infty} d\sigma\ e^{(2)}_l(-i\sigma,r)\ H_l(\sigma,\beta), \tag{4.77}$$

где в обозначениях (П.8.2),(П.7.18),(4.46),(4.49б):

$$H_l(\sigma,\beta) = \int\limits_{\tau_0}^{\sigma-\beta} d\tau\ P_l\Big[T[\sigma\beta|\tau]\Big]\ \tilde\Sigma^{<}(\tau;\sigma-\beta;-i\omega), \tag{4.78}$$

$$\tilde\Sigma^{<}(\tau;\sigma-\beta;-i\omega) = 2m^2|sin\ \tau|\rho(v^2;\ w)\ \theta(2\pi-\tau)\ Int\left[1+\frac{\sigma-\beta-\tau}{2\pi}\right]. \tag{4.79}$$

ВРИ $\mathbb{J}_l(\beta,\vartheta;r)$ вводится аналогично параграфу 2.1., как решение неоднородного конечноразностного уравнения (4.72),(4.54):

$$G^{-1}_{lU}(-i\vartheta)\ \mathbb{J}_l(\beta,\vartheta;r) = 2(cos\ \vartheta - cos\ \beta)\ e^{(2)}_l(-i\beta,r), \tag{4.80}$$

удовлетворяющее граничному условию (4.76). Подстановкой сюда, с помощью (4.77), немедленно проверяется, что *одно из решений* этого уравнения подчиняется интегральному уравнению с ядром (4.78)

$$\mathcal{J}_l(\beta,\vartheta;r) = e_l^{(2)}(-i\beta,r) - \int\limits_{\tau_o+\beta}^{\infty} d\sigma\, \frac{H_l(\sigma,\beta)\ \mathcal{J}_l(\sigma,\vartheta;r)}{2(\cos\sigma - \cos\vartheta)} \tag{4.81}$$

Вводя резольвентное ядро $a_l(\sigma,\beta;\vartheta)$:

$$\mathcal{J}_l(\beta,\vartheta;r) = e_l^{(2)}(-i\beta,r) - \int\limits_{\tau_o+\beta}^{\infty} d\sigma\, \frac{a_l(\sigma,\beta;\vartheta)\ e_l^{(2)}(-i\sigma,r)}{2(\cos\sigma - \cos\vartheta)}, \tag{4.82}$$

находим для него уравнение:

$$a_l(\sigma,\beta;\vartheta) - H_l(\sigma,\beta) = - \int\limits_{\tau_o+\beta}^{\sigma-\tau_o} d\alpha\, \frac{H_l(\sigma,\alpha)\ a_l(\alpha,\beta;\vartheta)}{2(\cos\alpha - \cos\vartheta)}, \tag{4.83}$$

и соотношение симметрии:

$$a_l(\sigma,\beta;\vartheta) = a_l(-\beta,-\sigma;\vartheta). \tag{4.84}$$

Наконец, из (4.80),(4.82) вытекает искомое представление:

$$U(r;-i\vartheta)\ \mathcal{J}_l(\beta,\vartheta;r) = \int\limits_{\tau_o+\beta}^{\infty} d\sigma\ a_l(\sigma,\beta;\vartheta)\ e_l^{(2)}(-i\sigma,r), \tag{4.85}$$

которое при $\beta=\vartheta$ совпадает по виду с (4.69). Однако, само решение Иоста (4.59) не совпадает с этим ВРИ при $\beta=\vartheta$, отличаясь на неизвестную i-периодическую функцию $A_{lU}(\chi;r)$, возникающую в результате действия некоторого конечноразностного оператора $\mathcal{A}_{lU}(r)$:

$$f_l(-i\vartheta,r) = A_{lU}(-i\vartheta;r)\ \mathcal{J}_l(\vartheta,\vartheta;r) = \mathcal{A}_{lU}(r)\ \mathcal{J}_l(\vartheta,\vartheta;r), \tag{4.86}$$

с сохранением граничного условия (4.76):

$$\lim_{r\to\infty} A_{lU}(\chi;r) = 1. \tag{4.87}$$

Заменим во всех формулах этого раздела и приложения 7 (П.7.6)-(П.7.12) свободное иостовское решение $e_l^{(2)}(\chi,r)$ новым решением (4.72) для $U=0$:

$$\mathcal{E}_l^{(2)}(\chi,r) = A_{lo}(\chi,r)\ e_l^{(2)}(\chi,r) \equiv \mathcal{A}_{lo}(r)\ e_l^{(2)}(\chi,r), \tag{4.88}$$

с некоторой i-периодической функцией $A_{lo}(\chi,r)$, связанной с оператором $\mathcal{A}_{lo}(r)$, с помощью которого удобно записать измененные выражения для свободных решений, функций Грина и интегралов (4.67). Сохранение условий полноты и ортогональности (4.58) означает унитарность этого оператора на функциях (П.7.1) /83/:

$$\mathcal{A}^{\dagger}_{lO}(r) = \mathcal{A}^{-1}_{lO}(r), \tag{4.89}$$

Если для решения (4.88) также *имеет место* представление вида (4.77) с некоторым ядром, аналогичным (4.78), то повторяя путь от (4.80) к (4.86), с помощью обновленных равенств (4.59) нетрудно обнаружить, что условием вырождения оператора в (4.86) в единичный $\mathcal{A}_{lU}(r) \Rightarrow 1$ является соотношение вида (2.9) для нового решения Иоста и соответствующей ему функции Грина:

$$\int\limits_0^\infty d\xi \; B^{(J)}_{lO}(\chi;r,\xi)\; \mathcal{E}^{(2)}_l(-i\beta,\xi) = \frac{\mathcal{E}^{(2)}_l(-i\beta,r)}{2(ch\;\chi - cos\;\beta)}, \tag{4.90}$$

где для $\mathbb{B}^{(J)}_{lO}(\chi;r,\xi) = \langle r|\mathbb{B}^{(J)}_{lO}(\chi)|\xi\rangle$, определенной в (П.7.12):

$$B^{(J)}_{lO}(\chi;r,\xi) = \mathcal{A}_{lO}(r)\; \mathbb{B}^{(J)}_{lO}(\chi;r,\xi)\; \mathcal{A}^{\dagger}_{lO}(\xi). \tag{4.91}$$

Вопрос о существовании оператора $\mathcal{A}_{lO}(r)$ и решения Иоста с нужными свойствами остается открытым. Для исходных величин (П.7.2), (П.7.12) правая часть (4.90) содержит дефект в виде дополнительного бесконечного ряда по функциям $e^{(2)}_l(\pm\chi-2i\pi n,r)$.

Стоит отметить, что парциальные амплитуды, заданные соотношениями (4.44),(4.64),(4.65), в отличии от функций Иоста (4.68), (4.70),(4.71) определены уравнением ЛШ единственным образом:

$$T_l(ch\;\varkappa,ch\;\eta;w) = T^O_l(ch\;\varkappa,ch\;\eta;w) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dv\; \frac{T^O_l(ch\;\varkappa,ch\;v;w)}{(ch\;v - w)}\cdot$$

$$\cdot\; T_l(ch\;v,ch\;\eta;w) = \tag{4.92}$$

$$= \frac{(-1)}{2\;sh\;\eta}\left[\int\limits_{\tau_o}^{\pi(<)} d\tau + \int\limits_0^{\infty(>)} d\lambda\right] D^{(\lessgtr)}\left[{\tau \atop \lambda};-i\eta,-i\omega,-i\varkappa\right]\; Q_l\left[\frac{ch\;\varkappa\;\; ch\;\eta\;\; {-cos\;\tau \atop +ch\;\lambda}}{sh\;\varkappa\;\; sh\;\eta}\right].$$

3. И последнее замечание: о связи с аналитическим продолжением скачка Т-матрицы (4.49а). Рассматривая в (4.78),(4.79), (4.83) интервал $\sigma-\beta<2\pi$, в котором $Int\left[1 + \frac{\sigma-\beta-\tau}{2\pi}\right] = 1$, и полагая

в нём:

$$a_l(\sigma,\beta;\vartheta) = \int_{\tau_o}^{\sigma-\beta} d\tau\, P_l\left[T[\sigma\beta|\tau]\right] \tilde{D}^<(\tau;\beta,\vartheta,\sigma), \tag{4.93}$$

с помощью формул (П.3.1)-(П.3.3) и определений (П.8.1)-(П.8.5), для $\tau_o \leqslant \tau \leqslant \sigma-\beta < 2\pi$ можно получить уравнение:

$$\tilde{D}^<(\tau;\beta,\vartheta,\sigma) = \tilde{\Sigma}^<(\tau;\vartheta) - \int_{\tau_o}^{\tau-\tau_o} d\gamma\, \tilde{\Sigma}^<(\gamma;\vartheta) \int_{\tau_o}^{\tau-\gamma} d\mu\, \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_-(\tau;\mu,\gamma;\sigma,\beta)}^{\Omega^+(\tau;\mu,\gamma;\sigma,\beta)} d(\cos\alpha)\, \frac{\tilde{D}^<(\mu;\beta,\vartheta,\alpha)}{2(\cos\alpha - \cos\vartheta)\left[(\Omega^+ - \cos\alpha)(\cos\alpha - \Omega_-)\right]^{1/2}} \, . \tag{4.94}$$

Не трудно увидеть, что оно связано с уравнением (4.50) операцией аналитического продолжения по энергетическим параметрам:

$$\eta = i\beta;\ \ æ = i\sigma;\ \ \upsilon = i\alpha;\ \ \omega = i\vartheta; \tag{4.95}$$

при условии, что потенциал непрерывно продолжен по τ с интервала $(0,\pi)$ на интервал $(0,2\pi)$ формулой:

$$\Sigma^<(\tau;\vartheta) \Rightarrow \tilde{\Sigma}^<(\tau;\vartheta) = 2m^2\ |\sin\tau|\ \rho(v^2 = 2m^2(1-\cos\tau); w = \cos\vartheta). \tag{4.96}$$

В итоге, в указанной области и только в ней, имеем соотношение:

$$D^<(\tau;-i\eta,-i\omega,-iæ) \Rightarrow \tilde{D}^<(\tau;\beta,\vartheta,\sigma), \tag{4.97}$$

аналогичное формуле (2.21).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной диссертационной работе развит универсальный метод вычисления парциальных детерминантов Иоста, применимый к широкому классу часто встречающихся в физике релятивистских и нерелятивистских сферически симметричных эллиптических операторов в R_N, включающему оператор Дирака с локальным потенциалом (0.38) и шредингеровские операторы с сингулярным, нелокальным и спин-орбитальным взаимодействиями, обладающими в импульсном представлении спектральной зависимостью от передачи импульса t.

Метод основан на: а) линейном неоднородном уравнении типа Вольтерра для спектральной плотности Т-матрицы по передаче импульса t, решение которого всегда существует и единственно;
б) нетривиальной процедуре аналитического продолжения этой спектральной плотности по энергетическим переменным, приводящей к другому уравнению такого же типа для продолженной спектральной плотности;
в) новом классе интегральных представлений парциальных детерминантов Иоста через коэффициенты разложения продолженной спектральной плотности как функции на группе гиперболических вращений, тесно связанной с группой симметрии исходного оператора;
г) и составной частью содержит обобщение метода ВФИ на перечисленные одночастичные гамильтонианы.

Развитый формализм позволяет:
1) определять и вычислять парциальные и полный детерминанты перечисленных операторов во всей области аналитичности переменных, избегая решения задачи на собственные значения и имея дело всюду только с конечными величинами;
2) сформулировать согласованные процедуры регуляризации и перенормировки функций Иоста для нелокального, сингулярного отталки

вающего и спин-орбитального взаимодействий;
3) придать физический смысл разбиению радиационного сдвига атомного уровня энергии на высоко и низкочастотный вклады и получить их хорошее приближенное описание в терминах локальных аналитических потенциалов типа Юкавы;
4) получить обобщения уравнений релятивистской и нерелятивистской обратной задачи теории рассеяния на произвольные значения углового момента, пользуясь исключительно методами прямой задачи, чем устраняется неоднозначность толкования данных рассеяния;
5) вывести ряд новых интегральных представлений для решений нерелятивистской кулоновской задачи;
6) связать спектральные плотности T-матрицы для одного и того же потенциала в пространствах разной размерности;
7) вывести интегральное представление и уравнение для оператора Иоста на единичной сфере в R_N;
8) в основных чертах распространить предложенный метод на квазипотенциальные уравнения релятивистской гамильтоновой теории.

Возможно, что дальнейшее развитие в этом направлении позволит дать ковариантное определение детерминанта Иоста для двухчастичной задачи квантовой теории поля в терминах спектральной плотности по переданному импульсу представления типа Иоста-Лемана-Дайсона /87/.

Стоит напомнить, что вычислительные методы, основанные на детерминантах оператора Дирака (0.28),(0.29),(0.33) с классическим внешним полем, развивались в КЭД еще в пионерских работах Швингера /88/. Однако, как показано Киржницем и др. /89/, и в теории S-матрицы попытки выйти за рамки привычной аксиоматики, допустив неунитарность S-матрицы при конечных временах и наличие непертурбативных решений динамических уравнений, также приводят вновь к детерминанту (функции) Иоста как центральному объекту вычислений, содержащему всю интересующую физическую информацию. Другим ценным свойством функции Иоста, отмечавшимся в /89/, является возможность получать с ее помощью интегральные представления призвольных сумм по спектру соответствующего гамильтониана. Свежий пример таких вычислений дает работа /90/. Применение найденных в ней формул к пространствам произвольной размерности вполне может опираться на результаты данной диссертационной работы, касающиеся вычисления и представлений функции Иоста.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:/31, 32,35,36,40,44,99/, и докладывались на сессии отделения ядерной физики АН СССР в феврале 1982 года (МИФИ), на семинарах отделов теоретической физики ИЯФ и ИМ СО АН СССР (Новосибирск), МИ им. В.А.Стеклова и НИИ ЯФ МГУ (Москва), на семинаре кафедры квантовой механики ЛГУ (Ленинград), лаборатории ядерных реакций ИТФ (Киев) и кафедры теоретической физики ИГУ (Иркутск), и на Всесоюзном межвузовском Совещании по физике высоких энергий 1990 года (Ленинград).

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору ф.-м.наук, профессору Юрию Викторовичу Парфенову,чья постоянная поддержка, широкая математическая эрудиция и готовность прийти на помощь интенсивно эксплуатировались на протяжении всей работы. Автор признателен доктору ф.-м.наук, профессору В.Л.Черняку за посвещение в тонкости калибровочных теорий, кандидату ф.-м.наук В.А.Наумову за помощь в освоении ЭВМ и ценные советы, и кандидату ф.-м.наук А.Е.Калошину за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

В этом приложении собраны основные необходимые сведения о свойствах матричных элементов групп SU(2) и SO(N), и функциях Лежандра и Бесселя, более или менее известные в литературе, и простые следствия этих свойств.

Полиномы Гегенбауэра $C_l^\lambda(z)$ разлагаются по функциям канонического базиса представления группы SO(N) /11, ф.IX.4.2(2)/, /12, ф.11.4(2)/:

$$\frac{C_l^\lambda(\vec{n}\circ\vec{v})}{C_l^\lambda(1)} = \frac{\Omega_N}{h(N,l)} \sum_{(M)=(m_1 \cdots m_{N-2})} \overset{*}{\Xi}{}_l^{(M)}(\vec{n})\, \Xi_l^{(M)}(\vec{v}), \qquad (\text{П.I.I})$$

где сумма содержит $h(N,l)$ слагаемых; $\lambda=\lambda_N$; $\vec{n}$ и $\vec{v}$ – единичные вектора в R_N с компонентами (П.2.I), в которых оператор Лапласа на единичной сфере (0.22) имеет вид:

$$\Delta^{(N)}_{(\vartheta_1 \div \vartheta_{N-1})} = (\sin\vartheta_1)^{2-N}\, \partial_{\vartheta_1} (\sin\vartheta_1)^{N-2}\, \partial_{\vartheta_1} + (\sin\vartheta_1)^{-2}\, \Delta^{(N-1)}_{(\vartheta_2 \div \vartheta_{N-1})}; \qquad \Delta^{(2)}_{(\varphi)} = \partial^2_\varphi\,; \qquad (\text{П.I.2})$$

Здесь поверхность единичной сферы в R_N:

$$\Omega_N = \frac{2\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}\,; \qquad \lambda = \lambda_N \equiv \frac{N-2}{2}; \qquad (\text{П.I.3})$$

а размерность представления, т.е. пространства однородных гармонических многочленов степени l от N переменных /12, ф.11.2(2)/:

$$h(N,l) = (2l+N-2)\,\frac{(l+N-3)!}{l!\,(N-2)!} \equiv \frac{l+\lambda}{\lambda}\, C_l^\lambda(1)\,. \qquad (\text{П.I.4})$$

Из ортонормированности канонического базиса и (П.I.I) вытекает /12, ф.11.(15), (22)/:

$$\int d\Omega_N(\vec{n})\, C_l^\lambda(\vec{u}\circ\vec{n})\, C_L^\lambda(\vec{n}\circ\vec{v}) = \frac{\Omega_N\,\lambda}{(l+\lambda)}\, \delta_{lL}\, C_l^\lambda(\vec{u}\circ\vec{v}). \qquad (\text{П.I.5})$$

При произвольных z и l функция Гегенбауэра связана с функциями Лежандра 1-ого рода /64, ф.3.I5(4)/:

$$\frac{C_l^\lambda(z)}{C_l^\lambda(1)} = \frac{\Gamma(1-a)}{2^a}(z^2-1)^{\frac{a}{2}}\,P^a_{l-a}(z) = \frac{\Gamma(1-a)}{2^a}(1-z^2)^{\frac{a}{2}}\,\mathrm{P}^a_{l-a}(z), \qquad (\text{П.I.6})$$

где первое равенство имеет смысл при $|z|>1$, второе,- при $|z|<1$, $\mathrm{P}^a_l(z)$ - функция Лежандра на разрезе /64,ф.3.4(1)/, и

$$a \equiv \frac{1}{2} - \lambda \Rightarrow a_N = \frac{3-N}{2}. \qquad (\text{П.I.7})$$

Обобщение формулы Гейне, вытекающее из обобщенной формулы Нейма на /64,ф.3.6(32)/ и условий полноты и ортогональности системы полиномов Гегенбауэра, имеет вид /91,ф.(7.2),ф.(11.1)/:

$$\frac{1}{Z-\mathrm{T}} = \frac{\Gamma(\lambda)\,e^{-i\pi a}}{(Z^2-1)^{a/2}\sqrt{\pi}\,2^a}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+2\lambda)\,C_l^\lambda(\mathrm{T})\,Q^a_{l-a}(Z) =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{T}^2-1}{Z^2-1}\right]^{\frac{a}{2}} e^{-i\pi a}\sum_{j=-a}^{\infty}(2j+1)\,\frac{\Gamma(j+1-a)}{\Gamma(j+1+a)}\,P^a_j(\mathrm{T})\,Q^a_j(Z), \qquad (\text{П.I.8})$$

где в обозначениях (П.I.7):

$$j = l - a \Rightarrow l - a_N\ ; \quad l = j + a = 0,1,2,\cdots. \qquad (\text{П.I.9})$$

Простым обобщением интегральных представлений /64,ф.3.7(29),(31)/ являются формулы:

$$\frac{P^a_l\left[\mathrm{T}(up|\nu)\right]}{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{a/2}} = \left[-\frac{d}{d\nu^2}\right]^n \int_{\nu^2}^{(u-\rho)^2} d\gamma^2\,\frac{P^c_l\left[\mathrm{T}(up|\gamma)\right]\,(\gamma^2-\nu^2)^{c-a+n-1}}{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\gamma^2)\right]^{c/2}\,\Gamma(c-a+n)} \qquad (\text{П.I.10})$$

$$\frac{Q^a_l\left[Z(qp|\nu)\right]e^{-i\pi a}}{\left[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\right]^{a/2}} = \left[-\frac{d}{d\nu^2}\right]^n \int_{\nu^2}^{\infty} d\gamma^2\,\frac{Q^c_l\left[Z(qp|\gamma)\right]e^{-i\pi c}\,(\gamma^2-\nu^2)^{c-a+n-1}}{\left[\Delta(q^2,p^2,-\gamma^2)\right]^{c/2}\,\Gamma(c-a+n)} \qquad (\text{П.I.11})$$

где $\mathrm{T}(up|\nu)$, $Z(qp|\nu)$ даны в (П.4.3) и (П.4.14) соответственно, а целое число n обеспечивает сходимость: $n \geqslant max\,[0,\ Re(a-c)]$.

Теорема сложения для функций Лежандра при произвольных комплексных параметрах l,a и переменных $\mathrm{X},\mathrm{Y},\varphi$, удовлетворяющих условию: $|e^{i\varphi}| < \left|\frac{(\mathrm{X}+1)(\mathrm{Y}+1)}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{Y}-1)}\right|^{1/2}$, доказана в работе /91,ф.(11.4)/ и может быть представлена в виде:

$$\frac{2^a}{\Gamma(-a)}\,\frac{\Gamma(l+1-a)}{\Gamma(l+1+a)}\,(\mathrm{T}^2-1)^{\frac{a}{2}}\,P^a_l(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n-a)\,C_n^{-a}(\cos\varphi)\,\cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(l+1-a+n)}{\Gamma(l+1+a+n)} (X^2-1)^{\frac{a}{2}} P_l^{a-n}(X) (Y^2-1)^{\frac{a}{2}} P_l^{a-n}(Y). \qquad (\text{П.I.12})$$

Используя значение интеграла /64,ф.3.15(18)/, из нее можно вывести формулу умножения для этих функций вида /11,ф.X.5.6(1)/:

$$\frac{P_l^a(X)}{(X^2-1)^{\frac{a}{2}}} \frac{P_l^a(Y)}{(Y^2-1)^{\frac{a}{2}}} = \frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)} \frac{1}{\pi} \int\limits_{T_-(X,Y)}^{T^+(X,Y)} dT \frac{(T^2-1)^{a/2} P_l^a(T)}{\left[-W(X,Y,T)\right]^{a+\frac{1}{2}}}. \qquad (\text{П.I.13})$$

В (П.I.12),(П.I.13) принято:

$$T \equiv T(X,Y;\varphi) = XY - \cos\varphi \left[(X^2-1)(Y^2-1)\right]^{1/2},$$

$$W(X,Y,T) = X^2+Y^2+T^2-2XYT-1 = (T-T^+(X,Y))\,(T-T_-(X,Y)); \qquad (\text{П.I.14})$$

$$T_-^+(X,Y) = XY \pm \left[(X^2-1)(Y^2-1)\right]^{1/2}.$$

Формула (П.I.13),таким образом, справедлива для всех l,a и X,Y, при которых обе ее стороны имеют смысл /92,§5.7.1/, в частности при $X,Y,T>1$.

Еще одна теорема сложения для полиномов Гегенбауэра из /93,ф.19.12.(5)/ используется в виде:

$$S^{(N)}(y;\nu,\rho,u) = 4\pi \frac{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{-a/2}}{\pi^a\,\Omega_N^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+\lambda}{\lambda} \left[\frac{u}{\rho}\right]^{a-l} C_l^\lambda(y)\, P_{l-a}^a(T_\nu) = \qquad (\text{П.I.15})$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)u(u^2-\rho^2)(u\rho)^{\lambda-2}\,(T_\nu^2-1)^{-a}}{2^\lambda\,\Gamma(1-a)\pi\Omega_N\left[W(T_0,T_\nu,y)\right]^{(\lambda+1)/2}}\ {}_2F_1\left[\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda-1}{2};1-a;\frac{(T_\nu^2-1)(1-y^2)}{W(T_0,T_\nu,y)}\right],$$

где λ и a взяты из (П.I.2),(П.I.7); $T_\nu=T(u\rho|\nu)$ и $W(T_0,T_\nu,y)$ определены выше, ${}_2F_1$- гипергеометрическая функция. При четных N (П.I.15) выражается через элементарные функции, при нечетных N, - через эллиптические интегралы /93/. Например:

$$S^{(4)}(y;\nu,\rho,u) = \frac{u(u^2-\rho^2)\,(T_\nu^2-1)^{1/2}}{2\pi^3\,u\rho\,W(T_0,T_\nu,y)}; \qquad (\text{П.I.16а})$$

$$S^{(2)}(y;\nu,\rho,u) = \frac{u(u^2-\rho^2)\,(T_\nu^2-1)^{-1/2}\,(T_0-yT_\nu)}{2\pi^2(u\rho)^2\,W(T_0,T_\nu,y)}; \qquad (\text{П.I.16б})$$

В дальнейшем будут рассмотрены многочисленные следствия формулы умножения (П.I.13). Переходя в ней при $a=0$ к интегрированию по φ (П.I.I4), дифференцированием по X,Y с помощью рекурентных формул для функций Лежандра /64,ф.3.8(2),(10)/:

$$\xi\left(l+\frac{1-\xi}{2}\right)\left[T\,P_l(T)-P_{l-\xi}(T)\right]=(T^2-1)\,P_l'(T)\;; \tag{П.I.I7а}$$

$$\xi\left(l+\frac{1-\xi}{2}\right)P_l(T)=T\,P_l'(T)-P_{l-\xi}'(T)\;; \tag{П.I.I7б}$$

$$(2l+1)\,T\,P_l(T)=(l+1)\,P_{l+1}(T)+l\,P_{l-1}(T); \tag{П.I.I7в}$$

где $\xi=\pm 1$, $P_l'(T)=\frac{d}{dT}P_l(T)$, l -любое; и уравнения /64,ф.3.2(1)/:

$$\hat{L}_T\,P_l(T)\equiv\left[\frac{d}{dT}(T^2-1)\frac{d}{dT}-l(l+1)\right]P_l(T)=0; \tag{П.I.I7г}$$

можно получить формулу умножения вида:

$$P_l(X)\,P_{l-\xi}(Y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{T_-(X,Y)}^{T^+(X,Y)}dT\left[-W(X,Y,T)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\left[\frac{TX-Y}{T^2-1}\right]P_l(T)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{TY-X}{T^2-1}\right]P_{l-\xi}(T)\right]. \tag{П.I.I8}$$

Пусть числа μ,λ независимо принимают значения $\pm\frac{1}{2}$ и пусть:

$$d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(z)=(-1)^{\Lambda(\mu,\lambda)}\left[\frac{1+z}{2}\right]^{\frac{1}{2}|\lambda+\mu|}\left[\frac{1-z}{2}\right]^{\frac{1}{2}|\lambda-\mu|}=$$

$$=\left[\frac{1+z}{2}\right]^{1/2}\delta_{\lambda\mu}+(-1)^{\lambda+|\lambda|}\left[\frac{1-z}{2}\right]^{1/2}\delta_{\lambda,-\mu}; \tag{П.I.I9}$$

$$\Lambda(\mu,\lambda)=\frac{1}{2}(\mu-\lambda-|\mu-\lambda|). \tag{П.I.20}$$

Положим при произвольных j и T вне интервала $(-\infty,-1]$, Z вне интервала $(-\infty,1]$:

$$d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(T)\,d^{(j)}_{\lambda\mu}(T)=\frac{1}{2}\left[P_{j-\frac{1}{2}}(T)+2\mu 2\lambda\,P_{j+\frac{1}{2}}(T)\right]; \tag{П.I.2I}$$

$$d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(Z)\,e^{(j)}_{\lambda\mu}(Z)=\frac{1}{2}\left[Q_{j-\frac{1}{2}}(Z)+2\mu 2\lambda\,Q_{j+\frac{1}{2}}(Z)\right]; \tag{П.I.2I}$$

С помощью (П.I.I3),(П.I.I8) легко проверяются соотношения:

$$\sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}}d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\sigma}(Y)d^{(j)}_{\lambda\sigma}(Y)\,d^{(\frac{1}{2})}_{\sigma\mu}(X)d^{(j)}_{\sigma\mu}(X)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{T_-(X,Y)}^{T^+(X,Y)}dT\,\frac{d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(T)d^{(j)}_{\lambda\mu}(T)}{\left[-W(X,Y,T)\right]^{1/2}}\;; \tag{П.I.23}$$

$$\sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\sigma}(Y)\, d^{(j)}_{\lambda\sigma}(Y)\, 2\sigma\, d^{(\frac{1}{2})}_{\sigma\mu}(X)\, d^{(j)}_{\sigma\mu}(X) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{T_-(X,Y)}^{T^+(X,Y)} dT\, \frac{d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(T) d^{(j)}_{\lambda\mu}(T)}{\left[-W(X,Y,T)\right]^{1/2}} \left[2\lambda\left[\frac{TX-Y}{T^2-1}\right] + 2\mu\left[\frac{TY-X}{T^2-1}\right]\right] = \qquad (\text{П.I.24})$$

$$= \left[2\mu\frac{d}{dX} + 2\lambda\frac{d}{dY}\right] \frac{1}{\pi}\int\limits_{T_-(X,Y)}^{T^+(X,Y)} dT\, d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(T)\, d^{(j)}_{\lambda\mu}(T)\, \frac{\left[-W(X,Y,T)\right]^{1/2}}{(T^2-1)} \quad ;$$

как и (П.I.I8), они справедливы при всех j, X,Y для которых обе части равенства имеют смысл.

Стартуя с формулы умножения для функций Лежандра 2-ого рода /22,ф.(В-2.19)/ ($Z_\pm(X,Y)$ определено как $T^+_-(X,Y)$ в (П.I.I4)):

$$Q_l(X)\, Q_l(Y) = \int\limits_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\, Q_l(Z) \left[W(X,Y,Z)\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad (\text{П.I.25})$$

с учетом тех же рекурентных соотношений (П.I.I7) ($P_l \to Q_l$), можно получить для нее почти очевидный аналог формулы (П.I.I8), приводящий точно таким же путем к соотношениям для функций (П.I.22):

$$\sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\sigma}(Y)\, e^{(j)}_{\lambda\sigma}(Y) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\sigma \end{Bmatrix} d^{(\frac{1}{2})}_{\sigma\mu}(X)\, e^{(j)}_{\sigma\mu}(X) = \qquad (\text{П.I.26})$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\mu\frac{d}{dX} + 2\lambda\frac{d}{dY} \end{Bmatrix} \int\limits_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\, d^{(\frac{1}{2})}_{\lambda\mu}(Z)\, e^{(j)}_{\lambda\mu}(Z) \begin{Bmatrix} \left[W(X,Y,Z)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ (-1)\left[W(X,Y,Z)\right]^{\frac{1}{2}} (Z^2-1)^{-1} \end{Bmatrix}.$$

Принятые здесь обозначения функций вращения совпадают с таковыми в /6,15,48/, отличаясь порядком спиральных индексов от /14/ и /61,ф.(Б.9-12),ф.(Б.20-24)/.

Оператор поворота состояний системы на углы Эйлера α,β,γ:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = exp(-i\alpha J_z)\, exp(-i\beta J_y)\, exp(-i\gamma J_z), \qquad (\text{П.I.27})$$

имеет в базисе операторов $\vec{J}^2$, J_z матричные элементы /6,15,48/:

$$\langle j,m|R(\alpha,\beta,\gamma)|j,k\rangle = D^{(j)}_{mk}(\alpha,\beta,\gamma) \equiv D^{(j)}_{mk}(R) =$$

$$= e^{-i\alpha m - i\gamma k}\, d^{(j)}_{mk}(\cos\beta). \qquad (\text{П.I.28})$$

Спиральные состояния по оси $\vec{n}$, собственные для $\vec{J}^2$ и $J_n = (\vec{J}\circ\vec{n})$, получаются поворотом из состояний с тем же значением J_z /48/:

$$w^j_\mu(\vec{n}) = R(\varphi,\vartheta,0)\ |j,\mu\rangle = \sum_{m=-j}^{j} |jm\rangle\ D^{(j)}_{m\ \mu}(\varphi,\vartheta,0), \tag{П.I.29}$$

$$R(\varphi,\vartheta,0) = exp(-i\varphi J_z)\ exp(-i\vartheta J_y). \tag{П.I.30}$$

Обозначим этот оператор через $R_{\vec{n}\vec{z}}$:

$$R_{\vec{n}\vec{z}} \equiv R(\varphi,\vartheta,0) = exp(-i\vartheta(\vec{J}\circ\vec{u}))\ exp(-i\varphi J_z), \tag{П.I.30а}$$

где φ,ϑ -сферические координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n}(\vartheta,\varphi) = (sin\ \vartheta\ cos\ \varphi,\ sin\ \vartheta\ sin\ \varphi,\ cos\ \vartheta); \tag{П.I.31}$$

$$\vec{u} = (-\ sin\ \varphi,\ cos\ \varphi,\ 0).$$

Если вектор $\vec{æ}$ со сферическими координатами φ_2,ϑ_2 в системе Oxyz, в системе $Ox_1y_1z_1$ с вектором $\vec{n}(\vartheta_1,\varphi_1)$ в качестве орта $\vec{z}_1$, полученной из исходной Эйлеровым вращением (П.I.30а), имеет сферические координаты ϕ,θ, то для оператора $R_{\vec{æ}\vec{n}}$:

$$R_{\vec{æ}\vec{n}} \equiv R(\phi,\theta,0) = exp(-i\phi J_z)\ exp(-i\theta J_y) \tag{П.I.32}$$

можно получить представление через операторы $R_{\vec{n}\vec{z}}$ (П.I.30а):

$$R_{\vec{æ}\vec{n}} = \left[R_{\vec{n}\vec{z}}\right]^{-1} R_{\vec{æ}\vec{z}}\ , \tag{П.I.33}$$

что, в силу (П.I.29), дает первое из равенств (1.29). Второе вытекает из унитарности представления, т.к. согласно (П.I.33):

$$\left[R_{\vec{æ}\vec{n}}\right]^{-1} = \left[R_{\vec{æ}\vec{z}}\right]^{-1} R_{\vec{n}\vec{z}} = R_{\vec{n}\vec{æ}}, \tag{П.I.34}$$

и, в соответствии с (П.I.28), для этих R /6,48/:

$$D^{(j)}_{mk}(R^{-1}) = D^{(j)}_{mk}(R^{\dagger}) = \overset{*}{D}{}^{(j)}_{km}(R) = (-1)^{k-m}\ D^{(j)}_{-k,-m}(R). \tag{П.I.35}$$

Наконец, для любых трех единичных векторов $\vec{n},\vec{æ},\vec{v}$ теперь не трудно получить :

$$\left[R_{\vec{æ}\vec{v}}\right]^{-1} = \left[R_{\vec{æ}\vec{n}}\right]^{-1} \left[R_{\vec{n}\vec{v}}\right]^{-1} = R_{\vec{v}\vec{æ}}, \tag{П.I.36}$$

что является операторной формой (1.32). Уместно подчеркнуть, что по смыслу ϕ,θ, только при $\vec{n}=\vec{z}$ оператор (П.I.32) будет оператором Эйлерова поворота состояний системы. Из (П.I.36) и ортогональности матриц вращения /48, ф. (12.35)/ вытекает:

$$\int d\Omega_3(\vec{n})\ \overset{*}{D}{}^{(j)}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}})\ \overset{*}{D}{}^{(J)}_{\nu\lambda}(R_{\vec{n}\vec{v}}) = \frac{4\pi}{(2J+1)}\ \delta_{jJ}\ \overset{*}{D}{}^{(j)}_{\nu\mu}(R_{\vec{æ}\vec{v}}). \tag{П.I.37}$$

Определению функций второго рода /61,ф.(Б.21 / можно придать более симметричную форму:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dc\ \overset{(s)}{d}_{\lambda\mu}(c)\ \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(c)\ (z-c)^{-1} = \begin{cases} \overset{(s)}{d}_{\lambda\mu}(z)\ \overset{(j)}{e}_{\lambda\mu}(z), & s\leqslant j; \\ \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(z)\ \overset{(s)}{e}_{\lambda\mu}(z), & s>j; \end{cases} \qquad (\text{П.I.38})$$

где j и s целые или полуцелые одновременно. Условие полноты системы функций $\overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(\cos\beta)$ /48,ф.(12.39)/,с учетом (П.I.28),дает:

$$\left[Z-(\vec{æ}\circ\vec{n})\right]^{-1} \overset{*(s)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}}) = \overset{(s)}{d}_{\lambda\mu}(Z)\sum_{j=s}^{\infty}(2j+1)\ \overset{*(j)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}})\ \overset{(j)}{e}_{\lambda\mu}(Z) +$$

$$+ \overset{(s)}{e}_{\lambda\mu}(Z)\sum_{j=max[|\lambda|,|\mu|]}^{s-1}(2j+1)\ \overset{*(j)}{D}_{\lambda\mu}(R_{\vec{æ}\vec{n}})\ \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(Z). \qquad (\text{П.I.39})$$

Для $s=\frac{1}{2}$ вторая сумма исчезает. Комбинируя формулы (1.32),(1.33) с выражениями для интегралов при $N=3$:

$$I_0^{(3)}(X,Y,(\vec{æ}\circ\vec{v})) = \int d\Omega_3(\vec{n})\left\{\left[X-(\vec{æ}\circ\vec{n})\right]\left[Y-(\vec{v}\circ\vec{n})\right]\right\}^{-1} =$$

$$= 4\pi\int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\ \left[W(X,Y,Z)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[Z-(\vec{æ}\circ\vec{v})\right]^{-1}, \qquad (\text{П.I.40})$$

$$\vec{I}_1^{(3)}(X,Y;\vec{æ},\vec{v}) = \int d\Omega_3(\vec{n})\ \vec{n}\left\{\left[X-(\vec{æ}\circ\vec{n})\right]\left[Y-(\vec{v}\circ\vec{n})\right]\right\}^{-1} =$$

$$= 4\pi\int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\ \frac{\left[W(X,Y,Z)\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[Z-(\vec{æ}\circ\vec{v})\right]\left[Z^2-1\right]}\left\{\vec{æ}(ZY-X)+\vec{v}(ZX-Y)\right\} = \qquad (\text{П.I.4I})$$

$$= (-1)\left[\vec{æ}\frac{d}{dX}+\vec{v}\frac{d}{dY}\right]4\pi\int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\ \frac{\left[W(X,Y,Z)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[Z-(\vec{æ}\circ\vec{v})\right]\left[Z^2-1\right]},$$

с помощью (П.I.37)-(П.I.39) можно показать, что что оба равенства (П.I.26) после замены $(\frac{1}{2})\to(s)$ имеют место для любого спина: $s<j$.

Первые равенства (П.I.23),(П.I.26) можно получить, используя известные суммы с коэффициентами Клебша-Гордана /15,48/, ортогональная матрица которых связывает различные базисы в спиновом пространстве /15,48/. При фиксированном полном моменте j

операцию перехода от базиса $|jml\rangle$ к базису $|jm\lambda\rangle$ с матрицей перехода /48,ф (28.58), ф.(12.59)/:

$$\langle jml|jm\lambda\rangle = \left[\frac{2l+1}{2j+1}\right]^{1/2} \langle l0;s\lambda|j\lambda\rangle = (-1)^{s+\lambda} \langle j,-\lambda;s\lambda|l0\rangle, \qquad (\text{П.I.42})$$

удобно обозначить для произвольного оператора 0 как:

$$0_{l'l} = \sum_{\mu=-s}^{s} \sum_{\lambda=-s}^{s} \left[\frac{(2l'+1)(2l+1)}{(2j+1)(2j+1)}\right]^{1/2} \langle l'0;s\mu|j\mu\rangle\, 0_{\mu\lambda} \langle l0;s\lambda|j\lambda\rangle \equiv$$

$$\equiv \left\{\left\{0_{\mu\lambda}\right\}\right\}_{l'l}; \qquad (\text{П.I.43})$$

и аналогично операцию обратного перехода,- свертку $0_{l'l}$ с теми же матрицами (П.I.42) по $|j-s|\leqslant l', l\leqslant j+s$:

$$0_{\mu\lambda} = \left\{\left\{0_{l'l}\right\}\right\}_{\mu\lambda}. \qquad (\text{П.I.44})$$

тогда можно записать /48,ф.(12.49)/ :

$$\overset{(s)}{d}_{\lambda\mu}(c)\, \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(c) = \left\{\left\{\delta_{l'l}\, P_l(c)\right\}\right\}_{\mu\lambda}; \qquad (\text{П.I.45})$$

что для $s=\frac{1}{2}$ сводится к (П.I.2I). В этом случае, при данном j, l принимает два значения: $l=l_\xi=j+\frac{\xi}{2}$; $\xi=\pm 1$; $l'=l_{\xi'}$, причем в (П.I.42)

$$\left[\frac{2l+1}{2j+1}\right]^{1/2} \langle l_\xi 0;s\lambda|j\lambda\rangle = \frac{(-\xi)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \qquad (\text{П.I.46})$$

т.е. не зависит от полного момента j. Обращение (П.I.2I) таково

$$\left\{\left\{\overset{(\frac{1}{2})}{d}_{\lambda\mu}(c)\, \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(c)\right\}\right\}_{\xi'\xi} = \delta_{\xi'\xi}\, P_{j+\frac{\xi}{2}}(c); \qquad (\text{П.I.47})$$

а из (П.I.46) вытекает

$$\left\{\left\{2\lambda\, \delta_{\mu\lambda}\right\}\right\}_{\xi'\xi} = -\delta_{\xi',-\xi}; \qquad (\text{П.I.48})$$

$$\left\{\left\{2\mu 2\lambda\, \overset{(\frac{1}{2})}{d}_{\lambda\mu}(c)\, \overset{(j)}{d}_{\lambda\mu}(c)\right\}\right\}_{\xi'\xi} = \delta_{\xi'\xi}\, P_{j-\frac{\xi}{2}}(c). \qquad (\text{П.I.48а})$$

Формулы (П.I.47),(П.I.48) и такие же формулы для функций второго рода означают в частности, что ортогональное преобразование (П.I.43) переводит проекторы (1.39) в проекторы $(1 \pm \sigma_3)_{\xi'\xi}$.

Шаровые спиноры /6,13-15/ выражаются через шаровые функции /48,ф.(12.18)/ : $\quad Y_l^m(\vec{n}) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\right]^{1/2} \overset{*(l)}{D}_{m0}(R_{\vec{n}\vec{z}})$;

$$U_\xi(\vec{p},\lambda) = \frac{w^\xi(p)+H_0(\vec{p})}{2\left(\varepsilon(p)+m\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1+\xi \\ 1-\xi \end{pmatrix} (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^{\frac{1-\xi}{2}} W_\lambda(\vec{n}) \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \xi\left(\varepsilon(p)+m\xi\right)^{1/2} \\ \left(\varepsilon(p)-m\xi\right)^{1/2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) \end{bmatrix} W_\lambda(\vec{n}); \qquad \vec{p} = p\vec{n};$$

$$\left(U^+_{\xi''}(\vec{p},\mu)\, U_\xi(\vec{p},\lambda)\right) = 2\varepsilon(p)\,\delta_{\xi''\xi}\,\delta_{\mu\lambda}; \qquad \bar{U}_\xi(\vec{p},\lambda) = U^+_\xi(\vec{p},\lambda)\gamma_0;$$

$$\left(\bar{U}_{\xi''}(\vec{p},\mu)\, U_\xi(\vec{p},\lambda)\right) = \delta_{\mu\lambda}\left(\delta_{\xi''\xi}\, 2m\xi - \delta_{\xi'',-\xi}\, 2p\right);$$

$$\langle W^+_\mu(\vec{n}) \,|\, W_\lambda(\vec{n})\rangle = \delta_{\mu\lambda}; \quad \sum_\lambda W_\lambda(\vec{n})\, W^+_\lambda(\vec{n}) = \mathbb{1};$$

$$\mathcal{Y}^{M}_{-\text{æ}_\xi}(\vec{n}) \equiv \begin{bmatrix} -\xi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{M}{2\text{æ}+1}}\; Y^{M-\frac{1}{2}}_{l_\xi}(\vec{n}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M}{2\text{æ}+1}}\; Y^{M+\frac{1}{2}}_{l_\xi}(\vec{n}) \end{bmatrix} = \sum_{m=-l}^{l} \langle l_\xi m; \tfrac{1}{2}, \mu=M-m | jM\rangle\; Y^{m}_{l_\xi}(\vec{n})\; w_\mu(\vec{z}) = \tag{П.I.49а}$$

и через функции вращения (П.I.28):

$$= \left[\frac{2l+1}{4\pi}\right]^{1/2} \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \langle l_\xi 0; s\lambda | j\lambda\rangle\; \overset{*}{D}{}^{(j)}_{M\lambda}(R_{\vec{n}\vec{z}})\; w_\lambda(\vec{n}); \tag{П.I.49б}$$

где:

$$\text{æ} \equiv \text{æ}_\xi = \xi(j+\tfrac{1}{2});\; l = l_\xi = j+\tfrac{\xi}{2};\; 2\text{æ}_\xi+1 = \xi(2l_\xi+1);\; \xi = \pm 1. \tag{П.I.50}$$

Они удовлетворяют условию:

$$(\vec{\sigma}\circ\vec{n})\; \mathcal{Y}^{M}_{-\text{æ}}(\vec{n}) = -\,\mathcal{Y}^{M}_{\text{æ}}(\vec{n}), \tag{П.I.5I}$$

и определяют проекционный оператор на состояния с определенными j, и l_ξ /6,13/:

$$\Pi_{\text{æ}_\xi}(\vec{n},\vec{v}) = \sum_{M=-j}^{j} \mathcal{Y}^{M}_{-\text{æ}_\xi}(\vec{n}) \otimes \overset{*}{\mathcal{Y}}{}^{M}_{-\text{æ}_\xi}(\vec{v}) = \frac{2l+1}{4\pi} \sum_{\mu=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \langle l_\xi 0; s\mu | j\mu\rangle \cdot$$

$$\cdot \overset{*}{D}{}^{(j)}_{\lambda\mu}(R_{\vec{n}\vec{v}})\; \langle l_\xi 0; s\lambda | j\lambda\rangle\; w_\mu(\vec{n}) \otimes \overset{*}{w}_\lambda(\vec{v}) = \tag{П.I.52}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[|\text{æ}_\xi| + i\xi\,(\vec{\sigma}\circ(\vec{n}\times\vec{v}))\,\frac{d}{dc}\right] P_{l_\xi}(c);\quad c = (\vec{n}\circ\vec{v});$$

где спиральные состояния $w_\mu(\vec{n})$ определены в (П.I.29);

$$\int d\Omega_3(\vec{n})\; \Pi_{\text{æ}}(\vec{\omega},\vec{n})\; \Pi_\tau(\vec{n},\vec{v}) = \delta_{\text{æ},\tau}\; \Pi_{\text{æ}}(\vec{\omega},\vec{v}). \tag{П.I.53}$$

Матрицы Паули в приведенных выше формулах имеют вид:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \tag{П.I.54}$$

а матрицы Дирака в стандартном представлении /14,ф.(21.20)/ :

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix},\quad \beta = \gamma_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},\quad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}. \tag{П.I.55}$$

В этом представлении полный набор собственных функций гамильтониана (0.25) имеет вид, при $\zeta = \pm 1$, $\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $\vec{p} = p\vec{n}$:

$$u_\zeta(\vec{p},\lambda) = \frac{m + \gamma_0\zeta\varepsilon(\vec{p}) - (\vec{\gamma}\circ\vec{p})}{2\,(\varepsilon(\vec{p})+m)^{1/2}} \begin{bmatrix} (1+\zeta) \\ (1-\zeta) \end{bmatrix} \otimes (\vec{\sigma}\circ\vec{n})^{(1-\zeta)/2}\; w_\lambda(\vec{n}); \tag{П.I.56}$$

и обладает свойствами:

$$\sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} u_\zeta(\vec{p},\lambda) \otimes \overset{*}{u}_\zeta(\vec{p},\lambda) = \varepsilon(\vec{p}) + \zeta H_0(\vec{p});$$

$$H_0(\vec{p}) = (\vec{\alpha}\circ\vec{p}) + \beta\, m; \tag{П.I.57}$$

$u_\zeta(\vec{p},\lambda) = u^{(\zeta)}(\zeta\vec{p},\lambda)$,

где $u^{(\zeta)}(\vec{p},\lambda)$, $\zeta=\pm 1$, заданы формулами /14,ф.(23.9),ф.(23.14)/.

При разделении переменных в сферических координатах $\vec{x} = r\vec{n}$ полная трехмерная волновая функция разлагается на независимые парциальные слагаемые:

$$\Psi_{æM}(\vec{x}) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}\phi^{(1)}_{æ}(r)\ \mathcal{Y}^{M}_{-æ}(\vec{n})\\ i\phi^{(2)}_{æ}(r)\ \mathcal{Y}^{M}_{æ}(\vec{n})\end{bmatrix}, \tag{П.I.58}$$

и, с учетом (П.I.5I), для радиального спинора:

$$\phi_{æV}(r) = \begin{bmatrix}\phi^{(1)}_{æ}(r)\\ \phi^{(2)}_{æ}(r)\end{bmatrix} \tag{П.I.59}$$

возникает радиальное уравнение Дирака с оператором (2.25). Решения этого уравнения при $V=0$ имеют вид /13-15,49-51/:

$$X^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho,r) = \begin{bmatrix}\chi_{æ}(\rho r)\\ i\eta^{\zeta}(i\rho)\ \chi_{-æ}(\rho r)\end{bmatrix}; \qquad æ = æ_\xi = \xi\,(j+\tfrac{1}{2}); \tag{П.I.60}$$

где, согласно (П.I.75): $\chi_{æ_\xi} = \chi_{l_\xi}$; $\chi_{-æ_\xi} = \chi_{æ_{\xi}-1} = \chi_{l_{-\xi}}$;

$$\phi^{\zeta}_{æ_\xi O}(k,r) = \begin{bmatrix}\phi_{l_\xi O}(kr)\\ \xi\ \eta^{\zeta}(k)\ \phi_{l_{-\xi}O}(kr)\end{bmatrix} = \tag{П.I.6Iа}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(-i)^{l_\xi}\ X^{\zeta}_{æ_\xi}(-ik,r) - i^{\,l_\xi}\ X^{\zeta}_{æ_\xi}(ik,r)\right]; \tag{П.I.6Iб}$$

и в соответствии с (П.I.50): $l_\xi = j+\frac{\xi}{2}$; $l_{-\xi} = l_\xi - \xi$;

Собственные решения оператора (2.25) удовлетворяют условиям:

$$\phi^{\zeta}_{æ_\xi V}(k,r) \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2\ \Gamma(|æ|+\frac{1}{2})}\left(\frac{kr}{2}\right)^{|æ|}\begin{bmatrix}1-\xi\\ \eta^{\zeta}(k)\,(1+\xi)\end{bmatrix};\ \text{при } r \Rightarrow 0; \tag{П.I.62}$$

$$F^{\zeta}_{æ_\xi}(\rho,r) \Rightarrow e^{-\rho r}\begin{bmatrix}1\\ i\eta^{\zeta}(i\rho)\end{bmatrix};\quad \text{при } r \Rightarrow \infty; \tag{П.I.63}$$

и обладают свойствами /49-51/:

$$\left[\overset{\mathrm{T}}{F}{}^{\zeta}_{æ}(e^{-i\pi}\rho,r)\ (i\sigma_2)\ F^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\right] = 2i\eta^{\zeta}(i\rho);$$

$$\left[\overset{\mathrm{T}}{F}{}^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\ (i\sigma_2)\ F^{\zeta}_{æ}(\rho,r)\right] = 0; \tag{П.I.64}$$

$$\int_r^\infty dy \left[\overset{\text{т}}{F}{}^\zeta_{æ}(\rho,y)\, F^{\zeta''}_{æ}(u,y)\right] = \frac{\left[\overset{\text{т}}{F}{}^\zeta_{æ}(\rho,r)\ (i\sigma_2)\ F^{\zeta''}_{æ}(u,r)\right]}{\left[w^{\zeta''}(iu) - w^\zeta(i\rho)\right]}; \tag{П.I.65}$$

$$F^\zeta_{æ}(e^{i\pi}\rho,r) = F^\zeta_{æ}(e^{-i\pi}\rho,r) - 2i\,\sin(\pi æ)\, F^\zeta_{æ}(\rho,r); \tag{П.I.66}$$

откуда, для регулярной в точке $b=0$ матрицы, при $b=-ik$ равной:

$$B^\zeta_{æ}(b;r,y) = B^\zeta_{æ}(\pm ik;r,y) = \frac{1}{2i\eta^\zeta(k)}\left[F^\zeta_{æ}(ik,r)\ \overset{\text{т}}{F}{}^\zeta_{æ}(-ik,y) - [\,k\rightleftharpoons -k]\right], \tag{П.I.67}$$

вытекают равенства:

$$\int_r^\infty dy\ B^\zeta_{æ}(b;r,y)\ F^{\zeta''}_{æ}(u,y) = \frac{F^{\zeta''}_{æ}(u,r)}{\left[w^\zeta(ib) - w^{\zeta''}(iu)\right]}; \tag{П.I.68}$$

$$B^\zeta_{æ}(b;r,y) = -\overset{\text{т}}{B}{}^\zeta_{æ}(b;y,r); \tag{П.I.69а}$$

$$B^\zeta_{æ}(b;r,r) = (i\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \tag{П.I.69б}$$

где (т) означает операцию транспонирования. Формулы (П.I.62)-(П.I.69) справедливы, разумеется, и для свободных решений, $V=0$, $F^\zeta_{æ}(\rho,r) \Rightarrow X^\zeta_{æ}(\rho,r)$ и выводятся непосредственно из уравнений (2.24), (2.25) при $\rho=b$, и граничного условия (П.I.63).

Матрица (П.I.67) определяет вольтерровскую часть функции Грина оператора (2.25). Последняя при $V=0$ имеет вид /13,49/:

$$\langle r|G_{æ_\xi O}(W^\zeta(ib))|y\rangle \equiv G^\zeta_{æ_\xi O}(b;r,y) = \overset{\text{т}}{G}{}^\zeta_{æ_\xi O}(b;y,r) = -\frac{(-i)^{l_\xi}}{\eta^\zeta(ib)}\ \cdot$$

$$\cdot\left[\theta(y-r)\ \phi^\zeta_{æ_\xi O}(ib,r)\ \overset{\text{т}}{X}{}^\zeta_{æ_\xi}(b,y) + \theta(r-y)\ X^\zeta_{æ_\xi}(b,r)\ \overset{\text{т}}{\phi}{}^\zeta_{æ_\xi O}(ib,y)\right] =$$

$$= \theta(y-r)\ B^\zeta_{æ_\xi O}(b;r,y) - \frac{(-i)^{l_\xi}}{\eta^\zeta(ib)}\ X^\zeta_{æ_\xi}(b,r)\ \overset{\text{т}}{\phi}{}^\zeta_{æ_\xi O}(ib,y) = \tag{П.I.70}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds^2 \sum_{\zeta'=\pm1} g^{\zeta}(-is;b)^\zeta\ \left[\eta^{\zeta}(s)\right]^{-1}\ \phi^{\zeta'}_{æ_\xi O}(s,r) \otimes \overset{\text{т}}{\phi}{}^{\zeta'}_{æ_\xi O}(s,y),$$

где использовано определение (2.43). Условия полноты и ортогональности для спиноров (П.I.6Iа) таковы /49/ :

$$\int_0^\infty ds^2 \sum_{\zeta'=\pm1}\left[2w^{\zeta'}(s)\ \eta^{\zeta'}(s)\right]^{-1}\ \phi^{\zeta'}_{æ_\xi O}(s,r) \otimes \overset{\text{т}}{\phi}{}^{\zeta'}_{æ_\xi O}(s,y) = I\ \delta(r-y);$$

$$\int_0^\infty dr\ \left[\overset{\text{т}}{\phi}{}^{\zeta'}_{æ_\xi O}(s,r)\ \phi^{\zeta''}_{æ_\xi O}(k,r)\right] = \frac{\pi}{s}\ w^\zeta(s)\ \eta^\zeta(s)\ \delta(s-k)\ \delta_{\zeta\zeta''}; \tag{П.I.7I}$$

Наконец, выражение для интеграла с обоими типами спиноров:

$$\frac{1}{\eta^{\zeta''}(k)}\int\limits_0^\infty dr\left[\overset{T}{\chi}{}^{\zeta}_{\varkappa_\xi}(\rho,r)\ \phi^{\zeta''}_{\varkappa_\xi 0}(k,r)\right]=\left[\frac{w^{\zeta''}(k)+m}{w^{\zeta}(i\rho)+m}\right]^{\frac{1-\xi}{2}}\frac{1}{\left[w^{\zeta''}(k)-w^{\zeta}(i\rho)\right]}\left[\frac{k}{\rho}\right]^{l_\xi}, \tag{П.I.72}$$

непосредственно вытекает из известного равенства для функций Бесселя и Макдональда /94,ф.6.52I.(2)/:

$$\int\limits_0^\infty dr\ \chi_l(\rho r)\ \phi_{l0}(kr)=\left[\frac{k}{\rho}\right]^l\frac{k}{(k^2+\rho^2)}; \tag{П.I.73}$$

Начиная с (П.I.60) приняты следующие обозначения цилиндрических функций:

$$\chi_l(\beta r)=\left[\frac{2}{\pi}\beta r\right]^{1/2}K_{l+\frac{1}{2}}(\beta r)=W_{0,\,l+\frac{1}{2}}(2\beta r);$$

$$\chi_l(\mp ikr)=(\pm i)^{l+1}\left[\frac{\pi}{2}kr\right]^{1/2}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}{}^{(2)}(kr)\ ; \tag{П.I.74}$$

$$\phi_{l0}(kr)=\left[\frac{\pi}{2}kr\right]^{1/2}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)=\frac{1}{2i}\left[(-i)^l\chi_l(-ikr)-i^l\chi_l(ikr)\right];$$

где K_λ, $W_{\tau,\lambda}$, $H^{(1),(2)}_\lambda$, J_λ,- соответственно функции Макдональда, Уиттекера, Ханкеля и Бесселя /12,64,92,94/. Используются следующие свойства этих функций при любых l:

$$\chi_l(z)=\chi_{-l-1}(z); \tag{П.I.75}$$

$$\chi_{l\pm1}(z)=\left[\frac{1}{2}\pm(l+\frac{1}{2})\right]\frac{1}{z}\chi_l(z)-\frac{d}{dz}\chi_l(z); \tag{П.I.76а}$$

$$\left[\chi_l(\rho r)\ \overleftrightarrow{\partial}_r\ \chi_l(-\rho r)\right]=2\rho;\quad \overleftrightarrow{\partial}_r=\overrightarrow{\partial}_r-\overleftarrow{\partial}_r\ ; \tag{П.I.76б}$$

$$\chi_l(z)\ \chi_{l\pm1}(-z)+\chi_l(-z)\ \chi_{l\pm1}(z)=2; \tag{П.I.76в}$$

$$\chi_l(\rho r)\ \partial_r\ \chi_{l-1}(-\rho r)-\chi_l(-\rho r)\ \partial_r\ \chi_{l-1}(\rho r)=\frac{2l}{r}\ ; \tag{П.I.76г}$$

$$\int\limits_r^\infty dy\ \chi_l(uy)\ \chi_l(\rho y)=\frac{\left[\chi_l(ur)\ \overleftrightarrow{\partial}_r\ \chi_l(\rho r)\right]}{(u^2-\rho^2)};\quad Re(u+\rho)>0. \tag{П.I.76д}$$

С их помощью можно проверить равенства (П.I.64)-(I.I.7I) для свободных решений (П.I.60)-(П.I.6I). Формулы дифференцирования /I2,92,94/ для $l\equiv m+\lambda$, где m-целое, λ-любое, имеют вид:

$$\chi_l(\beta r)=\frac{r^{l+1}}{\beta^m}\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right]^m\left[\frac{1}{r^{\lambda+1}}\chi_\lambda(\beta r)\right]; \tag{П.I.77а}$$

$$\psi_{l0}(kr) = \frac{r^{l+1}}{k^m}\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right]^m\left[\frac{1}{r^{\lambda+1}}\,\psi_{\lambda 0}(kr)\right]; \qquad (\text{П.I.77б})$$

При целых l /I2,ф.7.2(40)/:

$$\chi_l(\beta r) = \sum_{к=0}^{l}\frac{(l+к)!\;e^{-\beta r}}{(l-к)!к!\;(2\beta r)^к}\;;\quad \chi_0(\beta r) = e^{-\beta r}; \qquad (\text{П.I.78})$$

Интегральное представление /12,Ф.7.12(19)/ при $Re\ a<0$:

$$\left[\frac{r}{2\nu}\right]^a \chi_{-a}(\nu r) = \int_{\nu^2}^{\infty} d\mu^2\,\frac{e^{-\mu r}}{(\mu^2-\nu^2)^{a+1}\;\Gamma(-a)}\;; \qquad (\text{П.I.79})$$

где $\nu>0$, $Re\ r>0$, с учетом (П.I.77а) обобщается в виде:

$$\left[\frac{r}{2\nu}\right]^a \chi_{-a}(\nu r) = \left[-\frac{d}{d\nu^2}\right]^n\int_{\nu^2}^{\infty} d\gamma^2\,\frac{(\gamma^2-\nu^2)^{c-a+n-1}}{\Gamma(c-a+n)}\left[\frac{r}{2\gamma}\right]^c \chi_{-c}(\gamma r); \qquad (\text{П.I.80а})$$

где: $n \geqslant max\,[0,\ Re(a-c)]$ (сравни с (П.I.II)).

Наибольшую область аналитичности дает представление этой функции из /12,ф.7.3.(17)/ для $\vartheta-\pi \leqslant arg\ z \leqslant \pi+\vartheta$; $|\vartheta|<\frac{\pi}{2}$:

$$\Gamma(l+1)\;e^z\;\chi_l(z) = \int_0^{\infty\cdot e^{i\vartheta}} dv\;e^{-v}\;v^l\left[1+\frac{v}{2z}\right]^l; \qquad (\text{П.I.80б})$$

Простое обращение преобразования Ханкеля (П.I.73) возможно только при $-\frac{3}{2}< Re\ l <1$, /12,ф.7.14.(58)/, /94,ф.6.565(4)/:

$$\chi_l(\beta r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dk\left[\frac{k}{\beta}\right]^l\frac{k\;\psi_{l0}(kr)}{(k^2+\beta^2)}\,. \qquad (\text{П.I.8I})$$

При $Re\ l >1$ такое преобразование допускает лишь $r^{2l+1}\;\chi_l(\beta r)$ (см. цитированные формулы). Однако при целых l можно, пользуясь (П.I.78), придать этому интегралу смысл в пространстве обобщенных функций /37/:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dk\left[\frac{k}{\beta}\right]^l\frac{k\;\psi_{l0}(kr)}{(k^2+\beta^2)} = \chi_l(\beta r) + \Xi_l(\beta,r); \qquad (\text{П.I.82})$$

$$\Xi_l(\beta,r) = 2\sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}\frac{\delta^{(l-1-2n)}(r)}{(l-1-2n)!\;(-\beta)^{l-2n}}\sum_{к=0}^{l-1-2n}\frac{(l+к)!\;(l-1-2n-к)!}{(l-к)!\;к!\;2^к}.$$

При интегрировании по r с функциями, исчезающими при $r\to 0$, как $r^{l+1}\cdot r^{\varepsilon-2} = r^{l-1+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, вклад дефекта Ξ_l этой формулы обращения равен нулю.

Необходима также следующая формула преобразования Ханкеля при $Re\ l > -1$ из /94,ф.6.612(3)/: ($Z(qp|\nu)$ дано в (П.4.14))

$$\int_0^\infty dr\ \psi_{l0}(pr)\ \frac{e^{-\nu r}}{r}\psi_{l0}(qr) = \frac{1}{2}\ Q_l\Big[Z(qp|\nu)\Big]; \qquad (\text{П.I.83а})$$

и ее обобщение при $Re\ j > -\frac{3}{2}$; $Re\ (j+a) > -1$ из /96,ф.8.13(12)/:

$$\int_0^\infty dr\ \psi_{j0}(pr)\ \frac{1}{r}\Big[\frac{r}{2\nu}\Big]^a \chi_{-a}(\nu r)\ \psi_{j0}(qr) = \frac{1}{2}\ \frac{Q^a_l\Big[Z(qp|\nu)\Big]e^{-i\pi a}}{\Big[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\Big]^{a/2}}. \qquad (\text{П.I.83б})$$

А также пара интегралов, которую можно найти в /94,ф.7.143(1) и ф.7.143(2)/, или /95,ф.4.13(1),(2)/, или /96,ф.18.1.(11),(12)/

$$r\int_u^\infty d\beta\ e^{-\beta r}\ (\beta^2-u^2)^{-\frac{a}{2}}\ P^a_l\Big[\frac{\beta}{u}\Big] = r^a\ \chi_l(ur); \qquad (\text{П.I.84})$$

$$r\int_u^\infty d\beta\ e^{-\beta r}\ \Big[\frac{\beta+u}{\beta-u}\Big]^{a/2}\ P^a_l\Big[\frac{\beta}{u}\Big] = W_{a,\,l+\frac{1}{2}}(2ur); \qquad (\text{П.I.85})$$

Функция Лежандра 1-ого рода допускает следующие представления: через гипергеометрическую функцию /64,ф.3.2(28)/,

$$P^{-a}_l(z) = \frac{\Big[z+\sqrt{z^2-1}\ \Big]^l}{4^a\ \Gamma(a+1)}\ \Big[U(z)\Big]^a\ {}_2F_1\Big[a-l,\tfrac{1}{2}+a;2a+1;U(z)\Big]; \qquad (\text{П.I.86а})$$

где: $U(z) = 2\sqrt{z^2-1}\ \Big[z-\sqrt{z^2-1}\ \Big]$; и интегральные представления: /11,ф.VI.3.5(3)/, /64,ф.3.7(6)/ для z вне интервала $[-1,1)$:

$$P_l(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\ \Big[z + \cos\varphi\ \sqrt{z^2-1}\ \Big]^l = P_{-l-1}(z);\ l\text{-любое}; \qquad (\text{П.I.86б})$$

/64,ф.3.7(11)/ для $-1 < Re\ l < 0$ и z вне интервала $(-\infty,-1]$:

$$P_l(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\pi l)\int_0^\infty d\tau\ \frac{ch\Big[(l+\frac{1}{2})\tau\Big]}{\sqrt{ch\ \tau + z}}\ ; \qquad (\text{П.I.86в})$$

а при целых l из сравнения /12,ф.10.8(16)/ и /64,ф.3.2(3)/ вытекает, что для z вне интервала $[-1,1]$:

$$P^a_l(z) = \frac{l!}{\Gamma(l+1-a)}\ \Big[\frac{z+1}{z-1}\Big]^{a/2}\ P^{(-a,\,a)}_l(z), \qquad (\text{П.I.86г})$$

где полином Якоби обладает свойством /12,ф.10.8(13)/:

$$P_l^{(\alpha,\beta)}(-z) = (-1)^l P_l^{(\beta,\alpha)}(z). \qquad \text{(П.I.86д)}$$

В недавних работах /65,66/ получены следующие теоремы сложения для трех функций Лежандра 1-ого и 2-ого рода:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, P_l(z)\, Q_l^{i\gamma}(x)\, Q_l^{-i\gamma}(y) = -\frac{\pi \sin\left[\gamma \ln(\mathrm{h}(x,y,z))\right]}{sh(\pi\gamma)\left[W(x,y,z)\right]^{1/2}};$$

$$\mathrm{h}(x,y,z) = \left[\frac{xy-z-\left[W(x,y,z)\right]^{1/2}}{xy-z+\left[W(x,y,z)\right]^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \qquad \text{(П.I.87)}$$

$$= \frac{\left[Z_+(x,y)-z\right]^{1/2} - \left[Z_-(x,y)-z\right]^{1/2}}{\left[Z_+(x,y)-z\right]^{1/2} + \left[Z_-(x,y)-z\right]^{1/2}}.$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, P_l(z)\, P_l^{-a}(x)\, Q_l^{a}(y) = -\frac{e^{i\pi a}\left[\mathrm{h}(x,y,z)\right]^{a}}{\left[W(x,y,z)\right]^{1/2}}. \qquad \text{(П.I.88)}$$

Первая позволяет найти интеграл, определяющий парциальный м.э. "квазипотенциала Юкавы" в импульсном представлении (сравни с (П.I.83а)):

$$\int_0^{\infty} dr\, ch(vr)\, Q_l^{-ir}(cth\,\eta)\, Q_l^{ir}(cth\,\chi) = \frac{1}{2} Q_l\left[\frac{ch\,\eta\, ch\,\chi + \cos v}{sh\,\eta\, sh\,\chi}\right], \qquad \text{(П.I.89)}$$

а вторая,- получить представление для интеграла (4.67):

$$\Gamma_l^{(-)}(\chi,\eta) = \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{\pi r}\, P_l^{-ir}(cth(\eta-i0))\, Q_l^{ir}(cth\,\chi);$$

$$\Gamma_l^{(\mp)}(\chi,\eta) = -\frac{1}{2}\int_{\eta-\chi\mp i0}^{\eta+\chi\mp i0} \frac{dv}{v^2}\, P_l\left[\frac{ch\,\chi\, ch\,\eta - ch\,v}{sh\,\chi\, sh(\eta\mp i0)}\right]. \qquad \text{(П.I.90)}$$

Формулы интегрирования функций Лежандра по индексу применяются в следующем приложении в виде /22,ф.(В-1.10),ф.(В-1.11)/:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \lambda\, d\lambda\, tg(\pi\lambda)\, P_{\lambda-\frac{1}{2}}(X)\, P_{\lambda-\frac{1}{2}}(Y) = -2i\,\delta(X-Y); \qquad \text{(П.I.91)}$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \lambda\, d\lambda\, P_{\lambda-\frac{1}{2}}(X)\, Q_{\pm\lambda-\frac{1}{2}}(Y) = \pm\, i\pi\,\delta(X-Y); \qquad \text{(П.I.92)}$$

В параграфе 4.2 использовано соотношение между функциями

Лежандра 1-ого и 2-ого рода: /64,ф.3.3(4)/,

$$\frac{e^{-i\pi a}\, 2\sin(\pi a)}{\pi\, \Gamma(l+1+a)}\, Q_l^a(z) = \frac{P_l^a(z)}{\Gamma(l+1+a)} - \frac{P_l^{-a}(z)}{\Gamma(l+1-a)}\ ; \qquad (\text{П.I.93})$$

и следствие формулы /64,ф.3.3(10)/ при $Z = \frac{x^2+1}{2x}$, для $-x=e^{\pm i\pi}x$:

$$x^l\, P_l^a(Z) - (-x)^l\, P_l^a(-Z) = \frac{2}{\pi}\, e^{-i\pi a}\, \sin(\pi(l+a))\, (-x)^l\, Q_l^a(Z), \qquad (\text{П.I.94})$$

справедливое при $|x|>1$ для любых l, а при целых l, – для любых $|x|\neq 1$.

В той же главе при вычислении Лэмбовского сдвига нужен интеграл /12,ф.7.7.3(16)/, /95,ф.4.16(14)/ :

$$\int\limits_0^\infty ds\, \frac{e^{-sR}}{s}\, I_{2l+1}(sv) = \frac{1}{(2l+1)} \left[\frac{R}{v} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{v}\right)^2 - 1}\,\right]^{\pm(2l+1)}. \qquad (\text{П.I.95})$$

Приложение 2

Цель этого приложения: получить аналог интегрального представления (П.I.40) для произвольной размерности $N\geqslant 2$ и вывести некоторые его следствия.

Пусть единичный вектор в R_N $\vec{n} = (n_1,\cdots,n_N)$ имеет сферические координаты:

$$n_k = \cos\vartheta_k \prod_{j=1}^{k-1} \sin\vartheta_j\ ,\ 1\leqslant k\leqslant N-1;\quad n_N = \prod_{j=1}^{N-1}\sin\vartheta_j;$$

$$0\leqslant\vartheta_j\leqslant\pi\ ,\ 1\leqslant j\leqslant N-2\ ;\quad 0\leqslant\vartheta_{N-1}=\varphi\leqslant 2\pi\ . \qquad (\text{П.2.I})$$

Элемент поверхности единичной сферы в R_N :

$$d\Omega_N(\vec{n}) = \prod_{j=1}^{N-1}(\sin\vartheta_j)^{N-1-j}\, d\vartheta_j = (\sin\vartheta_1)^{N-2}\, d\vartheta_1 d\Omega_{N-1}(\vec{n}). \qquad (\text{П.2.2})$$

Выразим сначала искомый интеграл $I^{(N)}$ через $I^{(3)}$.

$$I^{(N)}(X,Y;(\vec{\varkappa}\circ\vec{v})) \equiv \int d\Omega_N(\vec{n})\, \left\{\left[X-(\vec{\varkappa}\circ\vec{n})\right]\left[Y-(\vec{n}\circ\vec{v})\right]\right\}^{-1} =$$

$$= \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^\pi d\vartheta_1\, (\sin\vartheta_1)^{N-2} \left[X\xi+Y-(\vec{n}\circ(\vec{\varkappa}\xi+\vec{v}))\right]^{-2} \int d\Omega_{N-1}(\vec{n}) \equiv$$

$$\equiv \Omega_{N-1} \int\limits_0^\infty d\xi\, J^{(N)}(\xi). \qquad (\text{П.2.3})$$

Полагая $(\vec{\ae}\circ\vec{v}) = c$; $\cos\vartheta_1 = \tau$; $(\vec{n}\circ(\vec{\ae}\xi+\vec{v})) = \cos\vartheta_1 |\vec{\ae}\xi+\vec{v}| = \tau\sqrt{1+\xi^2+2\xi c}$; $a_N = \frac{3-N}{2}$; $N>3$; приведем $\mathcal{J}^{(N)}(\xi)$ к виду:

$$\mathcal{J}^{(N)}(\xi) = \int_{-1}^{1} d\tau\,(1-\tau^2)^{-a_N}\left[(X\xi+Y) - \tau\sqrt{1+\xi^2+2\xi c}\,\right]^{-2} \equiv$$

$$\equiv 2\int_0^1 d\tau\,(1-\tau^2)^{-a_N}\left(1+\tau\frac{d}{d\tau}\right)\left[(X\xi+Y)^2 - \tau^2(1+\xi^2+2\xi c)\right]^{-1}.$$

При $N>3$ проинтегрированное по частям слагаемое исчезает:

$$\mathcal{J}^{(N)}(\xi) = 2(N-3)\int_0^1 d\tau\,\tau^2\,(1-\tau^2)^{-a_N-1}\left[(X\xi+Y)^2 - \tau^2(1+\xi^2+2\xi c)\right]^{-1},$$

что дает:

$$\mathrm{I}^{(N)}(X,Y;c) = \frac{(N-3)\,\Omega_{N-1}}{2\pi}\int_0^1 d\tau\,(1-\tau^2)^{-a_N-1}\,\mathrm{I}^{(3)}\left[\frac{X}{\tau},\frac{Y}{\tau};c\right].$$

Подставляя сюда равенство (П.I.40) и меняя порядок интегралов:

$$\int_0^1 d\tau^2 \int_{Z_+\left[\frac{X}{\tau},\frac{Y}{\tau}\right]}^{\infty} dZ = \int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ \int_{\tau_1^2(Z)}^{1} d\tau^2 \Rightarrow \int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ \int_0^1 d\eta,$$

где при замене $\tau^2 = \tau_\eta^2(Z)$: $\tau^2\,W\left[\frac{X}{\tau},\frac{Y}{\tau},Z\right] \equiv W(X,Y,Z)+(Z^2-1)(\tau^2-1) = W(X,Y,Z)(1-\eta)$, и вычисляя интеграл по η получим представление:

$$\mathrm{I}^{(N)}(X,Y;c) = (N-2)\,\Omega_N \int_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\,\frac{\left[W(X,Y,Z)\right]^{-\frac{1}{2}-a_N}(Z^2-1)^{a_N}}{(Z-c)}; \qquad (\text{П}.2.4)$$

где, как и прежде в (П.I.I4):

$$W(X,Y,Z) = (Z-XY)^2 - (X^2-1)(Y^2-1) = (Z-Z_+(X,Y))(Z-Z_-(X,Y));$$

$$Z_\pm(X,Y) = XY \pm \sqrt{(X^2-1)(Y^2-1)}\,. \qquad (\text{П}.2.5)$$

Неопределенность при $N=2$ раскрывается дельта-функцией /37/ и дает правильный ответ, проверяемый непосредственно.

Привлекая формулу (П.I.5) и теорему сложения (П.I.8), из полученного равенства (П.2.4) можно извлечь обобщение формулы умножения (П.I.25) для функций Лежандра 2-ого рода:

$$\frac{Q_j^a(X)\ e^{-i\pi a}}{(X^2-1)^{a/2}}\ \frac{Q_j^a(Y)\ e^{-i\pi a}}{(Y^2-1)^{a/2}} = \frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_{Z_+(X,Y)}^{\infty} dZ\ \frac{(Z^2-1)^{\frac{a}{2}}\ Q_j^a(Z)\ e^{-i\pi a}}{\left[W(X,Y,Z)\right]^{a+\frac{1}{2}}}\ ; \quad (\text{П.2.6})$$

где $\lambda = \frac{1}{2}-a,\ a=a_N$.

Доказанная здесь для дискретных значений $l=j+a_N=0,1,2,\cdots$, она продолжается аналитически по j, по теореме Карлсона, в область $Re(j+a)>-1$. Подставляя в (П.2.6) равенство (П.I.II) при $c=0$, учитывая (П.I.25), и пользуясь ортогональностью (П.I.92), можно получить соотношение, необходимое для вывода формулы связи (1.8). Для функции $f_a(x,y) = \dfrac{(x-y)_+^{-a-1}}{\Gamma(-a)}$ его можно записать как

$$\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_{Z_+(X,Y)}^{Z} dT\ \frac{(T^2-1)^a\ f_a(Z,T)}{\left[W(X,Y,T)\right]^{a+\frac{1}{2}}} = \int\limits_{X}^{\zeta^-(Z,Y)} d\zeta\ f_a(\zeta,X) \int\limits_{Y}^{\eta^-(Z,\zeta)} d\eta\ \frac{f_a(\eta,Y)}{\left[W(\zeta,\eta,Z)\right]^{1/2}}\ ; \quad (\text{П.2.7})$$

Применяя к этому равенству интегральное преобразование Вейля при $-n < Re\,a \leqslant 0$:

$$\left[\frac{d}{dS}\right]^n \int\limits_{Z_+(X,Y)}^{S} dZ\ f_{-a-n}(S,Z) \otimes \cdots \quad (\text{П.2.8})$$

его можно привести к виду, указанному в работе /97/.

Приложение 3

В этом приложении даны наиболее нетривиальные следствия из формул умножения функций Лежандра, использованные в работе.

Пусть в (П.I.I3) $X=X(\alpha), Y=Y(\alpha)$,- непрерывные однозначные функции α при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, причем $X(\alpha_2)=Y(\alpha_1)=1$, $|arg(X-1)|<\pi$, $|arg(Y-1)|<\pi$,[1] и $H(\alpha)$- произвольная интегрируемая функция. Интегрируя (П.I.I3), можно получть:

[1] При $a=0$ достаточно, чтобы $|arg(X+1)|<\pi$, $|arg(Y+1)|<\pi$.

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \, \frac{P_l^a(X(\alpha))}{(X^2(\alpha)-1)^{a/2}} \, \frac{P_l^a(Y(\alpha))}{(Y^2(\alpha)-1)^{a/2}} \, \mathcal{H}(\alpha) = \frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_{T_1}^{T_2} dT \, (T^2-1)^{\frac{a}{2}} \, P_l^a(T) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{A_-(T)}^{A^+(T)} d\alpha \, \mathcal{H}(\alpha) \left[- W(X(\alpha),Y(\alpha),T)\right]^{-a-\frac{1}{2}} , \qquad (\text{П.3.I})$$

где осуществлена перестановка интегралов:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_{T_-(X(\alpha),Y(\alpha))}^{T^+(X(\alpha),Y(\alpha))} dT = \int\limits_{T_1}^{T_2} dT \int\limits_{A_-(T)}^{A^+(T)} d\alpha . \qquad (\text{П.3.2})$$

Область интегрирования однозначно определяется условием:

$$- W(X(\alpha),Y(\alpha),T) \geqslant 0 . \qquad (\text{П.3.3})$$

Действительно, так же как $T^+_-(X,Y)$ суть соседние нули функции W по T, между которыми она отрицательна, и α_1,α_2– корни уравнения $T^+(X(\alpha),Y(\alpha)) = T_-(X(\alpha),Y(\alpha))$,– так и $A^+_-(T)$– соседние нули функции (П.3.3) по α, между которыми $W \leqslant 0$,и T_1,T_2– корни уравнения $A^+(T) = A_-(T)$. Поскольку для последних $W \infty (\alpha-A)^2$, одним из его корней всегда является $T_1=1$, при котором $W = (X-Y)^2$. Разумеется, при $X,Y \geqslant 1$, имеем:

$$\alpha_1 \leqslant A_-(T) \leqslant A^+(T) \leqslant \alpha_2 \ ;$$

$$1 = T_1 \leqslant T_-(\alpha) \leqslant T^+(\alpha) \leqslant T_2 ; \qquad (\text{П.3.4})$$

Пример области интегрирования в (П.3.2) приведен в следующем приложении. В тексте использованы следующие варианты (П.3.I), в обозначениях (П.4.I),(П.4.3): при $Re\ a < 1$,

$$\int\limits_{\rho+\mu}^{u} d\alpha \, \frac{P_l^a\left[\frac{u}{\alpha}\right] \, P_l^a\left[Y(\alpha\rho|\mu)\right]}{\left[(u^2-\alpha^2)\Delta(\alpha^2,\rho^2,\mu^2)\right]^{a/2}} = \int\limits_{\rho}^{u-\mu} d\gamma \, \frac{P_l^a(\gamma/\rho) \, (\gamma^2-\rho^2)^{-a/2}}{\left[(u-\gamma)^2-\mu^2\right]^a \, \Gamma(1-a)} \ ; \qquad (\text{П.3.5})$$

при $Re\ a > 0$:

$$\int\limits_{\rho}^{v} d\alpha \, \frac{(v^2-\alpha^2)^{\frac{a}{2}}}{(\alpha^2-\rho^2)} \, P_l^{-a}\left[\frac{v}{\alpha}\right] \, P_l^{-a}\left[Y(\alpha\rho|0)\right] = \int\limits_{\rho}^{v} \frac{d\gamma \, (v-\gamma)^{a-1}}{2\rho \, \Gamma(1+a)} \, P_l^{-a}\left[\frac{\gamma}{\rho}\right] \, \left[\frac{\gamma-\rho}{\gamma+\rho}\right]^{a/2} . \qquad (\text{П.3.6})$$

Комбинируя (П.3.5) с представлением (П.I.84), с учетом равенства (П.I.79), можно получить соотношение:

$$\int\limits_{\rho+\nu}^{\infty} du\, \frac{P_l^a\left[T(u\rho|\nu)\right]}{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{a/2}}\, \chi_l(ur) = \frac{1}{r}\left[\frac{r}{2\nu}\right]^a \chi_{-a}(\nu r)\, \chi_l(\rho r). \qquad (П.3.7)$$

При $a=0$ это равенство впервые получено для целых l в /17,22/, а для произвольных l, – в /31/. Аналогичные операции с (П.3.6) и (П.I.85) приводят к новому представлению для кулоновского решения Иоста:

$$W_{-a,\, l+\frac{1}{2}}(2\rho r) = 2a\rho \int\limits_{\rho}^{\infty} du\, \frac{P_l^{-a}\left[T(u\rho|0)\right]}{(u^2-\rho^2)}\, \chi_l(ur). \qquad (П.3.8)$$

В параграфе 2.I. центральную роль играет следующий вариант (П.3.I) при $Re\ a < \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}-a$:

$$\int\limits_{\rho+\mu}^{u-\gamma} d\alpha\, \frac{P_l^a\left[X(u\alpha|\gamma)\right]}{\left[\Delta(u^2,\alpha^2,\gamma^2)\right]^{a/2}}\, \frac{P_l^a\left[Y(\alpha\rho|\mu)\right]}{\left[\Delta(\alpha^2,\rho^2,\mu^2)\right]^{a/2}}\, \mathcal{H}(\alpha) = \int\limits_{\gamma+\mu}^{u-\rho} d\nu\, \frac{P_l^a\left[T(u\rho|\nu)\right]}{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{a/2}}\, \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\nu^2}{\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)}\right]^a \frac{4^a}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int\limits_{-1}^{1} d\eta\, \mathcal{H}(\underline{\alpha}(\eta))\, (1-\eta^2)^{-a-\frac{1}{2}} = \qquad (П.3.9)$$

$$= \int\limits_{\gamma+\mu}^{u-\rho} d\nu\, P_l^a\left[T(u\rho|\nu)\right] \frac{\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{a/2}}{(\nu^2)^a\, \Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)}^{\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)} d\alpha^2\, \mathcal{H}(\alpha)\, \left[(\Lambda^+-\alpha^2)(\alpha^2-\Lambda_-)\right]^{-a-\frac{1}{2}};$$

где использованы обозначения (2.19)),(П.4.I)-(П.4.3).

Ясно, что аналогичные равенства можно получить стартуя с формул умножения (П.I.I8),(П.I.23),(П.I.24) для d-функций (П.I.2I). Причем, форма границы области интегрирования на Рис.I зависит только от вида аргументов $X(\alpha)$,$Y(\alpha)$ и, определяясь только условием (П.3.3), является одинаковой для всех функций 1-ого рода. Для функций Лежандра 2-ого рода и (П.I.22) получить аналогичные соотношения из (П.I.25),(П.I.26) еще проще, т.к. область интегрирования для них фиксируется менеее жестким условием:

$$W(X(k),Y(k),Z) \geqslant 0\ , \qquad (П.3.I0)$$

и в необходимом здесь случае (П.4.I4) имеет более простой вид

Рис.II, а соответствующая формула перестановки совпадает с равенством (П.4.18) /98/, используемым для вычисления скачков уравнений ЛШ в главе I.

Приложение 4

Здесь собраны вместе все определения и свойства используемых кинематических функций. Пусть :

$$\Delta(a,b,c) = a(a-b-c)+[a\rightleftharpoons b]+[a\rightleftharpoons c] = (a+b-c)^2-4ab =$$

$$= [c-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2][c-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2]. \qquad (\text{П.4.1})$$

$$\Lambda^+_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \Lambda^0(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) \pm \frac{1}{2\nu^2}\left[\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)\,\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{1/2}; \qquad (\text{П.4.2})$$

$$2\nu^2\,\Lambda^0(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \nu^2(\mu^2+\gamma^2-\nu^2)+u^2(\nu^2+\mu^2-\gamma^2)+\rho^2(\nu^2-\mu^2+\gamma^2);$$

$$\nu^2\,\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \mu^2x^2+\gamma^2y^2+(\nu^2-\mu^2-\gamma^2)xy; \qquad (\text{П.4.2а})$$

где принято : $x=u^2-\gamma^2$; $y=\rho^2-\mu^2$;

$$X(u\alpha|\gamma) = \frac{u^2+\alpha^2-\gamma^2}{2u\alpha};\quad Y(\alpha\rho|\mu) = \frac{\rho^2+\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\rho};\quad T(u\rho|\nu) = \frac{u^2+\rho^2-\nu^2}{2u\rho};$$

$$H = \frac{\mu^2+\nu^2-\gamma^2}{2\mu\nu};\qquad N = \frac{u^2-\rho^2-\nu^2}{2\nu\rho};\qquad M = \frac{\alpha^2-\rho^2-\mu^2}{2\mu\rho}; \qquad (\text{П.4.3})$$

Тогда: $G(\nu^2,\mu^2,\gamma^2|\alpha^2,u^2,\rho^2) \equiv -\,4u^2\rho^2\alpha^2\;W(X,Y,T) =$ (П.4.4)

$$-\,4\,\rho^2\mu^2\nu^2\;W(H,N,M) = G(\mu^2,\nu^2,\gamma^2|u^2,\alpha^2,\rho^2) = G(\alpha^2,u^2,\gamma^2|\nu^2,\mu^2,\rho^2) =$$

$$= G(\nu^2,u^2,\rho^2|\alpha^2,\mu^2,\gamma^2) = G(\alpha^2,\mu^2,\rho^2|\nu^2,u^2,\gamma^2) = G(\gamma^2,\mu^2,\nu^2|\rho^2,u^2,\alpha^2) =$$

$$\left.\begin{aligned}
&= \nu^2\left[\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) - \alpha^2\right]\left[\alpha^2 - \Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)\right] = \\
&= \alpha^2\left[\Lambda^+(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho) - \nu^2\right]\left[\nu^2 - \Lambda_-(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho)\right] = \\
&= \mu^2\left[\Lambda^+(\mu;\nu,\gamma;\alpha,\rho) - u^2\right]\left[u^2 - \Lambda_-(\mu;\nu,\gamma;\alpha,\rho)\right] = \ldots.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.4.5})$$

и можно продолжить эту цепочку в соответствии с симметриями (П.4.4). Очевидно:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda^+_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = \rho^2+\mu^2+2\mu\rho\;M^+_-(H,N);\\
&\Lambda^+_-(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho) = u^2+\rho^2+2u\rho\;T^+_-(X,Y);
\end{aligned}\right. \qquad (\text{П.4.6})$$

Таким образом, легко видеть, что :

$$(\rho+\mu)^2 \leqslant \Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) \leqslant \alpha^2 \leqslant \Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) \leqslant (u-\gamma)^2;$$
$$(\gamma+\mu)^2 \leqslant \Lambda_-(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho) \leqslant \nu^2 \leqslant \Lambda^+(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho) \leqslant (u-\rho)^2; \qquad (\text{П}.4.7)$$

и эти две пары функций $\Lambda^+_-(\nu;\cdots)$ и $\Lambda^+_-(\alpha;\cdots)$ являются различными параметризациями одной и той же замкнутой кривой на плоскости (α^2,ν^2) Рис.I.

При $0 \leqslant \gamma+\mu \leqslant \nu \leqslant u-\rho \leqslant u+\rho$ их поведение по одной перемен ной при фиксированных других таково:

$\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)$: монотонно убывает по γ^2; монотонно возрастает по u^2; имеет максимум при $\mu_o^2 = \nu^2+\gamma^2-\frac{\gamma}{u}(u^2-\rho^2+\nu^2)$; а также при $\rho_o^2 = u^2+\nu^2-\frac{u}{\gamma}(\nu^2-\mu^2+\gamma^2)$; и при $\nu_1^2 = \left[(u^2-\rho^2)\gamma+(\mu^2-\gamma^2)u\right](u-\gamma)^{-1}$; в которых: $\Lambda^+_{max} = (u-\gamma)^2$.

$\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)$: монотонно возрастает по μ^2 и по ρ^2; имеет минимумы при $\gamma_o^2 = \nu^2+\mu^2-\frac{\mu}{\rho}(u^2-\rho^2-\nu^2)$; при $u_o^2 = \rho^2+\nu^2+\frac{\rho}{\mu}(\nu^2+\mu^2-\gamma^2)$; при $\nu_2^2 = \left[(u^2-\rho^2)\mu-(\mu^2-\gamma^2)\rho\right](\rho+\mu)^{-1}$; в которых $\Lambda_{-\,min} = (\rho+\mu)^2$.

$\Lambda^+(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho)$: имеет максимум при $\alpha_1^2 = \left[(u^2-\gamma^2)\rho+(\mu^2-\rho^2)u\right](u-\rho)^{-1}$; $\Lambda^+_{max} = (u-\rho)^2$.

$\Lambda_-(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho)$: имеет минимум при $\alpha_2^2 = \left[(\rho^2-\mu^2)\gamma+(u^2-\gamma^2)\mu\right](\gamma+\mu)^{-1}$; $\Lambda_{-\,min} = (\gamma+\mu)^2$.

Формула перестановки, отвечающая (П.3.3),(П.4.5) и Рис.I, для произвольной интегрируемой функции $H(\nu,\alpha)$ имеет вид:

$$\int\limits_{(\rho+\mu)^2}^{(u-\gamma)^2} d\alpha^2 \int\limits_{\Lambda_-(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho)}^{\Lambda^+(\alpha;u,\gamma;\mu,\rho)} d\nu^2\, H(\nu,\alpha)\left[\alpha^2(\Lambda^+-\nu^2)(\nu^2-\Lambda_-)\right]^{-a-\frac{1}{2}} =$$
$$= \int\limits_{(\gamma+\mu)^2}^{(u-\rho)^2} d\nu^2 \int\limits_{\Lambda_-(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)}^{\Lambda^+(\nu;\mu,\gamma;u,\rho)} d\alpha^2\, H(\nu,\alpha)\left[\nu^2(\Lambda^+-\alpha^2)(\alpha^2-\Lambda_-)\right]^{-a-\frac{1}{2}}, \qquad (\text{П}.4.8)$$

где $\Lambda^+_-(\cdots\cdots)$ в пределах и подинтегральных функциях совпадают.

При аналитическом продолжении обратном (I.43) :

$\rho = -ip$; $u = -iq$; $\alpha = -ik$; $\left[\Delta(u^2,\rho^2,\nu^2)\right]^{1/2} = e^{-i\pi}\left[\Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\right]^{1/2}$;

$$\Lambda^{+}_{-}(\nu;\mu,\gamma;u,\rho) = e^{-i\pi}\,\omega^{+}_{-}(\nu;\mu,\gamma;q,p); \tag{П.4.9}$$

$$\tau^{+}_{-}(k;q,\gamma;\mu,p) = \Lambda^{-}_{+}(-ik;-iq,\gamma;\mu,-ip).$$

Поскольку:

$$\Delta(q^2,p^2,-\nu^2) = ((q+p)^2+\nu^2)((q-p)^2+\nu^2)\ , \tag{П.4.10}$$

ограничения на $0 \leqslant \nu^2 \leqslant \infty$, исчезают, что соответствует уходу $\Lambda^{+}(\alpha;\cdots)$ на Рис.I. в бесконечность, т.е. превращению его в Рис.II, на котором:

$$\omega^{+}_{-}(\nu;\mu,\gamma;q,p) = \omega^{0}(\nu;\mu,\gamma;q,p) \pm \frac{1}{2\nu^2}\left[\Delta(\nu^2,\mu^2,\gamma^2)\ \Delta(q^2,p^2,-\nu^2)\right]^{1/2}; \tag{П.4.11}$$

$$2\nu^2\ \omega^{0}(\nu;\mu,\gamma;q,p) = \nu^2(q^2+p^2+\nu^2)+\mu^2(q^2-p^2-\nu^2)+\gamma^2(p^2-q^2-\nu^2);$$

$$\tau^{+}_{-}(k;q,\gamma;\mu,p) = \tau_{0}(k;q,\gamma;\mu,p) \pm \frac{1}{2k^2}\left[\Delta(q^2,k^2,-\gamma^2)\ \Delta(p^2,k^2,-\mu^2)\right]^{1/2}; \tag{П.4.12}$$

$$2k^2\ \tau_{0}(k;q,\gamma;\mu,p) = k^2(k^2-q^2-p^2+\mu^2+\gamma^2)+(q^2+\gamma^2)(p^2+\mu^2);$$

$$\nu^2\ \omega^{+}(\nu;\mu,\gamma;q,p)\ \omega_{-}(\nu;\mu,\gamma;q,p) = x^2\mu^2+\ y^2\gamma^2+\ xy\ (\nu^2-\mu^2-\gamma^2); \tag{П.4.13}$$

$$x=q^2+\gamma^2;\quad y=p^2+\mu^2.$$

$$X(u\alpha|\gamma) \Rightarrow X(qp|\gamma) = \frac{q^2+k^2+\gamma^2}{2qk};\ Y(\alpha p|\mu) \Rightarrow Y(kp|\mu) = \frac{p^2+k^2+\mu^2}{2kp};$$

$$T(u\varphi|\nu) \Rightarrow Z(qp|\nu) = \frac{q^2+p^2+\nu^2}{2qp}; \tag{П.4.14}$$

и цепочку (П.4.4),(П.4.5) можно продолжить равенствами:

$$\begin{aligned}
&= G(\nu^2,\mu^2,\gamma^2|-k^2,-q^2,-p^2) = 4q^2p^2k^2\ W(X,Y,Z) = \\
&= \nu^2\left[\omega^{+}(\nu;\mu,\gamma;q,p) - k^2\right]\left[k^2 - \omega_{-}(\nu;\mu,\gamma;q,p)\right] = \\
&= k^2\left[\nu^2 - \tau^{+}(k;q,\gamma;\mu,p)\right]\left[\nu^2 - \tau_{-}(k;q,\gamma;\mu,p)\right] = \\
&= \mu^2\left[\omega^{+}(\mu;\nu,\gamma;k,p) - q^2\right]\left[q^2 - \omega_{-}(\mu;\nu,\gamma;k,p)\right] = \\
&= q^2\left[\tau^{+}(q;k,\gamma;\nu,p) - \mu^2\right]\left[\tau_{-}(q;k,\gamma;\nu,p) - \mu^2\right] = \\
&= \gamma^2\left[\omega^{+}(\gamma;\nu,\mu;k,q) - p^2\right]\left[p^2 - \omega_{-}(\gamma;\nu,\mu;k,q)\right] = \\
&= p^2\left[\tau^{+}(p;k,\mu;\nu,q) - \gamma^2\right]\left[\tau_{-}(p;k,\mu;\nu,q) - \gamma^2\right].
\end{aligned} \tag{П.4.15}$$

При $q^2>0,\ p^2>0;\ 0 \leqslant \gamma+\mu \leqslant \nu < \infty$ поведение этих функций по одной из переменных при фиксированных других таково:

$\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)$: монотонно убывает по μ^2 и γ^2; монотонно возрастает по q^2, p^2, ν^2.

$\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)$: монотонно возрастает по $\mu^2, \gamma^2, q^2, p^2$; монотонно убывает по ν^2.

$\tau^+(k;q,\gamma;\mu,p)$: имеет минимум при $k_2^2 = \left[(p^2+\mu^2)\gamma+(q^2+\gamma^2)\mu\right](\gamma+\mu)^{-1}$; $\tau^+_{min} = (\gamma+\mu)^2$.

$$\text{При } \nu^2 \Rightarrow \infty:\ \omega^+_-(\nu;\mu,\gamma;q,p) \Rightarrow \begin{cases} \nu^2-\mu^2-\gamma^2+q^2+p^2+O(\nu^{-2}); \\ (p^2+\mu^2)(q^2+\gamma^2)\nu^{-2}; \end{cases} \tag{П.4.I6}$$

Таким образом, граница области интегрирования Рис.II на плоскости (k^2,ν^2) параметризуется либо $\omega^+_-(\nu;\cdots)$, либо $\tau^+(k;\cdots)$. Ее более простая форма дает больше взможностей для перестановок интегралов, необходимых при выводе равенств (1.6), (1.34), (1.42), (1.8): для произвольного $\lambda > \gamma+\mu$,

$$\int\limits_{\omega_-(\lambda;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\lambda;\mu,\gamma;q,p)} dk^2 \int\limits_{\tau_+(k;q,\gamma;\mu,p)}^{\lambda^2} d\nu^2\,(\cdots) = \int\limits_{(\gamma+\mu)^2}^{\lambda^2} d\nu^2 \int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2\,(\cdots) \tag{П.4.I7}$$

в частности, при $\lambda = \infty$:

$$\int\limits_0^\infty dk^2 \int\limits_{\tau_+(k;q,\gamma;\mu,p)}^{\infty} d\nu^2\,(\cdots) = \int\limits_{(\gamma+\mu)^2}^{\infty} d\nu^2 \int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2\,(\cdots) \tag{П.4.I8}$$

Трехкратный интеграл в (1.6), (1.34), (1.42), с учетом (П.4.I5), допускает следующие перестановки при $q^2>0,\ p^2>0,\ 0 \leqslant \gamma+\mu \leqslant \nu < \infty$:

$$\int\limits_0^{\nu^2} d\mu^2 \int\limits_0^{(\nu-\mu)^2} d\gamma^2 \int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,\gamma;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,\gamma;q,p)} dk^2\,(\cdots) = \int\limits_0^{\nu^2} d\mu^2 \int\limits_{\omega_-(\nu;\mu,0;q,p)}^{\omega^+(\nu;\mu,0;q,p)} dk^2 \int\limits_0^{\tau^-(p;k,\mu;\nu,q)} d\gamma^2\,(\cdots) =$$

$$= \int\limits_{\omega_-(\nu;0,0;q,p)}^{\omega^+(\nu;0,0;q,p)} dk^2 \int\limits_0^{\tau^-(q;k,0;\nu,p)} d\mu^2 \int\limits_0^{\tau^-(p;k,\mu;\nu,q)} d\gamma^2\,(\cdots) = \begin{Bmatrix} \mu \rightleftharpoons \gamma \\ q \rightleftharpoons p \end{Bmatrix}. \tag{П.4.I9}$$

При комплексных $q^2 = u^2 e^{i\varphi}$, $p^2 = \rho^2 e^{i\Phi}$, из (П.4.II) явствует, что условие: $Im\ \omega^+_- \geqslant 0$, при $Im\ q^2 \geqslant 0$, $Im\ p^2 \geqslant 0$, достаточно проверить для $\gamma = \mu = 0$, т.к., в силу (П.4.I), при $0 \leqslant \gamma+\mu \leqslant \nu$:

$$0 \leqslant \left[\Delta(\nu^2;\mu^2;\gamma^2)\right]^{1/2} \leqslant \nu^2-\mu^2-\gamma^2 \leqslant \nu^2 \pm (\mu^2-\gamma^2). \tag{П.4.20}$$

В этом случае: $Z_\nu \equiv Z(qp|\nu)$,

$$\omega^+_-(\nu;0,0;q,p) = qp\left[Z_\nu \pm \sqrt{Z_\nu^2-1}\right] = e^{i\vartheta}\, up\left[Z_\nu + \sqrt{Z_\nu^2-1}\right]^{\pm 1} =$$

$$= e^{i\vartheta\mp i\alpha}\, up\, R^{\pm 1}; \qquad (\text{П.4.21})$$

где: $\vartheta = \frac{1}{2}(\varphi+\phi)$; $\beta = \frac{1}{2}(\varphi-\phi)$; $\alpha = arg\left[Z_\nu - \sqrt{Z_\nu^2-1}\right]$; откуда:

$$tg|\alpha| = \frac{|Im\, Z_\nu|}{|Re(Z_\nu^2-1)^{1/2}|} = \frac{|y|}{\left[\frac{1}{2}V(x^2,y^2,1-\lambda^2)\right]^{1/2}}; \qquad (\text{П.4.22})$$

где:

$$\left.\begin{aligned} &V(x^2,y^2,h) = \sqrt{\Delta(x^2,-y^2,h)} + x^2 - y^2 - h;\\ &x = cos\,\beta + \zeta\, cos\,\vartheta;\ y = \lambda\, sin\,\beta - \zeta\, sin\,\vartheta;\\ &\zeta = \frac{\nu^2}{u^2+\rho^2};\ \lambda = \frac{u^2-\rho^2}{u^2+\rho^2};\ x+iy = \frac{2up Z_\nu}{u^2+\rho^2}; \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.4.23})$$

и при $x^2>0$, $y^2>0$: $2x^2 \geqslant V(x^2,y^2,h) \geqslant max\,[0,\ 2(x^2-h)]$.

Условие $Im\,\omega^+_- \geqslant 0$, эквивалентно неравенству:

$$tg|\alpha| \leqslant |tg\,\vartheta| = |tg(\pi-\vartheta)|, \qquad (\text{П.4.24})$$

которое с помощью (П.4.22),(П.4.23) можно привести к виду :

$$x^2 - y^2\, ctg^2\vartheta - (1-\lambda^2)\, cos^2\vartheta \geqslant 0\,. \qquad (\text{П.4.25})$$

Поскольку, при $0 \leqslant \varphi,\phi \leqslant \pi$ должно быть:

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad |\beta| \leqslant min\,[\vartheta,\ \pi-\vartheta] \leqslant \frac{\pi}{2};$$

Легко заметить, что (П.4.25) выполняется для всех β в области: $0\leqslant|\beta|\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Например, при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ его левая часть равна $cos^2\beta \geqslant 0$. При $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ (П.4.25) уже не имеет места для всех $|\beta| \leqslant \pi-\vartheta$, однако, при $\beta=0$, т.е. при $\varphi=\phi=\vartheta$, это неравенство упрощается к форме

$$1 - 2\zeta\, cos\,\phi - (1-\lambda^2)\, cos^2\phi > 0; \quad \phi \equiv \pi-\vartheta; \qquad (\text{П.4.26})$$

и выполняется для всех $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, если $2\zeta \leqslant \lambda^2$, или:

$$\nu^2 \leqslant (u-\rho)^2\,\frac{1}{2}\left[1 + 2up(u^2+\rho^2)^{-1}\right] \leqslant (u-\rho)^2. \qquad (\text{П.4.27})$$

Приложение 5

В этом приложении выводится основное соотношение между фредгольмовским ядром уравнения ЛШ и вольтерровским ядром уравнения для ВФИ, в обозначениях (П.4.3),(П.4.I4) имющее вид:

$$\int_{u+\nu}^{\infty} da \frac{P_l^a\left[T(ua|\nu)\right]}{\left[\Delta(u^2,a^2,\nu^2)\right]^{a/2}\left[a^2+k^2\right]}\left[\frac{u}{a}\right]^l = \int_0^{\infty}\frac{ds^2}{2\pi k}\frac{Q_l^a\left[Z(sk|\nu)\right]e^{-i\pi a}}{\left[\Delta(s^2,k^2,-\nu^2)\right]^{a/2}\left[s^2+u^2\right]}\left[\frac{s}{k}\right]^l. \tag{П.5.I}$$

Учитывая формулы (П.I.I0),(П.I.II), его достаточно проверить при $a=0$.

Рассмотрим интеграл, в силу (П.3.7) при $a=0$, (П.I.78) и (П.I.73), равный левой части (П.5.I) для этого случая [z]:

$$\int_{u+\nu}^{\infty} da \frac{P_l\left[T(ua|\nu)\right]}{\left[a^2+k^2\right]}\left[\frac{u}{a}\right]^l = \frac{1}{k}\left[\frac{u}{k}\right]^l \int_0^{\infty} dr\, \phi_{l0}(kr)\,\frac{e^{-\nu r}}{r}\,\chi_l(ur). \tag{П.5.2}$$

Пусть $l=m+\lambda$, где целое число $m\geqslant 0$ и $0\leqslant \mathrm{Re}\,\lambda<1$. При $l=m$ можно подставить сюда выражение (П.I.82) для χ_l и, воспользовавшись равенством (П.I.83а), воспроизвести правую часть (П.5.I) ($a=0$). При $\lambda\neq 0$, можно поступить следующим образом. Заменив нижний предел на $r=\varepsilon>0$ и воспользовавшись формулой (П.I.77а), после m-кратного интегрирования по частям не трудно получить выражение:

$$\frac{u^{l-m}}{k^{l+1}}\,2^{m-1}\int_{\varepsilon^2}^{\infty} dr^2\,\frac{\chi_\lambda(ur)}{r^{\lambda+1}}\left[\frac{d}{dr^2}\right]^m\left[\frac{e^{-\nu r}}{r^2}\,r^{l+1}\,\phi_{l0}(kr)\right] + \Bigg|_{r=\varepsilon}^{r=\infty}.$$

Поскольку $0\leqslant \mathrm{Re}\,\lambda<1$, в него можно подставить интегральное представление (П.I.8I),а условие $r\geqslant\varepsilon>0$ обеспечивает равномерную сходимость, достаточную для обоснования перестановки интегралов. В результате повторного m-кратного интегрирования по частям,с учетом формулы (П.I.77б), это выражение примет вид:

$$\frac{1}{\pi k}\int_0^{\infty}\frac{ds^2}{\left[s^2+u^2\right]}\left[\frac{s}{k}\right]^l\int_{\varepsilon}^{\infty} dr\,\phi_{l0}(kr)\,\frac{e^{-\nu r}}{r}\,\phi_{l0}(sr) + \Bigg\|_{r=\varepsilon}^{r=\infty}.$$

В пределе $\varepsilon\to 0$, пользуясь формулой (П.I.83а), отсюда легко получить правую часть (П.5.I):

---

[z] Другой способ вывода на основе производящих функций для P_l и Q_l приведен в /35/.

$$\int\limits_{u+\nu}^{\infty} d\alpha\, \frac{P_l\left[T(u\alpha|\nu)\right]}{\left[\alpha^2+k^2\right]}\left[\frac{u}{\alpha}\right]^l = \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{\infty} ds^2\, \frac{Q_l\left[Z(sk|\nu)\right]}{\left[s^2+u^2\right]}\left[\frac{s}{k}\right]^l ; \qquad (\text{П.5.3})$$

если в обоих случаях все проинтегрированные по r члены исчезают в этом пределе. Действительно, их суммы равны:

$$2^{m-1}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{e^{-\nu r}}{r^2}\, r^{l+1}\, \psi_{l0}(kr)\right]^{(n-1)}_{(r^2)} \left\{\begin{matrix}\left[\dfrac{\chi_\lambda(ur)}{r^{\lambda+1}}\right]^{(m-n)}_{(r^2)} \\ \left[\dfrac{\psi_{\lambda 0}(sr)}{r^{\lambda+1}}\right]^{(m-n)}_{(r^2)}\end{matrix}\right.\Bigg|_{r=\varepsilon\to 0}^{r=\infty} ; (\text{П.5.4})$$

и имеют порядок $e^{-\nu r}$ и ε^2 или ε^3, на верхнем и нижнем пределах соответственно. Вычисляя при целых l скачек (0.10) от равенства (П.5.3) по $u^2 = -q^2$, можно получить представление из работы /33/:

$$\frac{1}{k}\, Q_l\left[Z(qk|\nu)\right] = -\int\limits_{i\nu-q}^{i\nu+q} dy\, \left[\frac{k}{y}\right]^{l-2m} P_l\left[Z(qy|\nu)\right]\, \frac{1}{(y^2-k^2)},$$

где m- произвольное целое число: $0 \leqslant m \leqslant l$.

В обозначениях раздела 2.I.2. легко проверить следующие формулы суммирования по листам:

$$\sum_{\zeta'=\pm 1} \frac{1}{2}\left[1+\frac{W^\zeta(k)}{w^{\zeta'}(s)}\right]\left[\frac{w^{\zeta'}(s)\pm m}{W^\zeta(k)\pm m}\right]^{\frac{1}{2}(1-\xi)} = 1 ; \qquad (\text{П.5.5})$$

$$\sum_{\zeta'=\pm 1} \frac{1}{2}\left[1+\frac{W^\zeta(k)}{w^{\zeta'}(s)}\right]\left[\frac{w^{\zeta'}(s)\pm m}{W^\zeta(k)\pm m}\right]^{\frac{1}{2}(1-\xi)} \left[\eta^{\zeta'}(s)\right]^{\pm 1} = \left[\frac{k}{s}\right]^{\xi}\left[\eta^{\zeta}(k)\right]^{\pm 1}. \qquad (\text{П.5.6})$$

Привлекая определения (2.48) и (2.36),(2.43) в виде

$$N^{\zeta'}_{\xi}(\alpha,-ik)^{\zeta} = \left[\frac{W^\zeta(k)+m}{w^{\zeta'}(i\alpha)+m}\right]^{\frac{1}{2}(1-\xi)} = \left[\frac{k}{i\alpha}\right]^{1-\xi}\left[\frac{w^{\zeta'}(i\alpha)-m}{W^\zeta(k)-m}\right]^{\frac{1}{2}(1-\xi)} ; (\text{П.5.7а})$$

$$g^{\zeta'}(\alpha;-ik)^{\bar\zeta} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{W^{\bar\zeta}(k)}{w^{\zeta'}(i\alpha)}\right]\left[\alpha^2+k^2\right]^{-1};$$

$$(\text{П.5.7б})$$

$$g^{\zeta'}(-is;\rho)^{\zeta} = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{W^\zeta(i\rho)}{w^{\zeta'}(s)}\right]\left[s^2+\rho^2\right]^{-1};$$

с помощью (П.5.3),(П.5.5),(П.5.6) можно получить следующее обобщение формулы (П.5.3) для Дираковских ядер уравнений ЛШ и ВФИ:

$$\frac{-1}{2\pi}\int\limits_0^\infty ds^2 \left[\frac{s}{k}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(-is;\rho)^{\zeta}\, N_\xi^{\zeta}(\rho,-is)^{\zeta'} \left\{\left[\eta^{\bar\zeta}(k)\right]^{-1} Q_{l_\xi}\left[Z(sk|\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\,\eta^{\zeta'}(s)\, Q_{l_{-\xi}}\left[Z(sk|\nu)\right]\right\} = \tag{П.5.8}$$

$$=\int\limits_{\rho+\nu}^\infty d\alpha \left[\frac{\rho}{\alpha}\right]^{l_\xi} \sum_{\zeta'=\pm 1} g^{\zeta'}(\alpha;-ik)^{\bar\zeta}\, N_\xi^{\zeta'}(\alpha,-ik)^{\bar\zeta}\; i\alpha \left\{\left[\eta^{\zeta'}(i\alpha)\right]^{-1} P_{l_\xi}\left[T(\alpha\rho|\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\,\eta^{\zeta}(i\rho)\, P_{l_{-\xi}}\left[T(\alpha\rho|\nu)\right]\right\}.$$

Приложение 6

Проследить соответствие между развитыми здесь попутно обобщениями метода де Альфаро, Редже /17,22/, и off-shell вариантом метода Мартена /17/ можно путем перестройки и сравнения соответствующих итерационных рядов для ВРИ. При этом, помимо интегральных формул с функциями Лежандра, приведенных в /17,22/, необходимо использовать доказываемое ниже соотношение:

$$P_l(u)\, Q_l(v) - P_l(v)\, Q_l(u) = \int\limits_v^u ds\; (s^2-1)^{-1}\, P_l\left[\frac{u}{s}\right] P_l\left[\frac{v}{s}\right], \tag{П.6.1}$$

где l-целое, и u, v лежат вне интервала $(-\infty,+1)$. Функции Лежандра 1-го и 2-го рода подчиняются уравнению (П.1.17г). Поскольку симметрия функций с обеих сторон равенства (П.6.1) одинакова, а при u = v, в силу /64,ф.3.2(13)/,совпадают как сами функции так и их производные:

$$\frac{d}{dv}\int\limits_v^u ds\; (s^2-1)^{-1}\, P_l\left[\frac{u}{s}\right] P_l\left[\frac{v}{s}\right]\Bigg|_{u=v} = \left[P_l(v)\, \overleftrightarrow{\partial}_v\, Q_l(v)\right] = (1-v^2)^{-1};$$

то достаточно убедиться, что его правая часть удовлетворяет уравнению Лежандра (П.1.17г), например по u. Подставляя, имеем:

$$\hat{\mathcal{L}}_u \cdot \int\limits_v^u ds\; (s^2-1)^{-1}\, P_l\left[\frac{u}{s}\right] P_l\left[\frac{v}{s}\right] = \frac{1}{u}\,\Omega_l(\alpha), \tag{П.6.2}$$

где $\alpha \equiv \frac{v}{u}$, и обозначено:

$$\Omega_l(\alpha) = P'_l\left[\frac{1}{\alpha}\right] - \alpha\, P'_l(\alpha) + \int\limits_1^{\alpha} d\lambda\, P'_l\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]\, P'_l(\lambda); \tag{П.6.3}$$

$$P'_l(\alpha) \equiv \frac{d}{d\alpha} P_l(\alpha) = C^{3/2}_{l-1}(\alpha). \tag{П.6.4}$$

Легко проверить, что $\Omega_l(\alpha)$ подчиняется функциональному уравнению:

$$\Omega_l(\alpha) = -\,\alpha\,\Omega_l(1/\alpha), \tag{П.6.5}$$

отличные от нуля решения которого не могут обладать определенной четностью. С другой стороны при целом l из (П.6.3) явствует

$$\Omega_l(\alpha) - (-1)^l \Omega_l(-\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-1}^{1} d\lambda\, P_l(\lambda)\, P''_l\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] \equiv 0.$$

Откуда $\Omega_l(\alpha) \equiv 0$, и равенство (П.6.I) доказано.

Следующее соотношение для полиномов Лежандра позволяет извлекать спектральную плотность потенциала $\Sigma(\mu)$ из известного ядра $K_l^{(N)}(u,\rho)$ при целых l:

$$\int\limits_{\mu}^{\nu} \frac{ds}{s}\, P_l\left[2\frac{\nu}{s}-1\right]\, P_l\left[2\frac{\mu}{s}-1\right] = \ln\left[\frac{\nu}{\mu}\right]. \tag{П.6.6}$$

Его не трудно получить подставляя непосредственно разложение:

$$P_l(1+2x) = \sum_{n=0}^{l} \gamma_{ln}\, x^n\,; \qquad \gamma_{ln} = \frac{(l+n)!}{(l-n)!\,(n!)^2}\,; \tag{П.6.7}$$

и вычисляя интеграл по s, что приводит к выражению:

$$\ln\left[\frac{\nu}{\mu}\right] + \sum_{n=1}^{l} \gamma_{ln}\, (-1)^n \left[\left[\frac{\nu}{\mu}\right]^n - \left[\frac{\mu}{\nu}\right]^n\right] \left\{\sum_{m=0}^{l} \gamma_{lm}\, \frac{(-1)^m}{(m+n)}\right\};$$

Сумму в фигурных скобках можно свести к интегралу:

$$\left\{\cdots\cdots\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dy\, P_l(y)\, \left[\frac{1+y}{2}\right]^{n-1} = 0, \text{ при } 1 \leqslant n \leqslant l.$$

Приложение 7

В этом приложении приведены основные определения и свойства и выведены новые соотношения для функций, используемых в квазипотенциальном обобщении метода ВФИ.

С помощью формул Уиппла /64,ф.3.3(13),ф.3.3(14)/ свободные регулярное и иостовское решения уравнения (4.54),(4.73) можно представить в виде /39,82/:

$$s_l(\chi,r) = \left[\frac{\pi}{2}\, sh\,\chi\right]^{\frac{1}{2}} (-i)^{l+1}\, \frac{\Gamma(l+1+ir)}{\Gamma(ir)}\, P^{-l-\frac{1}{2}}_{\pm ir-\frac{1}{2}}(ch\,\chi) =$$

$$= \frac{(-i)^{l+1}}{\Gamma(ir)}\, e^{\pi r}\, Q^{ir}_{l}(cth\,\chi); \qquad (\Pi.7.1)$$

$$e^{\binom{1}{2}}_{l}(\chi,r) = i\left[\frac{\pi}{2}\, sh\,\chi\right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{l}\, \frac{\Gamma(l+1+ir)}{\Gamma(ir)}\, Q^{-l-\frac{1}{2}}_{\mp ir-\frac{1}{2}}(ch\,\chi) =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1+ir)\,\Gamma(-l\mp ir)}{\Gamma(ir)}\, P^{\pm ir}_{l}(cth\,\chi) = \qquad (\Pi.7.2)$$

$$= \mp\frac{\Gamma(l+1+ir)\,\Gamma(ir-l)}{\Gamma(ir)\quad\Gamma(1+ir)}\,\frac{e^{\pm i\chi r}\, e^{\mp l\chi}}{(2\,sh\,\chi)^{l}}\; {}_2F_1\left[-l,-l+ir;1+ir;e^{\pm 2\chi}\right].$$

$$e^{(2)}_{0}(\chi,r) = e^{-i\chi r}.$$

Для вещественных χ операции комплексного сопряжения и четности для этих решений имеют вид:

$$\left[e^{\binom{1}{2}}_{l}(\chi,r)\right]^{*} = v_l(r)\, e^{\binom{1}{2}}_{l}(-\chi,r); \quad \left[s_l(\chi,r)\right]^{*} = v_l(r)\, s_l(\chi,r); \qquad (\Pi.7.3)$$

$$e^{\binom{1}{2}}_{l}(-\chi,r) = (-1)^{l+1}\, e^{\binom{2}{1}}_{l}(\chi,r); \quad s_l(-\chi,r) = (-1)^{l+1}\, s_l(\chi,r); \qquad (\Pi.7.4)$$

$$v_l(r) = (-1)^{l+1}\,\frac{\Gamma(l+1-ir)\,\Gamma(ir)}{\Gamma(l+1+ir)\,\Gamma(-ir)} = \frac{\Gamma(1+ir)\,\Gamma(ir)}{\Gamma(l+1+ir)\,\Gamma(ir-l)} = \left[v^{*}_{l}(r)\right]^{-1}. \qquad (\Pi.7.5)$$

Кроме того, они связаны соотношениями:

$$s_l(\chi,r) = \frac{i}{2}\left[i^{l}\, e^{(2)}_{l}(\chi,r) - (-i)^{l}\, e^{(2)}_{l}(-\chi,r)\right], \qquad (\Pi.7.6)$$

$$e^{(2)}_{l}(\chi - i\pi n,r) = e^{-\pi n r}\, e^{(2)}_{l}(\chi,r), \qquad (\Pi.7.7)$$

$$c_l(\chi,r) = (-1)^{l}\, s_{-l-1}(\chi,r) = \frac{i}{2}\left[i^{l}\, e^{(2)}_{l}(\chi,r) + i^{-l}\, e^{(2)}_{l}(-\chi,r)\right], \qquad (\Pi.7.8)$$

Функция Грина оператора (4.54) при $U=0$ имеет вид:

$$\mathbb{G}^{(\pm)}_{l0}(\chi;r,y) = \langle r|G^{(\pm)}_{l0}(\chi)|y\rangle = \frac{v_l(y)}{v_l(r)}\,\mathbb{G}^{(\pm)}_{l0}(\chi;y,r) = \left[\mathbb{G}^{(\mp)}_{l0}(\chi;y,r)\right]^{*} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\eta\, \frac{s_l(\eta,r)\, s^{*}_{l}(\eta,y)}{\left[ch\,\chi - ch\,\eta \pm i0\right]} = \qquad (\Pi.7.9)$$

и также допускает разбиения вида (2.103) /39,82/:

$$= \mathbb{B}^{(R)}_{l0}(\chi;r,y) - \frac{v_l(y)}{sh\,\chi}(\mp i)^l\, e_l^{(2)}(\mp\chi,y)\, s_l(\chi,r) = \qquad (П.7.10)$$

$$= \mathbb{B}^{(J)}_{l0}(\chi;r,y) - \frac{v_l(y)}{sh\,\chi}(\mp i)^l\, s_l(\chi,y)\, e_l^{(2)}(\mp\chi,r), \qquad (П.7.11)$$

где квазипотенциальные *фредгольмовские* функции Грина:

$$\mathbb{B}^{(R)(J)}_{l0}(\chi;r,y) = \frac{v_l(y)}{sh\,\chi}\,\hat\theta(-r-y)\left[s_l(\chi,r)\,c_l(\chi,y) + [r\rightleftharpoons y]\right] +$$

$$+ \frac{v_l(y)}{sh\,\chi}\left[s_l(\chi,r)\,c_l(\chi,y) - [r\rightleftharpoons y]\right]\begin{cases}\hat\theta(r-y)\\ (-1)\hat\theta(-r-y)\end{cases}; \qquad (П.7.12)$$

$$\mathbb{B}^{(J)}_{l0}(\chi;r,y) = \frac{v_l(y)}{v_l(r)}\,\mathbb{B}^{(R)}_{l0}(\chi;y,r); \qquad (П.7.13)$$

являются релятивистским аналогом вольтерровской функции (2.8), возникающей из (П.7.12) в нерелятивистском пределе (см.(4.54)), когда первое слагаемое в (П.7.12) исчезает, т.к. для функции:

$$\hat\theta(r) = \left[1 - e^{-2\pi(r-i0)}\right]^{-1}; \qquad (П.7.14)$$

этот предел равен обычной тэта-функции $\theta(r)$ /39,82/.

Система функций (П.7.1) является полной /39/:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi\; s_l(\chi,r)\, s_l^*(\chi,y) = \delta(r-y); \qquad (П.7.15)$$

а парциальное разложение "плоской волны" на гиперболоиде /39/ при $\vec{q} = q\vec\omega$, $\vec{x} = x\vec{n}$, $q = sh\,\ae$, имеет вид:

$$\xi(\vec{q},\vec{x}) \equiv \left[ch\,\ae - (\vec\omega\circ\vec n)\,sh\,\ae\right]^{-ir-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)\;i^l}{r\;sh\,\ae}\,P_l(\vec\omega\circ\vec n)\;s_l(\ae,r). \qquad (П.7.16)$$

Наконец, формула умножения "плоских волн" /39/ такова:

$$\int d\Omega_3(\vec n)\;\xi^*(\vec q,\vec x)\;\xi(\vec p,\vec x) = \int d\Omega_3(\vec n)\;\xi^*((\vec q\leftrightarrow\vec p),\vec x), \qquad (П.7.17)$$

где $(\vec q\leftrightarrow\vec p) \equiv L^{-1}_{\vec p}\vec q = \vec\Delta$, определено в (4.47).

Вывод формулы (4.77)-(4.79), после исключения с помощью (П.7.2),(П.7.7) функции целой части, равной при $N \leqslant \frac{\sigma-\beta-\tau}{2\pi} < N+1$:

$$Int\left[1 + \frac{\sigma-\beta-\tau}{2\pi}\right] = N+1; \qquad N=0,1,2,\cdots; \qquad (П.7.18)$$

сводится к получению равенства (в обозначениях (П.8.2)):

$$\int_{\alpha+w}^{2\pi+\alpha+w} d\beta\; P_l\left[T[\beta\alpha|w]\right]\,P_l^{-ir}\left[i\;ctg\,\beta\right] = 2e^{-\pi r}sh(\pi r)\,\frac{e^{-wr}}{r}\,P_l^{-ir}\left[i\;ctg\,\alpha\right], \qquad (П.7.19)$$

которое для $l=0,1$ проверяется непосредственно. При $l>1$ рекурент ное соотношение /64,ф.3.8(2)/:

$$(2l+1)\, z\, P_l^{-ir}(z) - (l-ir)\, P_{l-1}^{-ir}(z) = (l+1+ir)\, P_{l+1}^{-ir}(z), \quad (\text{П.7.20})$$

индукцией по l сводит эту задачу к получению тождества:

$$ctg\,\alpha\, P_l\Big(T[\beta\alpha|w]\Big) - P_l\Big(T[\beta\alpha|w]\Big)\,\frac{d}{d\beta}\,T[\beta\alpha|w] =$$

$$= ctg\,\beta\left[P_l\Big(T[\beta\alpha|w]\Big) - l\int_1^{T[\beta]} dY\, P_l(Y)\right], \quad (\text{П.7.2I})$$

которое легко вывести из рекурентного соотношения (П.I.I7б) и очевидной формулы:

$$ctg\,\alpha = ctg\,\beta\, T[\beta\alpha|w] + \frac{d}{d\beta}\,T[\beta\alpha|w].$$

Приложение 8

В этом приложении собраны, аналогично П.4, определения и свойства квазипотенциальных кинематических функций.

Полагая: $\sigma=-i\text{æ}$; $\beta=-i\eta$; $\alpha=-iv$; введем обозначения:

$$\left.\begin{array}{lll} c = cos\,\sigma = ch\,\text{æ}; & t = cos\,\tau \Rightarrow -ch\,\lambda; & \tau \Rightarrow \pi+i\lambda; \\ b = cos\,\beta = ch\,\eta; & m = cos\,\mu \Rightarrow -ch\,\zeta; & \mu \Rightarrow \pi+i\zeta; \\ a = cos\,\alpha = ch\,v; & h = cos\,\gamma \Rightarrow -ch\,\xi; & \gamma \Rightarrow \pi+i\xi; \end{array}\right\} \quad (\text{П.8.I})$$

$$\left.\begin{array}{l} X[\alpha\sigma|\gamma] = \dfrac{cos\,\gamma - cos\,\alpha\ \ cos\,\sigma}{sin\,\alpha\ sin\,\sigma} = \dfrac{ch\,\text{æ}\ \ ch\,v - cos\,\gamma}{sh\,\text{æ}\ sh\,v} \\ Y[\alpha\beta|\mu] = \dfrac{cos\,\mu - cos\,\alpha\ \ cos\,\beta}{sin\,\alpha\ sin\,\beta} = \dfrac{ch\,\eta\ \ ch\,v - cos\,\mu}{sh\,\eta\ sh\,v} \\ T[\sigma\beta|\tau] = \dfrac{cos\,\tau - cos\,\sigma\ \ cos\,\beta}{sin\,\sigma\ sin\,\beta} = \dfrac{ch\,\text{æ}\ \ ch\,\eta - cos\,\tau}{sh\,\text{æ}\ sh\,\eta} \end{array}\right\} \quad (\text{П.8.2})$$

Тогда, вспоминая формулы (П.I.I4),(П.4.4),(П.4.5), можно записать выражения, определяющие области интегрирования условиями (П.3.3) или (П.3.I0) соответственно:

$$(sin\,\alpha\ sin\,\beta\ sin\,\sigma)^2\ W\Big[X[\cdots],Y[\cdots],T[\cdots]\Big] =$$

$$= (1-t^2)\Big[a - \Lambda^+(t;m,h;c,b)\Big]\ \Big[a - \Lambda_-(t;m,h;c,b)\Big] =$$

$$= (1-a^2)\Big[t - \Lambda^+(a;c,h;m,b)\Big]\ \Big[t - \Lambda_-(a;c,h;m,b)\Big] = \quad (\text{П.8.3})$$

$$= \sin^2\tau \left[\cos\alpha - \Omega^{+}(\tau;\mu,\gamma;\sigma,\beta)\right]\left[\cos\alpha - \Omega_{-}(\tau;\mu,\gamma;\sigma,\beta)\right] = \text{и т.д.}$$

аналогично (П.4.5). Выражения для граничных функций таковы:

$$\sin^2\tau\, \Omega^{+}_{-}(\tau;\mu,\gamma;\sigma,\beta) \equiv (1-t^2)\, \Lambda^{+}_{-}(t;m,h;c,b) \equiv$$

$$\equiv hc + mb - t(mc+hb) \mp \left[W(t,b,c)\, W(t,m,h)\right]^{1/2}, \qquad (\text{П}.8.4)$$

где функция W имеет прежний смысл (П.2.5):

$$W(t,b,c) = (bc-t)^2 - (1-b^2)(1-c^2) =$$

$$= \left[\cos\tau - \cos(\sigma-\beta)\right]\left[\cos\tau - \cos(\sigma+\beta)\right]. \qquad (\text{П}.8.5)$$

Функция $\bar{\Omega}^{+}_{-}(\tau;\mu,\gamma;\varkappa,\eta)$ получается аналитическим продолжением (П.8.I) по σ и β, при котором (П.8.5) приобретает фазу:

$$W(t,b,c) \Rightarrow e^{2i\pi}\left[ch(\varkappa-\eta) - \cos\tau\right]\left[ch(\varkappa+\eta) - \cos\tau\right];$$

$$\bar{\Omega}^{+}_{-}(\tau;\mu,\gamma;\varkappa,\eta) = \Omega^{-}_{+}(\tau;\mu,\gamma;-i\varkappa,-i\eta). \qquad (\text{П}.8.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Fubini S., Asymptotic limit in potential scattering and in field theory. Theoretical physics. Lecture pres. at the seminur IAEA, Trieste 1962. Vienna: IAEA, 1963. p.347-364.

2. Stroffolini R., On the equation for the Regge trajectories. Theoretical physics. Lecture pres. at the seminur IAEA, Trieste 1962. Vienna: IAEA, 1963. p.365-379.

3. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 607 с.

4. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 543 с.

5. Ситенко А.Г. Лекции по теории рассеяния. Киев: Высшая школа, 1971. 260 с.

6. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М: Мир, 1966. 823 с.

7. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 461 с.

8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.

9. Baumgartel H., Wollenberg M. Mathematical scattering theory. Berlin: Akademie-Verlag, 1983. 1054 p.

10. Рамон П. Теория поля. М.: Мир, 1984. 332 с.

11. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том II. М.: Наука, 1974. 295 с.

13. Браун М.А., Гурчумелия А.А., Сафронова У.И. Релятивистская теория атома. М.: Наука, 1984. 268 с.

14. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Том IV. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. 704 с.

15. Мессиа А. Квантовая механика. Том II. М.: Наука, 1979. 503 с.

16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том III. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.

17. де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966. 274 с.

18. Callan C.J., Coleman S. Fate of the false vacuum II. First quantum corrections. // Phys. Rev. 1977, vol.D16, № 6, p.1762-1768.

19. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. Инстантонная азбука. Материалы 16 Зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, 1981. с.22-89.

20. Brown L.S., Cahn R.N., Mc Lerran L.D. Vacuum polarization in a strong Coulomb field (I). Induced point charge. // Phys. Rev. 1975, vol.D12, № 2, p.581-595.

21. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Том I. М.: Мир, 1984. 448 с.

22. de Alfaro V., Regge T., Rossetti C. Dynamimical equations and angular momentum. // Nuovo Cimento, 1962, vol.26, № 5 p.1029-1062.

23. Орлов И.И., Парфенов Ю.В. Пврвметрическое решение Иоста. // ТМФ, 1970, том 4, № 1, с.18-21.

24. Fuda M.G., Whiting J. Generalization of the Jost function and its application to off-shell scattering. // Phys. Rev. 1973, vol.C8, № 4, p.1235-1261.

25. van Haeringen. Coulombian asymptotic states. // J.

Math. Phys. 1976, vol.17, № 16, p.995-1000.

26. van Haeringen. Simple analytic expressions for the Coulombian off-shell Jost function. // J. Math. Phys. 1978, vol. 19, № 18, p.1379-1381

27. Dušek J. On shell singularities of the off-shell Jost functions and Jost solutions for long-range potentials // J. Math. Phys. 1984, vol.25, № 4, p.982-986.

28 Dušek J. Analytic expressions for the partial waves off -shell two-body Coulomb T-matrix. // Czech. J. Phys. 1981. vol. B31, p.941-968.

29. Шмид Э., Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979. 272 с.

30. Fuda M.G. Some results on the off-shell Jost function. // Phys. Rev. 1976, vol.C14, № 1, p.37-39.

31. Коренблит С.Э., Парфенов Ю.В. Обратная задача в классе юкавских потенциалов при произвольных угловых моментах. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1981, вып.57, Теоретическая физика. с.83-94.

32. Парфенов Ю.В., Коренблит С.Э. Унитарная теория возмущений в классе юкавских потенциалов. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1981, вып.57, Теоретическая физика. с.117-126.

33. Pasquier J., Pasquier R. On the analytic properties of non-relativistic two-body off-shell amplitudes (I). Spectral function methods. // Nucl. Phys. 1977, vol.A227, № 1, p.202-220

34. Pasquier J., Pasquier R. On the analytic properties of non-relativistic two-body off-shell amplitudes (II). Off-shell generalization of the Jost formalism. // Ann. Phys. 1978, vol. 111, p.269-303.

35. Коренблит С.Э. Задача о сдвиге уровней в методе внеэнергетических детерминантов Иоста. Препринт ИЯФ-87-16, Новосибирск, 1987, с.1-36.

36. Коренблит С.Э. Парциальные детерминанты Иоста и спектральная плотность резольвенты по передаче импульса. // ТМФ, 1989, том 81, № 1, с.45-58.

37. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функциии. Вып.1. Обобщенные функциии и действия над ними. М.: Наука, 1959, 470 с.

38. Frank W.M., Land D.J., Spector R.M. Singular potentials. // Rev. Mod. Phys. 1971, vol.43, № 1, p.36-98.

39. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. Трехмерная формулировка проблемы двух тел. // ЭЧАЯ, 1972, том 2, вып.3, с.635-690.

40. Коренблит С.Э. Локальный потенциал в задаче о лэмбовском сдвиге. // ЯФ, 1989, том 49, вып.1, с.197-204.

41. Cornille H., Rubinstein G. Threshold behavior requirments for P-wave N/D equations. // J. Math. Phys. 1968, vol.9, № 9, p.1501-1516.

42. Trlifaj L. The radial Marchenko - Blažek integral equation for complate spectra. // Czech. J. Phys. 1981, B31, p.355--366.

43. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980, 408 с.

44. Коренблит С.Э. О методе Марченко для полного спектра при комплексном угловом моменте. // Исследования по геомагнетмзму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1984, вып.69, Теоретическая физика. с.180-183.

45. Фаддеев Л.Д. Обратные задачи квантовой теории рассея-

ния. // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1974, Т.3, с.93-180.

46. Newton R.G. Invers scattering IV. Three dimensions: generalized Marchenko construction with bound states, and generalised Gel'fand - Levitan equations. // J. Math. Phys. 1982, vol.23, № 4, 594-604.

47. Переломов А.М., Попов В.С. Группа Лоренца как группа динамической симметрии атома водорода. // ЖЭТФ, 1966, том 50, № 1 с.179-198.

48. Верле Ю. Релятивистская теория реакций. М.: Атомиздат, 1969, 442 с.

49. Prats F., Toll S. Constraction of Dirac equation central potential from phase shifts and bound states. // Phys. Rev. 1959, vol.113, № 1, p.363-370.

50. Weiss R., Stahel W., Scharf G. The inverse problem of potential according to the Dirac equation. // Nucl. Phys. 1972, vol.A183, № 2, p.337-351.

51. Verde M. The inversion problem in wave mechanics and dispersion relations. // Nucl. Phys. 1958/59, vol.9, p.255-266.

52. Mil'shtein A.I., Strakhovenko V.M. The O(2.1) algebra and the electron Green function in Coulomb field. // Phys. Lett. 1982, vol.A90, № 9, p.447-450.

53. Филиппов А.Т. Сингулярные потенциалы в нерелятивистской квантовой теории. // ЭЧАЯ, 1979, том 10, вып.3, с.501-538.

54. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. // ДАН СССР, 1961, том 137, № 5, с.1011-1014.

55. Широков Ю.М. Сильно сингулярные потенциалы в трехмерной квантовой механике. // ТМФ, 1980, том 42, № 1, с.45-49.

56. Вайнберг В.М. Пример теории возмущений для сингулярных потенциалов. // ЯФ, 1971, том 14, вып.6, с.1287-1293.

57. Meetz K. Singular potentials in non-relativistic quantum mechanics. // Nuovo Cimento, 1964, vol.34, № 3, p.690-708.

58. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975, 301 с.

59. Brown L.S., Fivel D.I., Lee B.W., Sawyer R.F. Fredholm methods in potential scattering and applications to complex angular momentum. // Ann. Phys. 1963, vol.23, p.187-220.

60. Kim S.K. Theory of involutional transformations applied to Dirac theory of the electron II. Remarks on the Dirac - Coulomb waves. // J. Math. Phys. 1980, vol.21, № 8, p.2286-2290

61. Коллинз П. Введение в редcurrentжевскую физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980, 432 с.

62. Парфенов Ю.В. Аналитические свойства решений задачи рассеяния. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук. Иркутск, 1970.

63. Schwinger J. Coulomb Green's function. // J. Math. Phys. 1964, vol.5, № 11, p.1606-1608.

64. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том I. М.: Наука, 1973. 294 с.

65. van Haeringen H., Kok L.P. The Coulomb unitarity relation and some series of prodacts of Legendre functions. // J. Math. Phys. 1981, vol.22, p.2482-2490.

66. van Haeringen H. A family of sums of prodacts of Legendre functions. // Preprint Delft University, Netherlands, Delft, 1982, p.1-9.

67. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Наука, 1960, 562 с.

68. Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. Потенциальные модели кваркония. // УФН, 1984, том 143, с.3-32.

69. Voloshin M.B. On dinamics of heavy qarks in a non-perturbative QCD vacuum. // Nucl. Phys. 1979, vol.B154, № 3, p.365-380.

70. Волошин М.Б. Правила сумм для сечения рождения Υ-частиц в e^+e^- аннигиляции. // ЯФ, 1979, том 29, вып.5, с.1368-1378

71. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. Т.2. М.: Мир, 1976, 475 с.

72. Бьеркен Д.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Т.1. М.: Наука, 1978, 295 с.

73. Remiddi E., Semeria M. Perturbation theory for QED bound states. // Preprint CERN TH 3433, Geneva, 1982, p.1-15.

74. Fulton T., Martin P.C. Two-body system in Quantum Electrodinamics. Energy levels of positronium. // Phys. Rev. 1954, vol.95, № 3, p.811-822.

75. Первушин В.Н. и др. Квантовая хромостатика как низкоэнергетическая теория адронов. // Препринт ОИЯИ Р-2-87-674, Дубна, 1987, с.1-30.

76. Shuryak E.V. The rule of instantons in quantum chromodinamics II. Hadronic structure. // Preprint INP-81-134, Novosibirsk, 1981, p.1-43.

77. Bodwin G.T., Yennie D.R., Gregorio M.A. Recoil effects in the hhyperfine structure of QED bound states. // Preprint CLNS-84/618, ANL-HEP-PR-84-57, Cornell, USA, 1984, p.1-132.

78. Lepage G.R. Analytic bound-states solutions in a relativistic two-body formalism with applications in muonium and positronium. // Phys. Rev. 1977, vol.A16, № 3, p.863-876.

79. Todorov I.T. Quasipotential equation correspondin to

the relativistic eikonal approximation. // Phys. Rev. 1971, vol. D3, № 10, p.2351-2356.

80. Risov V.A., Todorov I.T, Aneva B.L. Quasipotential approach to the Coulomb bound state problem for spin 0 and spin $\frac{1}{2}$ particles. // Preprint CERN, TH. 1983, Geneva, 1975, p.1-30.

81. Мартыненко Л.И., Фаустов Р.Н. Релятивистский спектр энергий связаной системы двух частиц и локальное квазипотенциальное уравнение. // ТМФ, 1986, том 66, № 3, с.399-408.

82. Freeman M., Matveev M.D., Mir-Kasimov R.M. On relativistic quasipotential equetion with local interection. // Preprint IC/68/110, Trieste, 1968, p.1-43.

83. Скачков Н.В., Соловцов И.Л. Релятивистское трехмерное описание взаимодействия двух фермионов. // ЭЧАЯ, 1978, том 9, вып.1, с.5-47.

84. Архипов А.А. К вопросу об одновременной редукции в квантовой теории поля. // Труды VII семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1984, Т.II. с.234-251.

85. Arkhipov A.A. Causality in the problem of singl-time reduction in quantum field theory. // Preptint IHEP-85-146, Serpuchov, 1985, p.1-25.

86. Архипов А.А. Одновременная редукция формализма Бете-Солпитера для двухфермионной системы. // Препринт ИФВЭ-88-147, Серпухов, 1988,с.1-43.

87. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984, 597 с.

88. Швингер Ю. Теория квантованных полей. М.: Иностранная литература, 1956, 250 с.

89. Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж. Новый подход

в квантовой теории и его приложения к ядерной физике низких и высоких энергий. // ЭЧАЯ, 1979, том 10, вып.4, с.741-783.

90. Криве И.В., Латинский С.М. Поляризация вакуума неоднородным внешним полем в среде. // ЯФ, 1988, том 41, вып.1, с.283-291.

91. Durand L., Fishbane P.M., Simmons L.M. Expansion formulas and addition theorems for Gegenbauer functions. // J. Math. Phys. 1976, vol.17, № 11, p.1933-1948.

92. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Иностранная литература, 1963, 466 с.

93. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том III. М.: Наука, 1967, 299 с.

94. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.

95. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том I. М.: Наука, 1969, 343 с.

96. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том II. М.: Наука, 1970, 327 с.

97. Mandelstam S. Regge poles as a consecuens of the analycity and unitarity. // Ann. Phys. 1963, vol.21, p.302-343.

98. Филиппов А.Т. Теория потенциального рассеяния и некоторые ее обобщения. // Материалы международной зимней школы теоретической физики ОИЯИ. Дубна, 1965, Том II, с.80-107.

99. Коренблит С.Э. Детерминанты оператора Дирака и спектральная плотность Т-матрицы по передаче импульса. Препринт ИТФ-90-60Е Киев, 1990, с.1-28.

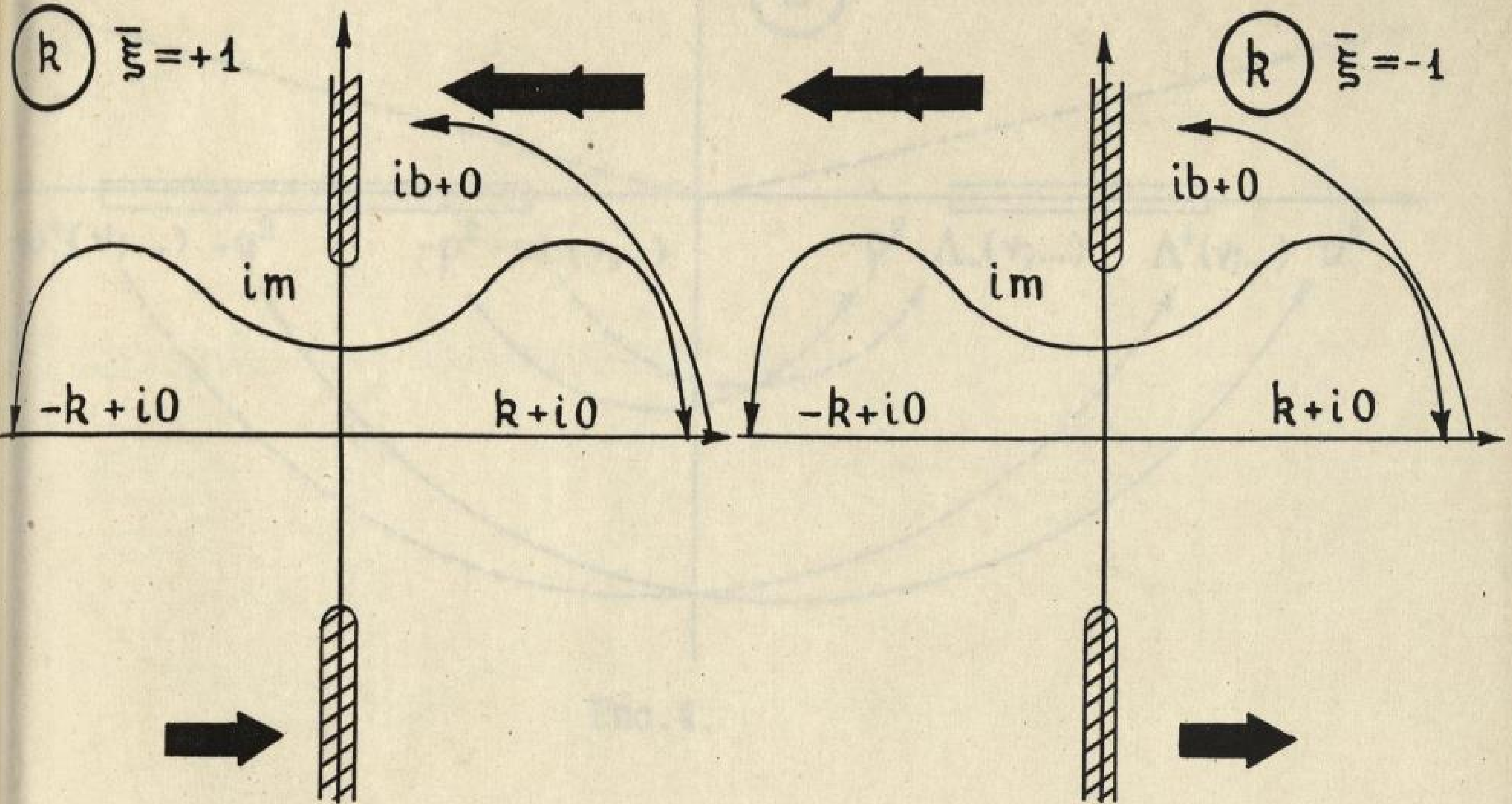


Рис.1.

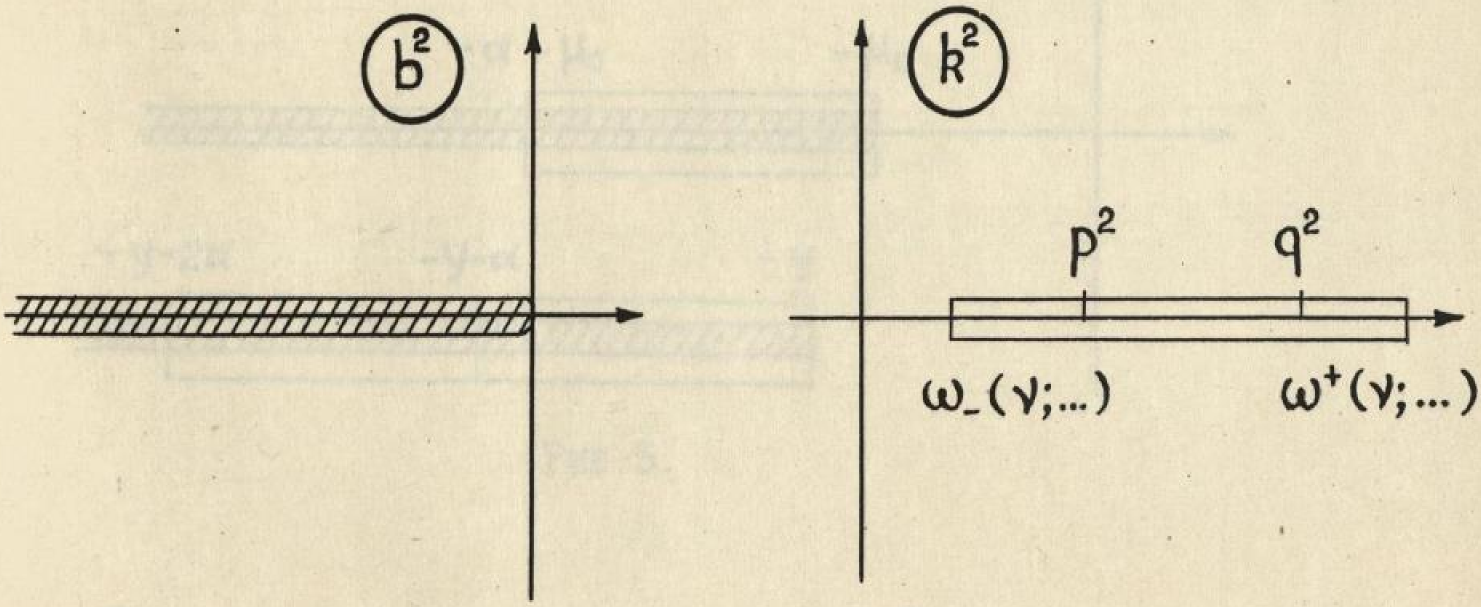


Рис.2.

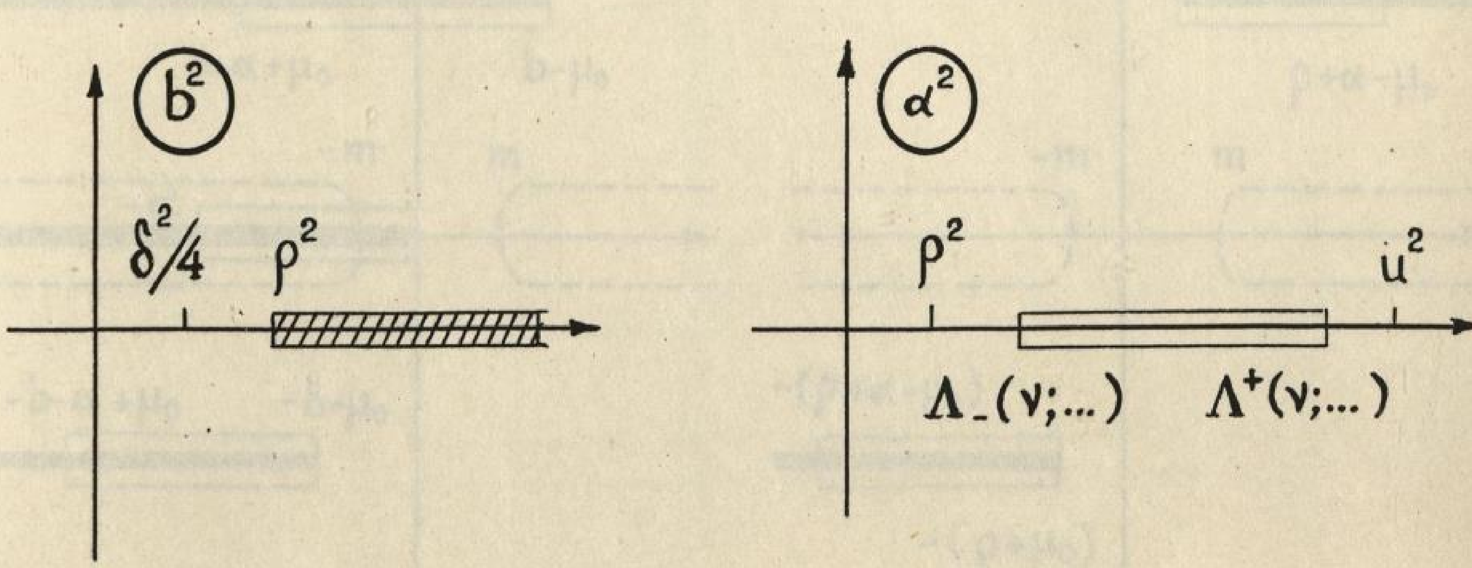


Рис.3.

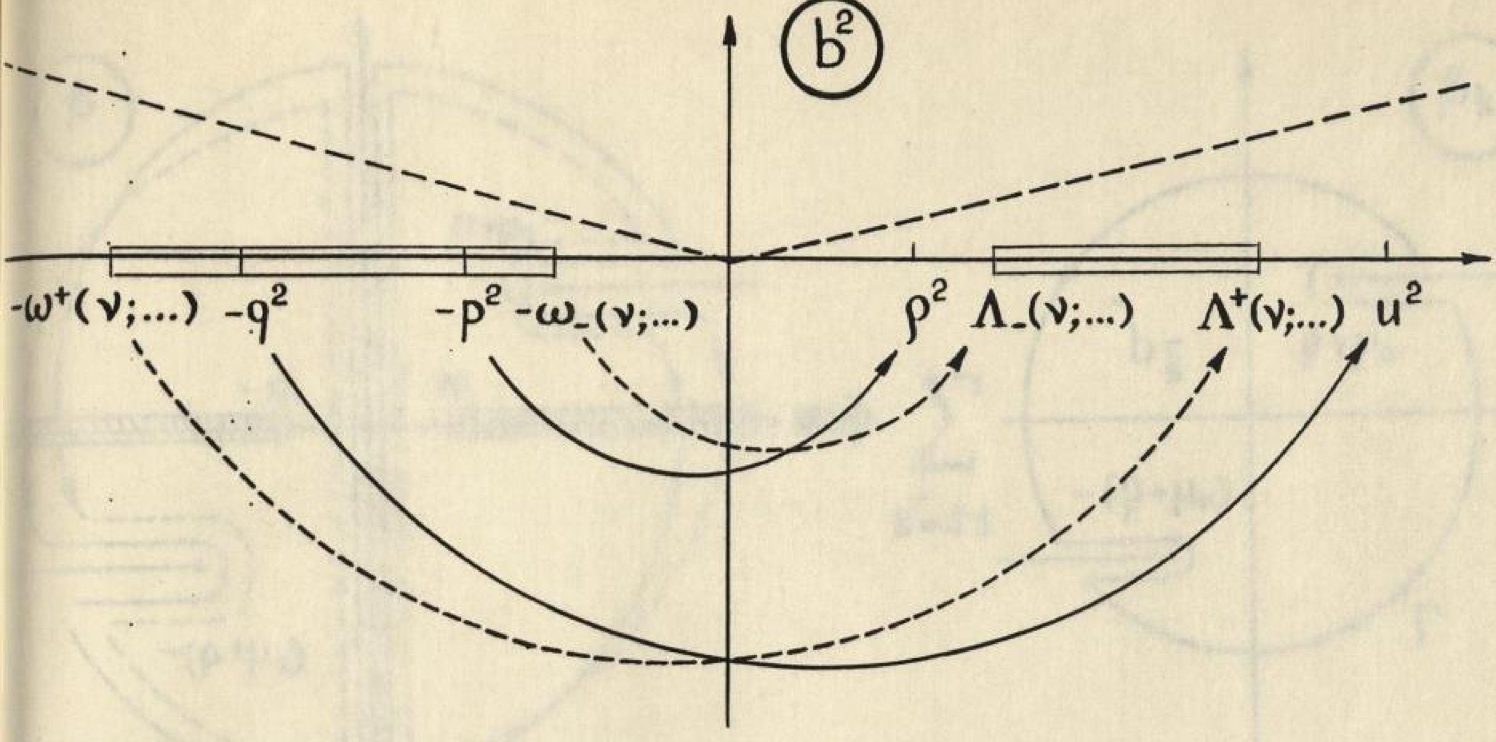


Рис.4.

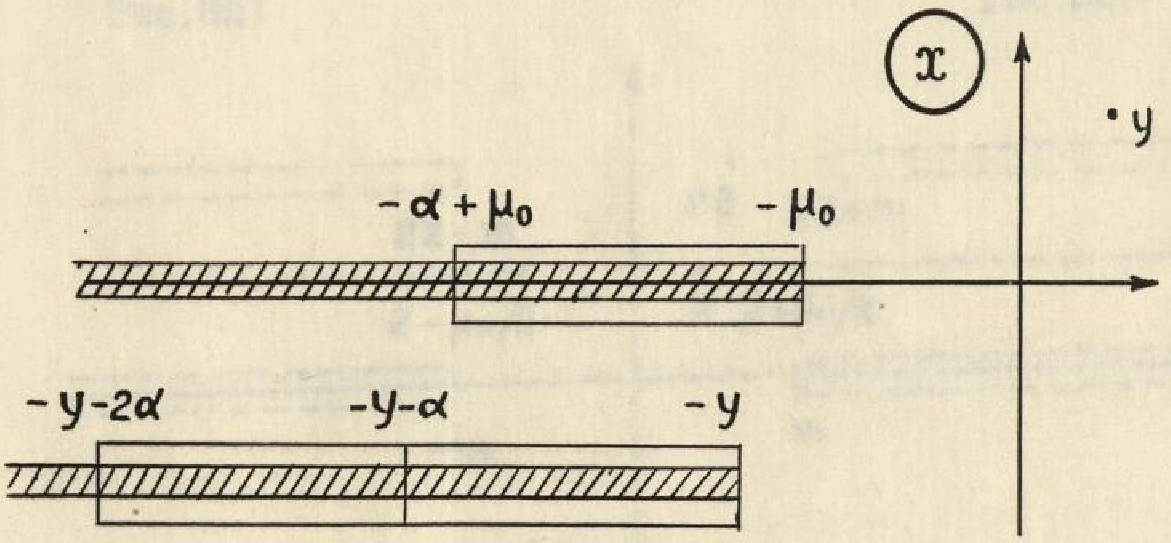


Рис.5.

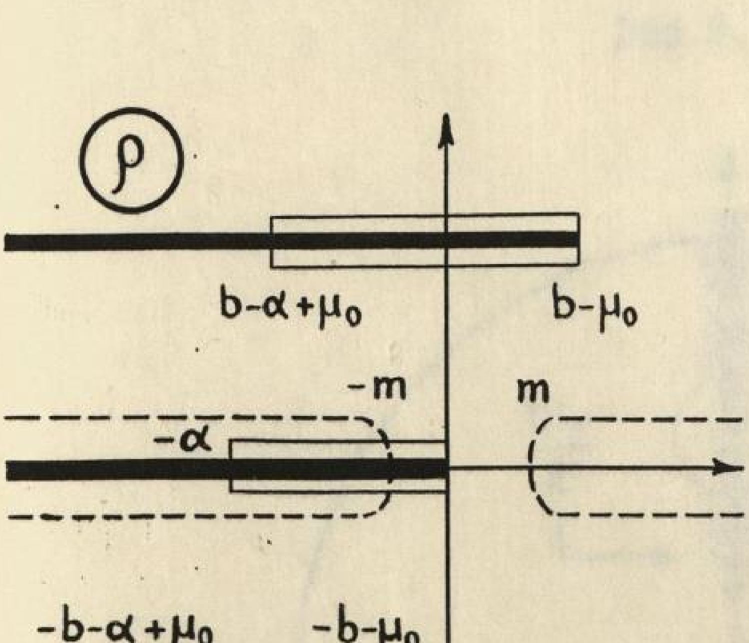


Рис.6.

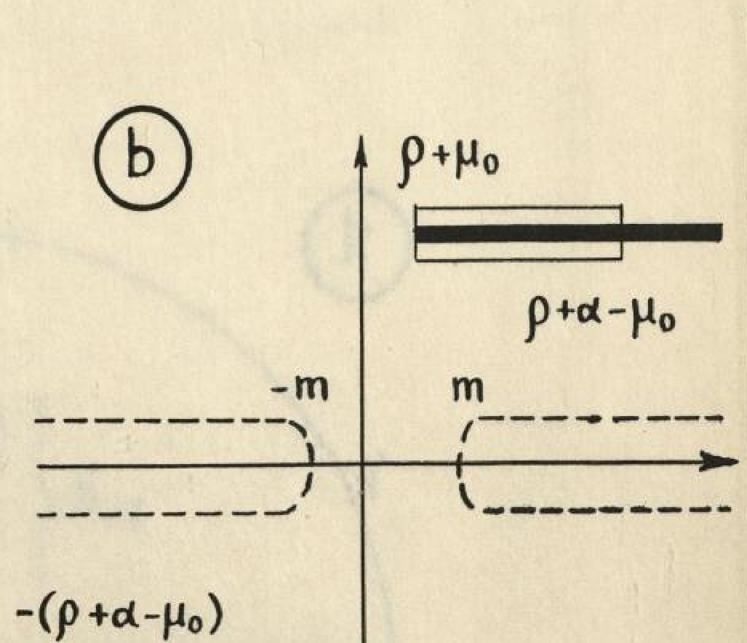


Рис.7.

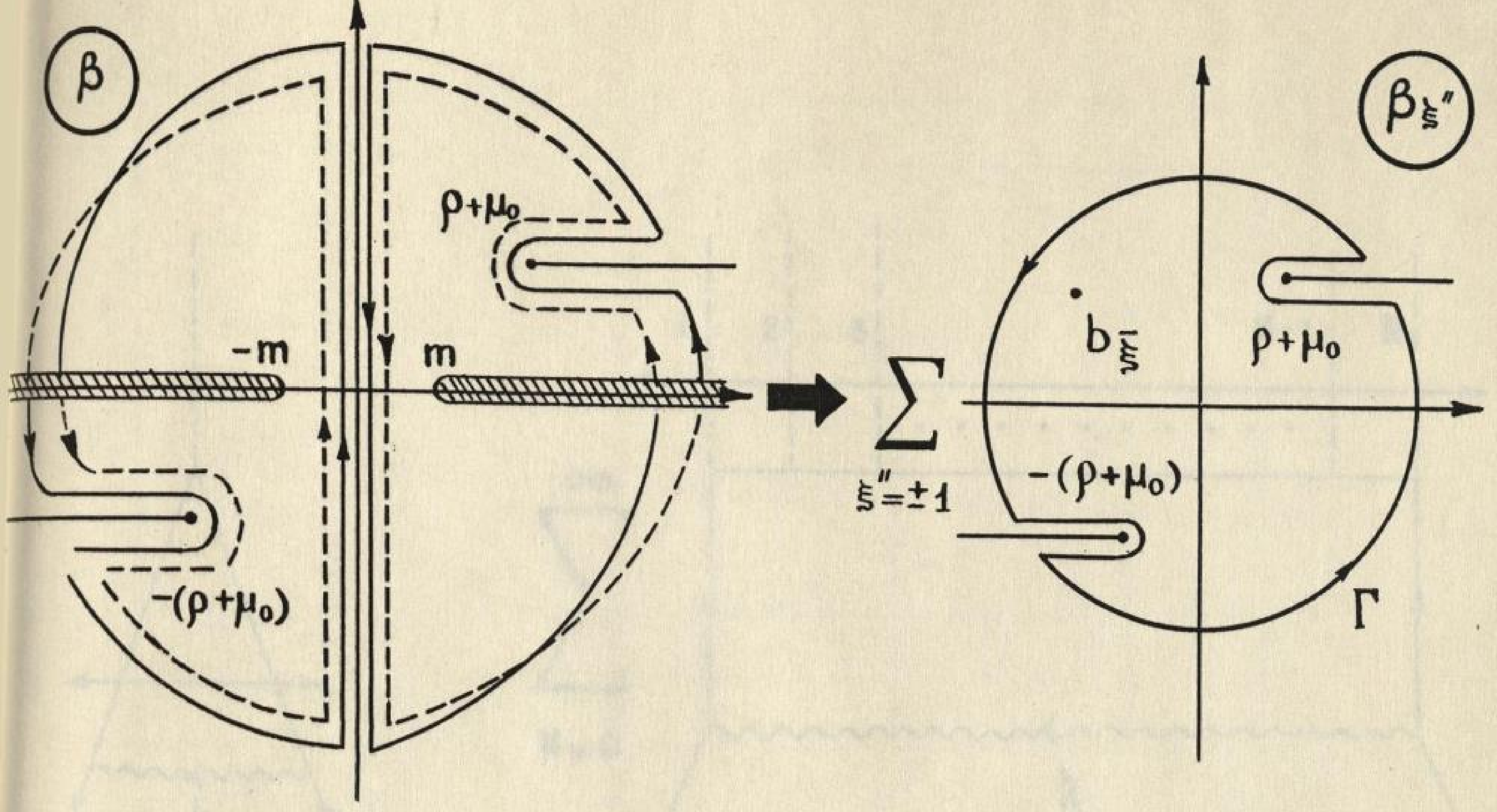


Рис.8а)

Рис.8б)

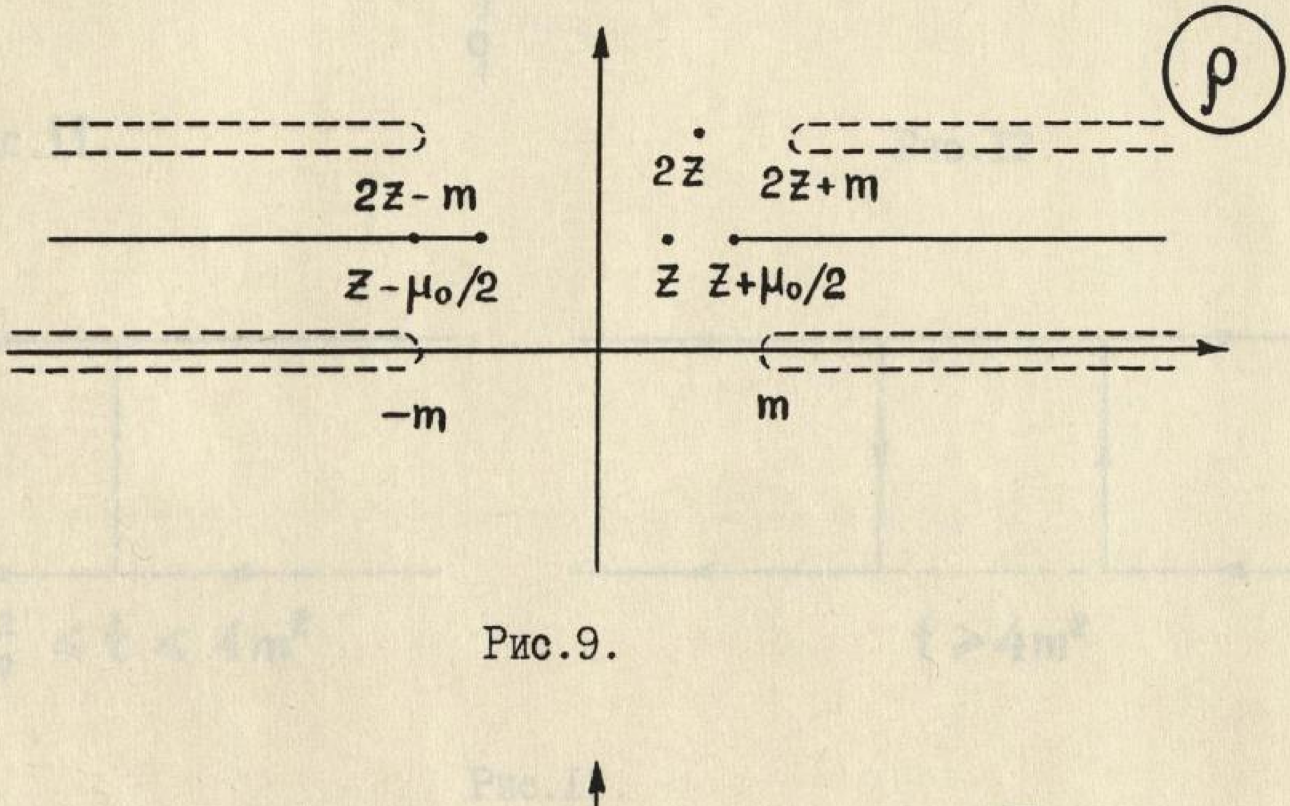


Рис.9.

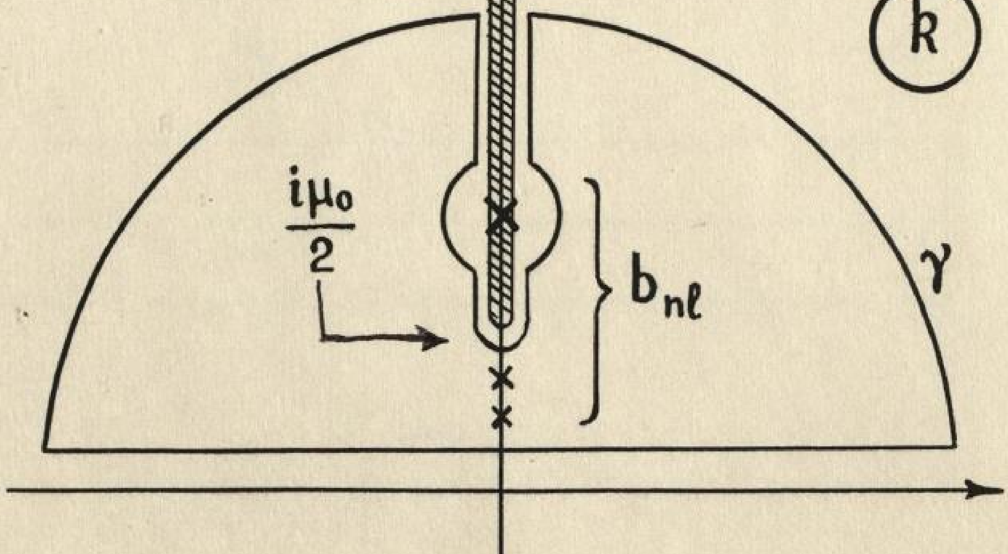


Рис.10.

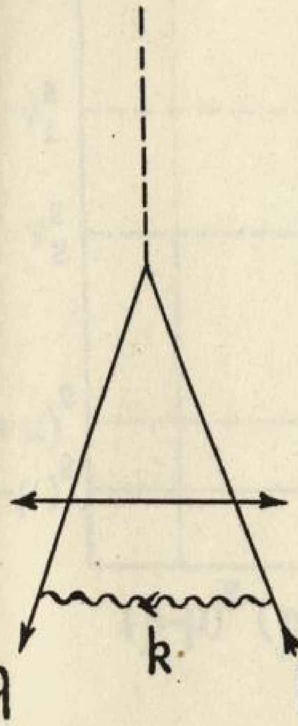


Рис.11.

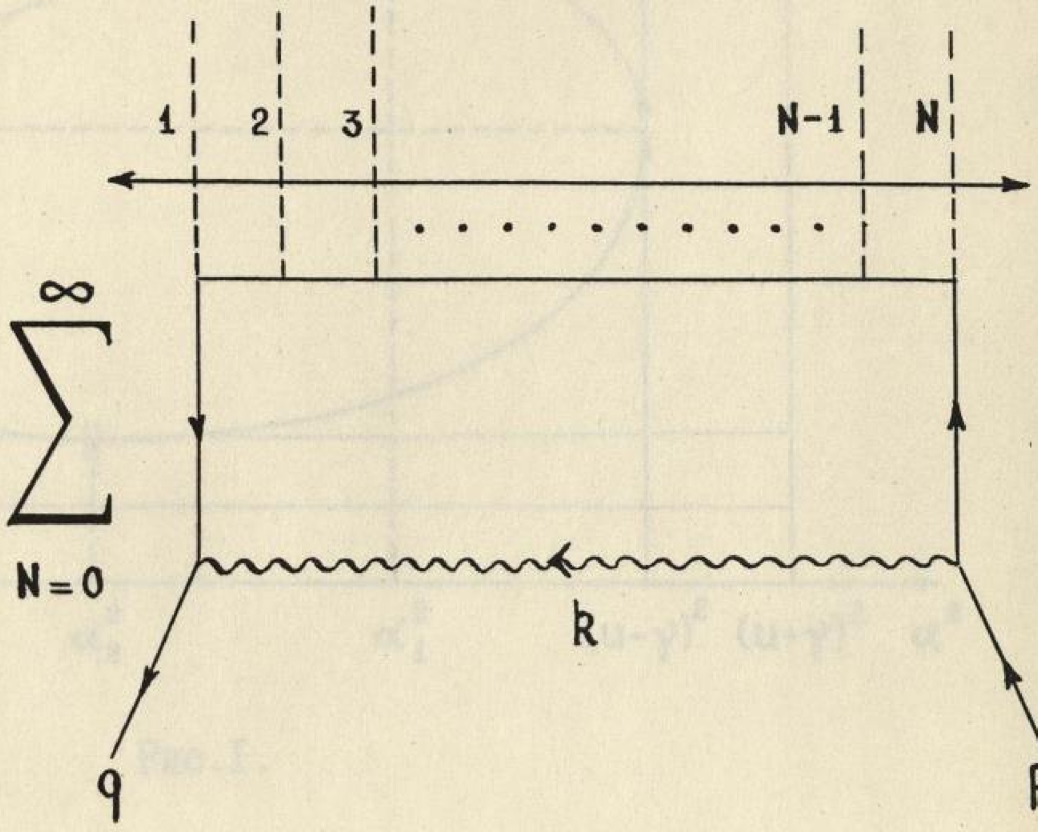


Рис.12.

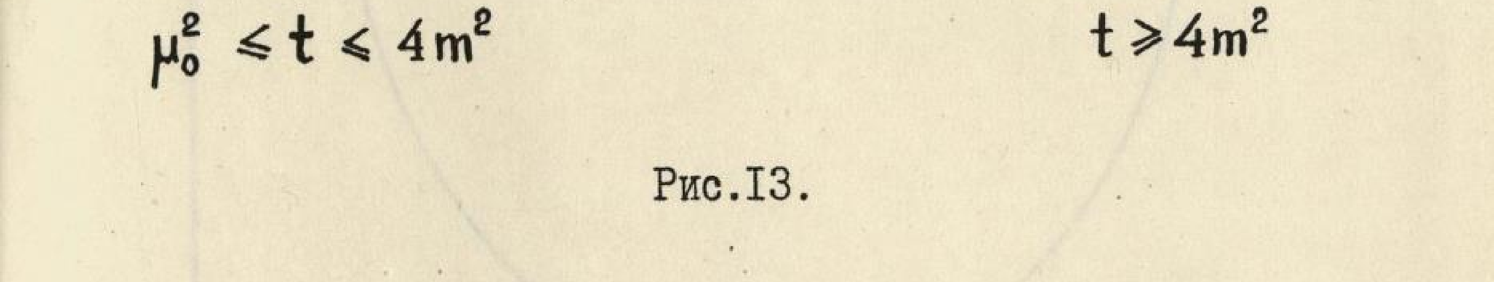
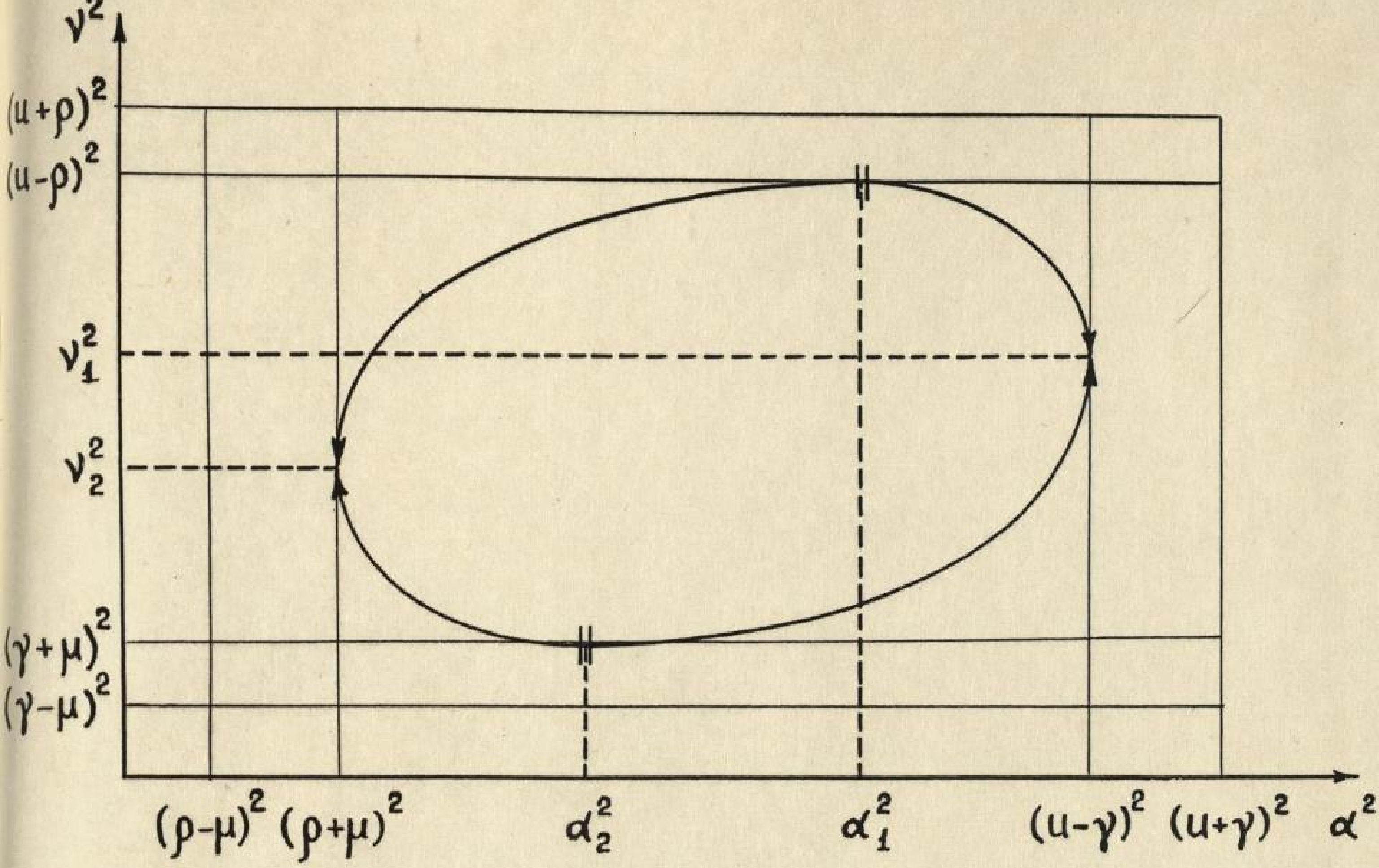
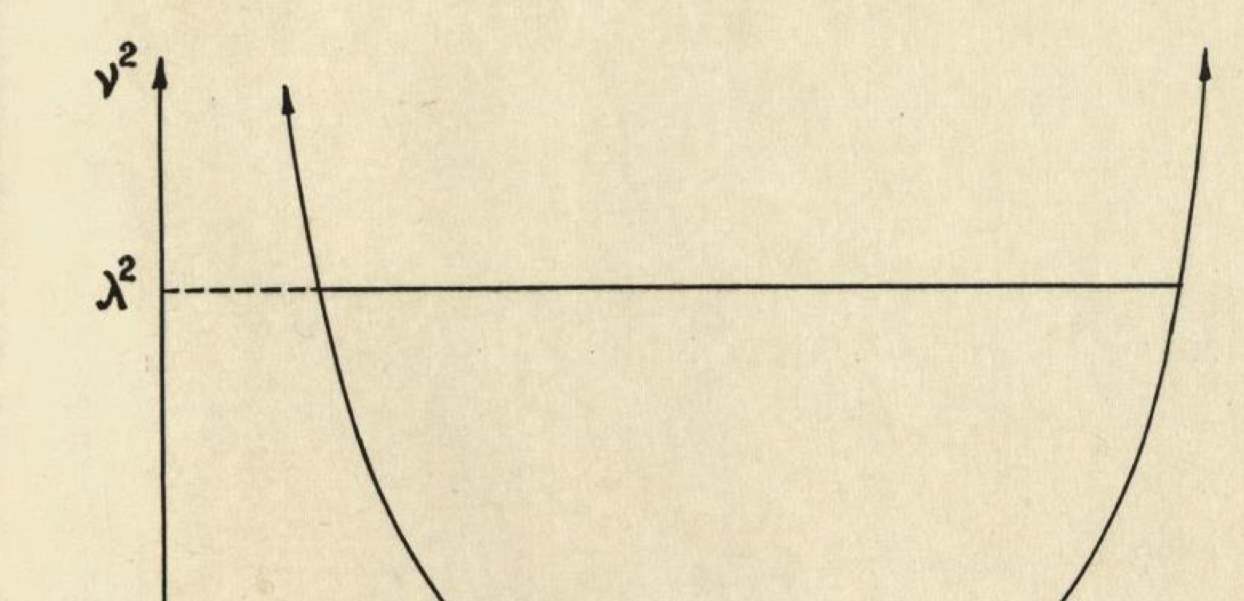


Рис.13.



ν^2
$(u+\rho)^2$
$(u-\rho)^2$
ν_1^2
ν_2^2
$(\gamma+\mu)^2$
$(\gamma-\mu)^2$
$(\rho-\mu)^2$
$(\rho+\mu)^2$
α_2^2
α_1^2
$(u-\gamma)^2$
$(u+\gamma)^2$
α^2

Рис.I.



ν^2
λ^2
$(\gamma+\mu)^2$
$(\gamma-\mu)^2$
k_2^2
k^2

Рис.II.