Федеральное агентство по образованию
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Б. Иванов

ТЕОРИЯ ВОЛН

Курс лекций

ИРКУТСК 2006

УДК 22.33
ББК 537.68

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук М. В. Тинин,
д-р физ.-мат. наук А. П. Потехин

Иванов В. Б. Теория волн : курс лекций. – Иркутск : Иркут. ун-т, 2006. – 210 с.

В краткой форме изложены общие вопросы теории волновых явлений разнообразной физической природы. Основное внимание уделено анализу волнового уравнения и процессам распространения волн в различных средах.

Для студентов, магистрантов и аспирантов физических специальностей университетов.

Библиогр. 10 назв.

Оглавление

Предисловие

Изучение волновых явлений чрезвычайно важно как с точки зрения решения актуальных практических задач, так и в плане теоретических исследований. Достаточно указать, например, на то, что вопросы распространения радиоволн крайне важны для проектирования и эксплуатации современных систем связи. С другой стороны, волновая физика является одной из фундаментальных основ, в частности, квантовой теории. Таким образом, области применений волновой физики самые разнообразные. Соответственно, разнообразны и подходы к обучению в вузах дисциплинам, связанным с волнами.

Весьма обширный список учебной литературы, посвященной волнам, может быть условно разбит на три группы. Первая группа ориентирована на технический подход к изучаемым явлениям. Примером может служить книга [1]. В таком подходе волновые процессы рассматриваются в первую очередь в плане распространения радиоволн различных диапазонов и в различных условиях. Во второй группе волны рассматриваются, прежде всего, с точки зрения оптики. Среди недавно изданных учебных пособий этой группы можно указать на книгу [2]. Наконец, третья группа ориентируется на рассмотрение фундаментальных теоретических основ волновых явлений. Именно этот подход в наибольшей степени соответствует, с нашей точки зрения, учебным курсам, читаемым для студентов физических специальностей университетов. И именно такую направленность представляет данное учебное пособие.

В соответствии с названием монографии в основу данной книги лег курс лекций, читаемых автором для студентов специальности *радиофизика* физического факультета Иркутского государственного университета. Как при подготовке курса, так и при написании учебного пособия автору пришлось достигать некоторого компромисса. С одной стороны, необходимо отразить наиболее важные моменты из широчайшего круга теоретических аспектов волновой физики. С другой стороны, следует ограничиться подбором материала в рамках отведенного объема учебного курса.

Хотя в книге в немалой степени использован индивидуальный авторский подход к представлению учебного материала, курс, разумеется, базируется на целом ряде ранее изданных учебных пособиях и монографиях. Наиболее близкими по концепции курса являются книги [3, 4]. Необходимо подчеркнуть, что эти издания являются достаточно старыми (отчего они, конечно, не стали хуже) и, очевидно, далеко не везде легко доступны. Отметим, что в настоящее время хорошие издания прошлых лет переиздаются недопустимо редко, но даже если это и происходит, то тиражи таких переизданий весьма ограничены. Представляемый учебник, будем надеяться, в какой-то степени позволит восполнить этот недостаток. Для изложения ряда специальных вопросов были использованы соответствующие разделы книг [5, 6]. Кроме того, рассматривая перечисленные издания в качестве списка рекомендуемой литературы, к нему следует добавить следующие три наименования [7, 8, 9*б*, 10].

Во вводном разделе книги приводятся и кратко описываются базовые понятия из теории колебаний, необходимые для перехода к рассмотрению волновой физики. Далее делается попытка продемонстрировать единство описания волн путем формирования волнового уравнения на основе различных физических процессов. Представляются основные методы решения волнового уравнения. Следующая глава посвящена фундаментальным понятиям теории волн – фазовой и групповой скорости, дисперсии. Среди всего многообразия волновых явлений наибольшее внимание в книге уделено электромагнитным волнам, рассмотрению которых и посвящена очередная глава. В двух следующих разделах изучается распространение волн в средах с резкими границами и плавно неоднородных средах, соответственно. Далее, в основном на примере замагниченной плазмы, рассматривается влияние на распространение волн анизотропии среды. В следующей главе описываются волны и колебания в волноводах и объемных резонаторах. Предпоследний раздел объединяет рассмотрение «классических» волновых явлений дифракции и интерференции. Наконец, последняя глава посвящена наиболее современным аспектам волновой физики – нелинейным волнам.

Представляемый курс ориентирован на студентов физических специальностей вузов, аспирантов и молодых ученых, специализирующихся в соответствующих направлениях.

Основные понятия теории колебаний

Теория волновых явлений является продолжением и расширением теории колебаний, основные сведения из которой представляются в данном разделе в качестве введения. Будем называть процессом изменение во времени некоторой физической величины безотносительно ее изменений в пространстве. В качестве такой величины может выступать любой измеряемый или описываемый математически параметр объекта или системы – ток в участке электрической цепи (скалярная величина), напряженность электрического поля в данной точке пространства (векторная величина), проводимость замагниченной плазмы (тензор) и т. д. С математической точки зрения процесс описывается функцией $F(t)$ одной переменной t – времени.

Периодический, колебательный процесс, или просто колебание – процесс, повторяющийся во времени. Если период повторения составляет промежуток времени T, то для него справедливо тождество:

$$F(t \pm nT) \equiv F(t), \tag{1}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots \infty$. Пример графика периодического процесса представлен на рис. 1.

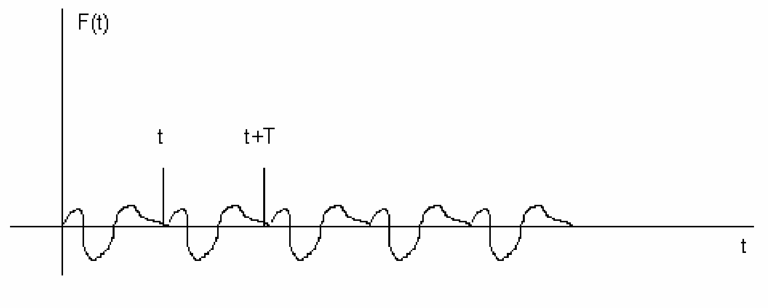


Рис. 1. Пример графика периодического процесса

Величина, обратная периоду колебаний $f = 1/T$, называется частотой. Она показывает, сколько раз процесс повторяется в единицу времени и измеряется в герцах (Гц). Здесь и далее основной системой единиц физических величин является система СИ.

Гармоническим колебанием называется периодический процесс, в котором рассматриваемая величина изменяется во времени по гармоническому закону, то есть описывается тригонометрической функцией косинуса или синуса. В силу известного тригонометрического соотношения, позволяющего перейти от синуса к косинусу добавлением к аргументу величины $\pi/2$, мы можем без потери общности ограничиться рассмотрением косинусоидальных зависимостей. Тогда гармоническое колебание может быть представлено в виде:

$$F(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{2}$$

Величина A называется амплитудой колебаний и задает диапазон изменения рассматриваемого параметра от минимального значения $-A$ до максимального значения $+A$ – размах колебаний. Аргумент тригонометрической функции, безразмерная величина $\varphi = \omega t + \varphi_0$ является мгновенным значением фазы колебания. Фаза в начальный момент времени $t = 0$, равная φ_0, называется начальной фазой. Фазу принято измерять в радианах. Аргумент функции можно представить в несколько ином виде: $2\pi t/T + \varphi_0$. Отсюда следует, что значение множителя перед временем связано с частотой соотношением $\omega = 2\pi f$. Этот множитель называют круговой или циклической частотой, и единицей ее измерения является обратная секунда c^{-1}.

Квазипериодическим процессом называется процесс, который повторяется во времени приближенно и при не слишком больших n:

$$F(t \pm nT) \approx F(t). \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что понятие «приближенно» требует уточнения для каждого конкретного вида процесса. Важную роль в теории колебаний играют квазипериодические процессы, называемые слабозатухающими и слабонарастающими колебаниями. Для таких процессов амплитуда рассматривается не как постоянная величина, а как функция времени, медленно меняющаяся по сравнению с изменением тригонометрической функции. В этом случае процесс можно описать выражением:

$$F(t) = A_0 e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (4)$$

Величина A_0 представляет собой начальную амплитуду колебаний, а величина γ характеризует скорость нарастания или затухания колебаний. В первом случае $(\gamma > 0)$ эта величина называется инкрементом, во втором – декрементом. Условием квазипериодичности процесса является то, что модуль инкремента или декремента должен быть много меньше частоты колебаний. В противном случае процесс называется ангармоническим.

На рис. 2 представлены графики слабозатухающего, слабонарастающего, и ангармонического колебаний. Здесь время изменяется в пределах от 0 до 6π, циклическая частота равна 1 c^{-1}, декремент/инкремент составляет –0,01, +0,01 и –1 c^{-1}, соответственно.

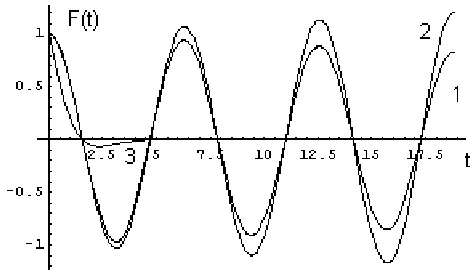


Рис. 2. Графики слабозатухающего (1), слабонарастающего (2) и ангармонически затухающего (3) колебаний

Безразмерную величину $\theta = \gamma T$ называют логарифмическим декрементом или инкрементом. Ее числовое значение показывает, за сколько периодов колебаний их амплитуда уменьшится или увеличится в e раз. В частности, если $\theta = 1$, то колебание затухает в e раз уже за один период. Очевидно, при этом процесс следует считать апериодическим (ангармоническим).

Для колебательных систем с диссипацией (потерями энергии) вводится еще одна безразмерная величина – добротность системы. Ее численное значение определяется соотношением $Q = \pi/\theta$. Это – энергетическая характеристика, показывающая, за сколько периодов энергия, первоначально запасенная в системе, уменьшится в e раз. Можно дать и несколько иное определение для добротности. Величина Q показывает, во сколько раз энергия в колебательной системе больше энергии, ею теряемой из-за диссипации за один период.

Квазипериодический колебательный процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением колебаний:

$$\frac{d^2F}{dt^2} + 2\gamma\frac{dF}{dt} + \omega_0^2 F = 0. \qquad (5)$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в виде:

$$F(t) = e^{-\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \qquad (6)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные, определяемые начальным значением функции F и начальным значением ее производной по времени. Частота ω определяется соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4.} \qquad (7)$$

Можно представить общее решение и в чисто вещественном виде:

$$F(t) = e^{-\gamma t}(P\cos(\omega t) + Q\sin(\omega t)), \qquad (8)$$

где P и Q – вещественные константы, также определяемые начальными условиями. Такое описание принято называть представлением колебаний в виде квадратурных компонентов (косинус-компонента и синус-компонента).

Кроме того, общее решение может быть построено с использованием амплитуды и начальной фазы так, как это представлено в формуле (4). В этом случае роль произвольных постоянных играют начальная амплитуда и начальная фаза.

Все указанные формы представления решения уравнения колебаний эквивалентны – могут быть преобразованы друг в друга, и каждая из них широко используется в различных приложениях.

Дифференциальное уравнение (5) является линейным, следовательно, для процессов, им описываемых, имеет место принцип суперпозиции. Это означает тот факт, что совместное действие нескольких колебаний представляет собой алгебраическую сумму всех составляющих. Рассмотрим два колебания с одинаковой частотой, различными амплитудами и различными начальными фазами:

$$F_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \tag{9}$$

$$F_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \tag{10}$$

Обозначим разность фаз колебаний величиной $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. При этом суммарное колебание удобно представить с помощью операции векторного сложения исходных процессов. Представим первое колебание в виде вектора, ориентированного, например, горизонтально и имеющего длину, равную амплитуде колебания. Второй процесс будет изображаться вектором, имеющим соответствующую длину и повернутый относительно первого на угол α. Тогда суммарное колебание изобразится вектором, равным сумме первого и второго векторов, как это показано на рис. 3.

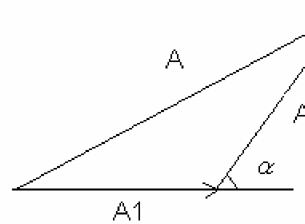


Рис. 3. Векторное сложение колебаний

По известной теореме косинусов из геометрии (рис. 3) можно определить амплитуду суммарного колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\alpha}. \qquad (11)$$

При необходимости можно рассчитать и фазу суммарного колебания.

Принцип суперпозиции позволяет описать важное физическое явление – биение колебаний. Рассмотрим сумму двух колебаний, имеющих одинаковые амплитуды, но немного отличающихся по частоте:

$$F_1(t) = A\cos(\omega_1 t), \qquad (12)$$

$$F_2(t) = A\cos(\omega_2 t). \qquad (13)$$

Разность частот считается много меньшей каждой из исходных частот $|\omega_2 - \omega_1| << \omega_2, \omega_1$. Воспользуемся известным тригонометрическим тождеством:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}). \qquad (14)$$

Обозначив величину $(\omega_2 + \omega_1)/2$ через ω, а $(\omega_2 - \omega_1)/2$ – через Ω, мы можем записать формулу для суммарного процесса в виде:

$$F(t) = 2A\cos(\Omega t)\cos(\omega t). \qquad (15)$$

Последний сомножитель здесь представляет собой высокочастотное колебание, а все остальное можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду, которая также представляет собой периодическую функцию времени, однако с существенно меньшей частотой. Графическое представление биений колебаний показано на рис. 4.

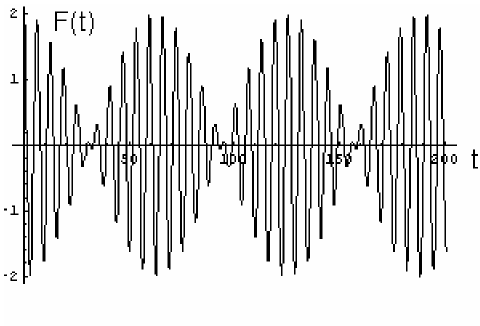


Рис. 4. График биения колебаний

Здесь показана сумма двух колебаний единичной амплитуды с циклическими частотами, составляющими 0,95 и 1,05 обратных секунд. В радиотехнике такое колебание называется амплитудно-модулированным. В данном случае имеет место 100-процентная модуляция, то есть амплитуда меняется во времени от максимального значения, равного 2, до нулевого уровня. Частичная, или неполная, модуляция имела бы место, если бы амплитуды складываемых колебаний отличались друг от друга.

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

В отличие от процессов – изменений физических величин только во времени, волновые явления разворачиваются как во времени, так и в пространстве. В этом случае говорят о волновых полях. В общем случае поле задается функцией многих переменных, одной из которых является время t, а остальные представляют собой пространственные координаты. В зависимости от характера рассматриваемой задачи поля могут быть одномерными, зависящими от одной координаты, двухмерными или трехмерными. Обозначив через $\vec{r}$ радиус-вектор точки в пространстве, можно задавать поле функцией $F(\vec{r}, t)$. Аналогично процессам, поля могут быть скалярными, векторными или тензорными. Поскольку, работая с полями, мы имеем дело с функциями нескольких переменных, математический аппарат волновых явлений базируется на использовании частных производных, и вместо обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем оперировать дифференциальными уравнениями в частных производных. Основным объектом этого математического аппарата является волновое уравнение, к рассмотрению которого мы и переходим в данной главе. Здесь мы рассмотрим ряд явлений из различных областей физики, описание которых сводится к универсальной математической форме – волновому уравнению.

1.1. Поперечные волны в струне

Рассмотрим следующую модель. Имеется натянутая струна, закрепленная на концах и ориентированная в равновесном состоянии вдоль оси x двухмерной декартовой системы координат. В начальный момент времени некоторый участок струны имеет малое поперечное (вдоль оси y) отклонение от равновесного положения. Необходимо дать математическое описание динамики струны. Геометрия задачи изображена на рис. 1.1. Здесь, в существенно увеличенном по оси y масштабе, представлен отклоненный участок струны.

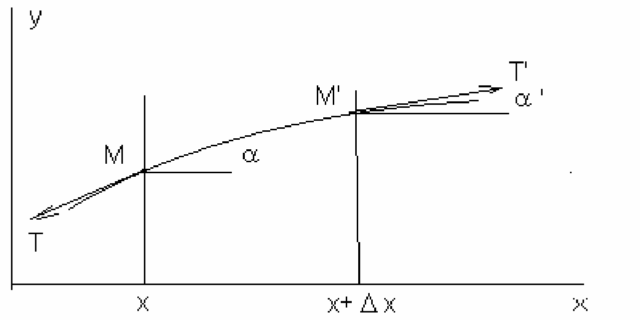


Рис. 1.1. К выводу уравнения волн в струне

На участке струны рассмотрим две близко расположенные точки *M* и *M'*, горизонтальные координаты которых разнесены на малое расстояние Δx. Проанализируем вертикальное движение участка струны *MM'*, массу которого обозначим через m. Вертикальное ускорение этого участка $\partial^2 y / \partial t^2$ обусловлено действием вертикальной силы. Если струна растянута с силой *T*, в любой точке струны, действующей по касательной к струне, то, как можно видеть из рисунка, результирующая вертикальная сила равна разности y-проекций сил, приложенных к точкам *M* и *M'*. Поскольку модуль силы натяжения вдоль всей струны постоянен, действующая вертикальная составляющая силы натяжения может быть представлена в виде:

$$T'\sin(\alpha') - T\sin(\alpha) = T(\sin(\alpha') - \sin(\alpha)). \qquad (1.1)$$

Кроме того, учтем силу трения, действующую на элемент струны. Будем считать, что сопротивление трения пропорционально длине участка, пропорционально скорости и направлено против скорости. Если коэффициент пропорциональности равен a, то вертикальная сила трения будет записана следующим образом:

$$-a\Delta x\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Введем величину линейной плотности струны – массу, отнесенную к единице длины ρ = m/Δx.

Уравнение вертикального движения участка (второй закон Ньютона) струны после элементарных преобразований можно записать в форме:

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\sin(\alpha') - \sin(\alpha)}{\Delta x} - a\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Теперь воспользуемся тем, что отклонения струны от равновесного положения малы. При этом углы α и α’ также малы, а для малых углов

$$\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x}, \tag{1.4}$$

– по определению тангенс угла наклона касательной к кривой равен производной функции. Тогда уравнение (1.3) можно записать в виде:

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\Delta x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}|_{M'} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{M}\right) - a\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Разность в скобках в первом слагаемом правой части (1.5) есть не что иное, как приращение производной ∂y/∂x при переходе от точки M к точке M’. Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, в этом слагаемом будем иметь вторую производную от y по x. Таким образом:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a \frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (1.6)$$

Введя новые обозначения $c = \sqrt{T/\rho}$ и $\beta = a/\rho$, можно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (1.7)$$

Следует особо обратить внимание на то, что последнее слагаемое, содержащее первую производную по времени, обязано своим происхождением учету диссипации (трения) в модели. Без учета трения $(a = 0)$ уравнение (1.7) примет вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (1.8)$$

Именно это уравнение и принято называть волновым уравнением в каноническом виде. С математической точки зрения волновое уравнение является линейным дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

Согласно введенным обозначениям величина c, квадрат которой входит множителем перед второй производной по координате, имеет размерность скорости. Эта скорость полностью определяется свойствами среды, в которой распространяется волна – силой натяжения струны и линейной плотностью струны.

Подведем первые итоги. Изучаемое волновое поле является одномерным – имеется одна пространственная координата x, вдоль которой, как мы увидим далее, происходит распространение волны. В рассматриваемой модели мы имеем дело с поперечными волнами – волновое поле есть не что иное, как поперечное смещение участка струны относительно направления распространения волн. Учет диссипации приводит к появлению в волновом уравнении члена, содержащего первую производную от искомой функции по времени.

1.2. Продольные волны в газе

По сути дела, речь в данном разделе идет о звуковых волнах, которые представляют собой распространяющиеся в пространстве периодические малые возмущения давления в газе. Следует сразу отметить, что приведенное ниже описание выполнено для весьма идеализированной модели процессов. В частности, рассматривается именно идеальный газ, условия изотермичности.

Рассмотрение следует начать с уравнения непрерывности, количественно описывающего закон сохранения какой-либо физической величины – в данном случае количество частиц газа. Если концентрацию частиц (количество частиц в единице объема) в данной точке пространства $\vec{r}$ и в данный момент времени t обозначить как $N(\vec{r}, t)$, а плотность потока частиц (количество частиц, проходящих через единицу площади за единицу времени) определить как вектор $\vec{P}(\vec{r}, t)$, то уравнение непрерывности будет иметь вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + div\vec{P} = Q - L, \tag{1.9}$$

где $Q(\vec{r}, t)$ представляет собой мощность источника частиц – количество частиц, образующихся в единице объема за единицу времени, $L(\vec{r}, t)$ – мощность потерь, количество частиц, исчезающих в единице объема за единицу времени. Смысл уравнения непрерывности очень прост. Концентрация частиц изменяется во времени за счет рождения частиц, их исчезновения и разности количества втекающих в единицу объема и вытекающих из него частиц – дивергенции плотности потока. Здесь и в большинстве следующих примеров мы не будем рассматривать процессы рождения частиц и их исчезновения. При этом и Q и L полагаются равными нулю.

Теперь нам снова понадобится уравнение движения, которое запишем в форме:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}. \tag{1.10}$$

Здесь M – масса единичного объема газа, $\vec{V}$ – средняя направленная гидродинамическая скорость частиц в газе, $\vec{F}$ – сила, действующая на объем.

Как известно, плотность потока частиц может быть выражена через концентрацию и среднюю скорость: $\vec{P}$ = $N\vec{V}$. Что касается сил, то здесь необходимо обратиться к гидродинамической теории. В динамике жидкостей и газов первостепенную роль играет специфическая сила – сила градиента давления. Эта сила имеет следующую природу. Если, к примеру, на верхней грани выделенного объема газа или жидкости давление больше, чем на нижней, то объем испытывает действие силы, направленной сверху вниз и пропорциональной разности давлений. В общем виде сила градиента давления определяется формулой:

$$\vec{F}=-grad(p)=-\nabla p, \tag{1.11}$$

где p – давление, в нашем рассмотрении, газа.

Для идеального газа, рассмотрением которого мы ограничимся, имеет место связь давления с концентрацией и температурой T газа: $p = kNT$. Здесь константа k – постоянная Больцмана.

Наконец, здесь и в дальнейшем нам понадобится эйлерово представление полной временной производной через частные производные по времени и пространственным координатам. Применительно к формуле (1.10) полная производная скорости по времени будет записана в виде:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}div\vec{V}. \tag{1.12}$$

Последнее слагаемое в правой части называют нелинейным ускорением. Действительно, скорость здесь входит в произведение ее самой на ее дивергенцию. В задачах исследования малых возмущений, в том числе и волновой природы, нелинейное ускорение обычно мало в сравнении с первым слагаемым правой части, и далее, вплоть до главы, посвященной нелинейным волнам, мы нелинейным ускорением будем пренебрегать.

Далее будем снова рассматривать одномерную задачу – усредненное движение частиц происходит в одном направлении вдоль оси *x*. Тогда одномерное уравнение движения будет представлено формулой:

$$\frac{\partial}{\partial t}(NV)=-\frac{kT}{m}\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{1.13}$$

где определена масса частицы газа m так, что $M = mN$.

Уравнение непрерывности можно переписать теперь следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(NV)=-\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{1.14}$$

Возьмем частную производную по координате от уравнения (1.13) и частную производную от уравнения (1.14) по времени. Тогда левые части уравнений будут одинаковыми, следовательно, равны и правые части:

$$\frac{kT}{m}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}. \qquad (1.15)$$

Множитель перед производной в левой части $c^2 = kT/m$ имеет размерность квадрата скорости. Скорость c в данном случае есть скорость теплового движения частиц в газе. Таким образом, мы снова приходим к волновому уравнению, по форме полностью совпадающему для уравнения волн в струне (1.8). В то же время отметим, что в данном разделе рассмотрено явление совершенно иной физической природы.

В отличие от волн в струне, здесь мы пришли к описанию продольных волн. Действительно, скорость смещения V в нашей модели направлена по координатной оси x, вдоль которой и распространяется волна. Заметим, что в уравнении (1.15) отсутствуют первые производные, поскольку мы не включали в рассмотрение какие-либо диссипативные процессы.

1.3. Ленгмюровские колебания и ленгмюровские волны

В данном разделе мы получим уравнение колебаний и волновое уравнение, описывающие некоторые периодические явления в плазме. Снова, как и в предыдущем разделе, будем рассматривать идеализированную картину. Плазму будем считать идеальным газом свободных электронов и ионов. И также не будем рассматривать процессы энергообмена.

В силу того, что масса электрона m много меньше массы иона M, мы можем рассматривать ионы неподвижными и учитывать движение только электронов. В целом плазма электрически нейтральна, концентрация электронов N равна концентрации ионов. Однако локальные малые нарушения равенства концентраций положительных и отрицательных зарядов могут иметь место, вследствие чего в плазме могут возникать локальные флуктуации объемного заряда.

Мысленно выделим в объеме плазмы две параллельные плоскости с площадью *A*. Перпендикулярно плоскостям сориентируем ось координат *x*, вдоль которой и будем рассматривать одномерное движение электронов. Геометрия задачи представлена на рис. 1.2.

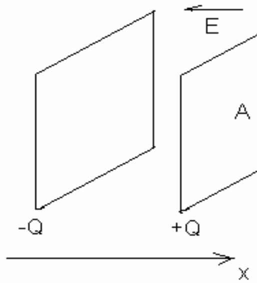


Рис. 1.2. Образование плазменных колебаний

Считаем, что в некоторый момент времени в силу, например, тепловых флуктуаций на левой плоскости сформировался избыток электронов с суммарным зарядом $-Q$. В силу общей электронейтральности на правой плоскости должен сформироваться недостаток электронов – положительный заряд $+Q$. В результате в нашем воображаемом конденсаторе возникло электрическое поле с вектором напряженности $\vec{E}$, направленным по оси *x*. Согласно формулам электростатики, поле в плоском конденсаторе будет определяться формулой:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \qquad (1.16)$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

Поскольку на заряд q (в нашем случае на заряд электрона $-e$) действует сила qE, можно записать уравнение движения заряда:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=qE. \tag{1.17}$$

При смещении зарядов на расстояние x на плоскость «осядет» общий заряд Q, равный $N\Delta Vq$, где N – концентрация плазмы, ΔV – объем прямоугольного параллелепипеда с высотой x и с основанием A. Таким образом, $Q = NAxq$. Отсюда получаем выражение для смещения $x = Q/(NAq)$. Подставив последнее соотношение в уравнение движения (1.17) и использовав формулу (1.16), получим следующее уравнение колебаний:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}Q. \tag{1.18}$$

Учитывая то, что мы рассматриваем носителями зарядов электроны $(q^2 = e^2)$ и введя обозначение $\omega_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$, представим последнее уравнение в окончательном виде:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=-\omega_p^2Q. \tag{1.19}$$

Величина ω_p имеет размерность частоты и называется ленгмюровской, или плазменной, частотой, а уравнение (1.19) называется уравнением ленгмюровских, или плазменных, колебаний. Физика таких колебаний, впервые рассмотренная Ленгмюром, достаточно проста. Возникший, по каким-то причинам некомпенсированный объемный заряд, допустим, положительного знака посредством электрического поля притягивает окружающие электроны, которые компенсируют недостачу своей концентрации.

Далее, в силу инерции, электроны продолжают поступать в рассматриваемую область, создавая уже избыточный отрицательный заряд, и события развиваются в противоположной фазе, и так далее. Отметим, что плазменная частота зависит от единственной характеристики плазмы – ее концентрации.

Рассмотрение плазменных колебаний позволяет нам теперь перейти к плазменным волнам. Исходными уравнениями будут уравнение непрерывности для электронного газа в отсутствии источников и потерь частиц:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + div(N\vec{V}) = 0 \qquad (1.20)$$

и уравнение движения для единицы объема газа без учета нелинейного ускорения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mN\vec{V}) = -eN\vec{E} - grad(kNT_e). \qquad (1.21)$$

Здесь в левой части под знаком производной стоит импульс единицы объема, а справа, наряду с силой градиента давления, учтена сила, действующая на заряд объема со стороны электрического поля. Индекс «*e*» указывает на температуру газа электронов.

К приведенным уравнениям необходимо добавить еще одно – уравнение для напряженности электрического поля. Мы будем рассматривать только потенциальное поле так, что в качестве замыкающего систему может быть взято уравнение Пуассона:

$$div(\vec{E}) = \rho / \varepsilon_0 = -eN / \varepsilon_0, \qquad (1.22)$$

где ρ обозначает объемную плотность заряда.

К системе уравнений (1.20)–(1.22) применим так называемую процедуру линеаризации. Будем рассматривать малые отклонения параметров от их невозмущенных (равновесных) значений. Последние будем маркировать индексом 0, а возмущения снабдим верхним индексом «'».

$$\begin{aligned} &N = N_0 + N', \\ &\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \\ &\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E}'. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Считаем, что штрихованные значения много меньше соответствующих невозмущенных, например, $N' << N_0$. Подставим (1.23) в исходную систему и вычтем из полученных уравнений уравнения (1.20)–(1.22) для переменных с индексами 0 – для невозмущенных величин исходная система, разумеется, выполняется. Линеаризация заключается в том, что в полученной после вычитания системе можно не учитывать члены второго порядка малости по сравнению с членами первого порядка. В частности, $div(N'V') << div(N_0V')$. Линеаризованная система, после вычитания из нее соответствующих уравнений для невозмущенных величин, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &mN_0 \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = -eN_0 \vec{E}' - kT_e N', \\ &\frac{\partial N'}{\partial t} + div(N_0 \vec{V}') = 0, \\ &div \vec{E}' = -eN' / \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ограничимся, как и ранее, одномерной задачей, рассматривая движение по оси x. В этом случае последняя система перепишется в виде:

$$mN_0\frac{\partial V'}{\partial t}=-eN_0E'-kT_e\frac{\partial N'}{\partial x},$$
$$\frac{\partial N'}{\partial t}+N_0\frac{\partial V'}{\partial x}=0, \qquad (1.25)$$
$$\frac{\partial E'}{\partial x}=-\frac{eN'}{\varepsilon_0}.$$

Продифференцируем первое из уравнений (1.25) по x и подставим в него значение $\partial E'/\partial x$, полученное из третьего уравнения, исключив, таким образом, из системы электрическое поле:

$$mN_0\frac{\partial^2 V'}{\partial t\partial x}=\frac{e^2N_0}{\varepsilon_0}N'-kT_e\frac{\partial^2 N'}{\partial x^2}. \qquad (1.26)$$

Второе уравнение в (1.25) продифференцируем по времени и полученную из него смешанную производную $\frac{\partial^2 V'}{\partial t\partial x}$ подставим в (1.26). В результате из системы исключится и скорость, и мы будем иметь единственное уравнение:

$$\frac{\partial^2 N'}{\partial t^2}=\frac{kT_e}{m}\frac{\partial^2 N'}{\partial x^2}-\frac{e^2N_0}{m}N'. \qquad (1.27)$$

Можно видеть, что коэффициентом при второй производной по координате стоит квадрат тепловой скорости электронного газа $c_e^2 = kT_e/m$, а в последнем слагаемом коэффициент при N' является квадратом плазменной частоты. Окончательно перепишем полученное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 N'}{\partial t^2} = c_e^2 \frac{\partial^2 N'}{\partial x^2} - \omega_p^2 N'. \qquad (1.28)$$

К анализу данного соотношения мы вернемся в дальнейшем, а сейчас отметим, что здесь в правой части содержится слагаемое волновой природы и колебательное слагаемое, обусловленное наличием у плазмы собственной резонансной частоты.

1.4. Упругие волны в твердом теле

В кристаллической решетке твердого тела атомы или молекулы вещества, расположенные в узлах решетки, могут колебаться около положения равновесия. Тогда для цепочки частиц, находящихся на одной из осей решетки – выделенном направлении x, можно использовать следующую модель. Атомы или молекулы представим в виде шариков с массой m, соединенных между собой упругими пружинками с коэффициентом упругости K. В равновесном состоянии длина пружинки (расстояние между массами) составляет величину a. Частицы могут немного смещаться относительно начального положения, сжимая и растягивая соседние пружинки. Координаты масс обозначим через x_i, где i – номер частицы в цепочке. Геометрия модели показана на рис. 1.3.

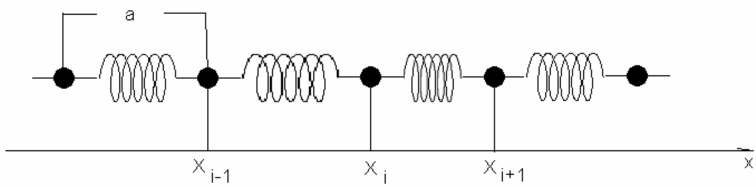


Рис. 1.3. Модель упругих колебаний в твердом теле

Рассмотрим массу с номером i, смещенную вправо от своего равновесного положения. Находящаяся слева пружинка растянута, а пружинка справа – сжата. Пружинки действуют на i-ю массу с силами, определяемыми законом Гука. Нетрудно написать уравнение движения рассматриваемого шарика:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = K(a-(x_i - x_{i-1})) + K((x_{i+1} - x_i) - a) = K(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}). \tag{1.29}$$

Введя линейную плотность вещества $\rho = m/a$, мы «размазываем» дискретные массы шариков по длине цепочки. Кроме того, нам понадобится «размазать» и упругость пружинок. Коэффициент упругости K соответствует упругости пружинки с заданной длиной. Очевидно, этот коэффициент уменьшается с увеличением длины пружинки – длинную пружинку легче сжать на одну и ту же абсолютную длину, нежели короткую. В этой связи упругость материала пружинки (а не самой пружинки) будет задаваться величиной $k = Ka$. Тогда уравнение (1.29) мы перепишем следующим образом, снова пренебрегая нелинейным ускорением:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{k}{a}\frac{1}{\rho a}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) = \frac{k}{\rho}\frac{(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})}{a^2}. \tag{1.30}$$

Теперь необходимо сделать предельный переход, устремив a к нулю. Нетрудно видеть, что при этом последняя дробь в правой части выражения (1.30) переходит во вторую производную координаты i-го шарика по пространственной переменной. Переобозначив координату шарика (уже без индекса) символом r, и введя новую величину с размерностью скорости $s = \sqrt{k/\rho}$, мы снова придем к волновому уравнению канонического вида:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = s^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}. \qquad (1.31)$$

В данном случае уравнение описывает упругие продольные волны механического сжатия (напряжения) в твердом теле.

1.5. Электрические волны в проводящей линии

Объектом следующего описания является так называемая проводящая линия. По сути дела, проводящей линией может быть обычная двухпроводная линия, для которой учитывается активное сопротивление проводников, их индуктивность и электрическая емкость. Эквивалентная электрическая схема участка такой линии представлена на рис. 1.4.

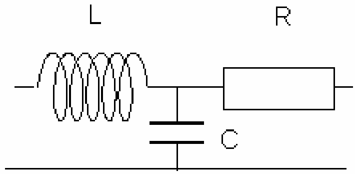


Рис. 1.4. Эквивалентная схема проводящей линии

Всю линию можно представить как последовательное соединение таких отдельных ячеек длиной Δx. Тогда имеет смысл говорить о погонных индуктивностях, сопротивлениях и емкостях – соответствующих величинах, отнесенных к единице длины.

Падение напряжения ΔU на длине отдельной ячейки складывается из падения на активном сопротивлении и на индуктивности. При этом оно пропорционально длине ячейки. Если рассматривать R, L, и C именно как погонные значения и обозначить через I силу тока в ячейке, то, по закону Ома:

$$\Delta U = \Delta x(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}). \tag{1.32}$$

Разделив обе части уравнения на Δx и перейдя к пределу $\Delta x \to 0$, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{1.33}$$

Изменение тока на длине ячейки за счет его прохождения через емкость составляет:

$$\Delta I = \Delta x C\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1.34}$$

В предельном переходе, аналогично предыдущему уравнению, будем иметь:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1.35}$$

Введем новую функцию W, такую, что $\partial W/\partial x = U$. Тогда последнее уравнение можно представить в форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(I - C\frac{\partial W}{\partial t}) = 0. \tag{1.36}$$

Выражение в скобках будет являться константой в том смысле, что оно не зависит от x. Можно показать, что для получения периодических в пространстве и во времени решений необходимо выбрать эту константу равной нулю. Тогда $I = C\,\partial W/\partial t$.

Подставим последнее соотношение в (1.33) и получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} = L\frac{\partial}{\partial t}(C\frac{\partial W}{\partial t}) + RC\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{1.37}$$

После простейших преобразований последнюю формулу запишем в виде волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{R}{L}\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{1.38}$$

где $V = 1/\sqrt{LC}$ – специфическая для рассматриваемой системы скорость.

Таким образом, в проводящей линии электрические величины (ток и напряжение) также могут иметь волновую природу. Обратим внимание на то, что наличие в системе активного сопротивления приводит к диссипации энергии, что, как и следовало ожидать, отразилось в волновом уравнении присутствием первой производной с множителем, пропорциональным *R*.

1.6. Уравнение для электромагнитных волн в вакууме

В вакууме, в отсутствие каких бы то ни было зарядов и токов пара уравнений Максвелла выглядит следующим образом:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1.39}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{1.40}$$

Сразу уточним основную терминологию, относящуюся к электромагнитным полям. Вектор $\vec{E}$, характеризующий воздействие поля на заряд, есть вектор напряженности электрического поля. Вектор $\vec{B}$, характеризующий воздействие поля на элемент тока называется вектором магнитной индукции. Вектор электрической индукции $\vec{D}$ – результирующее электрическое поле в среде, индуцированное наложенным полем $\vec{E}$. В то же время, в силу исторических причин, наоборот, вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ есть результирующее магнитное поле в среде, наведенное внешним полем $\vec{B}$.

Связи между рассматриваемыми векторами задаются так называемыми материальными уравнениями, которые в вакууме имеют форму:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Здесь участвует уже упомянутая электрическая постоянная и магнитная постоянная μ_0.

Применим операцию ротора к левой и правой частям уравнения (1.39). Выразим в правой части $\vec{D}$ через $\vec{E}$.

$$rot rot \vec{H} = \varepsilon_0 rot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (1.42)$$

Теперь, поменяв в правой части последнего соотношения местами операторы ротора и временной производной, выразив $rot \vec{E}$ из уравнения (1.40) и воспользовавшись вторым из соотношений (1.41), получим:

$$rot rot \vec{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \qquad (1.43)$$

Из векторного анализа известно соотношение для операции взятия ротора от ротора *rot rot* = *grad div* – ∇^2. Тогда, ввиду того, что $div \vec{H} = 0$ (отсутствие в природе магнитных зарядов – монополей Дирака), можно (1.43) придать вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{H}. \qquad (1.44)$$

Здесь комбинация мировых констант $1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, как известно, дает также хорошо известную мировую константу *c* – скорость света в вакууме.

Последнее уравнение записано в векторном виде. Оператор ∇^2 можно расписать в произвольной системе координат. В частности, в одномерном случае в декартовой системе он представляется как $\partial^2 / \partial x^2$. Если волна распространяется вдоль оси *x*, то вектор напряженности магнитного поля будет иметь только ортогональный к этой оси компонент. Это следует хотя бы из того, что $div\vec{H}=0$. Уравнения, аналогичные (1.44), можно получить и для любого из остальных компонентов электромагнитного поля. Сопоставив этот факт, например, с видом уравнения (1.39), можно заключить, что вектора $\vec{H}$, $\vec{D}$ и вектор $rot\vec{H}$ – вектор направления распространения волны, составляют взаимно ортогональную тройку. Таким образом, здесь мы имеем дело с поперечными волнами.

2. РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

2.1. Формальные решения одномерного уравнения

Итак, в предыдущей главе показано, что разнообразные физические модели сводятся к их описанию с помощью однотипного уравнения, которое в одномерном случае еще раз запишем таким образом:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (2.1)$$

Прежде всего, покажем, что любая функция *F(x ± ct)*, зависящая от координаты и времени, объединенных в указанную линейную комбинацию, удовлетворяет волновому уравнению. Введем обозначение $x \pm ct = \chi$. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции будем иметь $\partial^2/\partial x^2=\partial^2/\partial\chi^2$ и $\partial^2/\partial t^2=c^2\,\partial^2/\partial\chi^2$. Подставив последние выражения в (2.1) мы придем к тождеству независимо от вида функциональной зависимости F от аргумента χ.

Положение точки заданного значения аргумента χ = *const* в пространстве перемещается со скоростью *с*. При этом, если в указанной линейной комбинации выбран знак «–», то точка движется в положительном направлении оси х. При знаке «+» движение происходит в противоположную сторону. Из этого следует, что одним из частных решений уравнения (2.1) будет произвольный профиль *F(x)*, перемещающийся вправо или влево с постоянной скоростью *c* без изменения формы. Иллюстрация такого решения приведена на рис. 2.1.

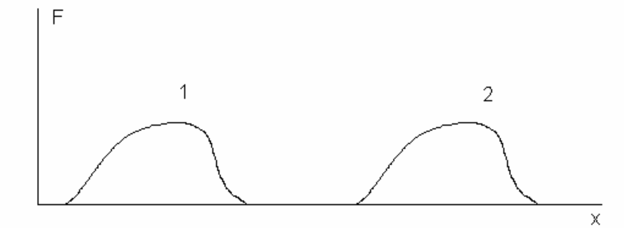


Рис. 2.1. Частное решение F(x-ct) волнового уравнения

Представлен «мгновенный снимок» решения в два момента времени. В начальный момент профиль занимает положение 1, спустя некоторое время – положение 2. Форма кривой не претерпевает изменений. При замене знака «–» на «+» следует, наоборот, считать, что начальное положение есть 2, а конечное – 1.

Волновым решением уравнения (2.1) будем называть решение, гармоническое, как во времени, так и в пространстве. Покажем один из возможных способов получения волнового решения. Будем искать его методом разделения переменных, то есть попытаемся отыскать решение в форме:

$$U(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.2}$$

Здесь *X(x)* – функция только координаты, а *T(t)* – функция только времени.

Подставив (2.2) в (2.1) и разделив левую и правую части на произведение *XT*, мы получим:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial T^2}=\frac{c^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial X^2}. \qquad (2.3)$$

Поскольку *T* и *X* зависят только от своих единственных аргументов, далее более правильно использовать не частные производные, а обыкновенные, что и будет сделано.

В левой части (2.3) может быть зависимость только от *t*, а в правой – только от *x*. Такое возможно, только если и левая и правая части не зависят ни от времени, ни от координаты. Следовательно, обе части равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим как p^2. Теперь из уравнения (2.3) мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{d^2T}{dt^2}=p^2T,\\ c^2\frac{d^2X}{dx^2}=p^2X.\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Будем искать решение первого из этих уравнений в виде $T(t) = Ae^{\alpha_t}$. Подстановка в соответствующее уравнение приводит к так называемому характеристическому уравнению

$\alpha^2 = p^2$, имеющему два корня $+p$ и $-p$. Тогда общее решение записывается в форме:

$$T(t)=T_1e^{pt}+T_2e^{-pt}., \qquad (2.5)$$

T_1 и T_2 – произвольные комплексные постоянные.

Поскольку нас интересует волновое (периодическое во времени) решение, необходимо считать константу *p* чисто мнимой величиной $p = i\omega$. В этом случае $e^{i\omega t} = cos(\omega t) + i\ sin(\omega t)$, и комбинируя комплексные постоянные T_1 и T_2, можно получить любое из колебательных решений, рассмотренных во вводной части книги. Очевидно, что величина ω имеет тот же смысл, что и при рассмотрении колебательных процессов – циклическая частота.

Подстановка $p = i\omega$ во второе из уравнений (2.4) приводит к соотношению, формально совпадающему с уравнением колебаний, в котором время t заменено координатой x:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}X = 0. \tag{2.6}$$

Отношение $\omega/c = k$, имеющее размерность обратной длины, называется волновым числом. Частными решениями (2.6) будут функции $e^{\pm ikx}$, $cos(kx)$, $sin(kx)$, которые можно комбинировать в виде сомножителей с (2.5). Стандартным волновым решением (или просто волной) в одномерном случае будем называть решение:

$$A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{2.7}$$

или его комплексный аналог:

$$Ae^{i(\omega t - kx)}. \tag{2.8}$$

Преобразованием начальной фазы φ_0 можно перейти от косинуса к синусу. Кроме того, произведения $cos(\omega t)cos(kx)$, $cos(\omega t)sin(kx)$, $sin((\omega t)cos(kx)$, $sin(\omega t)sin(kx)$ также будут удовлетворять исходному волновому уравнению.

2.2. Стоячие и бегущие волны

Рассмотрим одно из частных решений волнового уравнения:

$$U(x,t) = \cos(\omega t)\cos(kx). \tag{2.9}$$

Построим график зависимости функции U от безразмерной координаты $r = kx$ для нескольких различных моментов времени. График представлен на рис. 2.2.

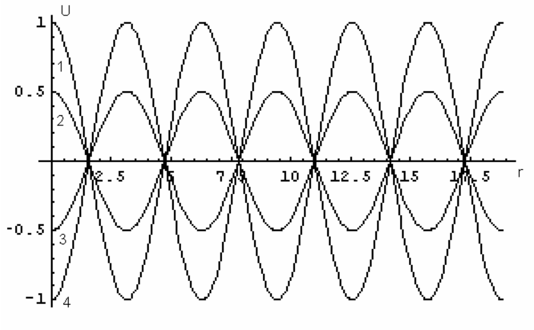


Рис. 2.2. Стоячие волны

В начальный момент $t = 0$ волновое поле изображено кривой 1. Кривая 2 показывает состояние поля через 1/6 временного периода ($\omega t = \pi/3$). Спустя 1/3 периода после начального момента волна принимает состояние 3. Наконец, через половину периода поле придет к графику кривой 4. Далее все пойдет в обратном порядке – от 4 к 3, от 3 к 2 и так далее. Как можно видеть из рисунка, положения точек экстремумов (пучностей) и точек нулей (узлов) функции во времени не изменяются. В этой связи данное решение называют стоячей волной.

Функция, изображающая изменения волны в пространстве, периодична. Поскольку периодом синуса или косинуса является число 2π, пространственный период волны, как это следует из (2.9), равен $\lambda = 2\pi/k$. Число λ называют длиной волны.

Совершенно по иному изменяется во времени и пространстве решение вида:

$$U(x,t) = \cos(\omega t - kx). \tag{2.10}$$

На рис. 2.3 представлены «мгновенные снимки» графиков функции (2.10) в несколько последовательных моментов
времени.

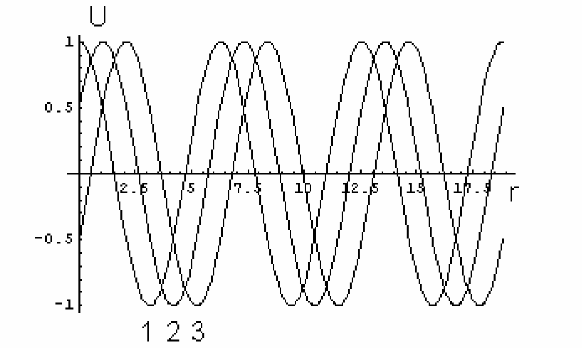


Рис. 2.3. Бегущая волна

Здесь, аналогично рис. 2.2, показаны графики функции U в зависимости от безразмерной переменной r. Кривыми 1, 2 и 3 представлены состояния волнового поля в момент времени $t = 0$, спустя 1/3 временного периода и спустя 2/3 временного периода, соответственно. В отличие от стоячей волны, в данном решении точки нулей, точки экстремумов, как и вся кривая в целом, перемещаются в пространстве. При положительном значении волнового числа смещение синусоиды происходит слева направо, при отрицательном – справа налево. Положение любой фиксированной фазы волны $\omega t - kx = const$ смещается с течением времени. Вследствие этого, решение, задаваемое формулой (2.10), называют бегущей волной. Нетрудно видеть, что в бегущей волне точка любой фиксированной фазы движется с постоянной скоростью $v_ф = \omega/k$, которая называется фазовой скоростью.

Типичным примером стоячей волны являются колебания в натянутой и закрепленной на концах струне. Поскольку концы зафиксированы, они должны соответствовать узлам синусоид. Тогда на длине струны L должно укладываться целое число половин длин волн, то есть $L = n\lambda/2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Мода, у которой на длине струны укладывается только одна половина длины волны, называется основной. Это – самая низкочастотная стоячая волна. Ее частота равна $f = \upsilon_ф/\lambda = \upsilon_ф/(2L)$. Примерами бегущей волны являются волны на поверхности воды, звуковые волны в неограниченном пространстве.

2.3. Плоские, сферические и цилиндрические волны

До сих пор мы рассматривали решения волнового уравнения в одномерном случае. Для изучения волн в пространстве трех измерений обратимся к обобщению волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 U. \tag{2.11}$$

Представление оператора Лапласа ∇^2 в прямоугольной декартовой системе координат приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \tag{2.12}$$

Точка A в декартовой системе определяется тремя своими координатами x, y и z или своим радиусом – вектором $\vec{r}$, с компонентами (x, y, z) так, как это показано на рис. 2.4.

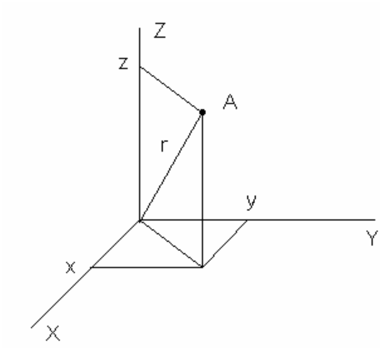


Рис. 2.4. Декартова система координат

Решение, удовлетворяющее уравнению (2.12) и соответствующее понятию бегущей волны с единичной амплитудой, может быть представлено в виде:

$$U(x, y, z, t) = \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \qquad (2.13)$$

Здесь $\vec{k}\vec{r}$ является скалярным произведением радиуса – вектора $\vec{r}$ текущей точки пространства на вектор $\vec{k}$, называемый волновым вектором. Модуль волнового вектора $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, как и в одномерном случае, определяется длиной волны. Для того, чтобы выяснить, что определяет направление волнового вектора, необходимо ввести новые понятия волновой физики.

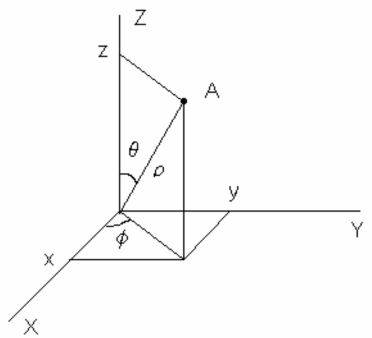
Определим, что представляет собой поверхность в трехмерном пространстве, на которой фаза волны в данный момент постоянна. Для этого зафиксируем значение фазы в аргументе косинуса в (2.13):

$$k_x x + k_y y + k_z z = const. \qquad (2.14)$$

Из аналитической геометрии известно, что соотношение (2.14) задает плоскость в трехмерном пространстве.

Поверхность, на которой в данный момент времени волна имеет одну и ту же фазу, называют фазовым фронтом, или фазовой поверхностью. Единичный вектор, ортогональный фазовому фронту и направленный во внешнюю относительно начала системы координат сторону, называется фазовой нормалью. Итак, волновым вектором является такой вектор, длина которого численно равна волновому числу $2\pi/\lambda$, а направление совпадает с направлением фазовой нормали. Волна, у которой фазовый фронт представляет собой плоскость, называется плоской волной.

Очевидно, что фазовый фронт в бегущей волне перемещается в пространстве с течением времени. Именно это перемещение и следует рассматривать как распространение волн. Очевидно также, что перемещение фазового фронта в пространстве происходит с фазовой скоростью.



В сферической системе координат положение точки A определяется радиусом ρ, и двумя углами φ и θ, как это иллюстрирует рис. 2.5.

Рис. 2.5. Сферическая система координат

Оператор ∇^2 в данном случае представляется в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (2.15)$$

Ограничимся рассмотрением поля с центральной симметрией. При этом зависимостей от углов (полярного θ и азимутального φ) не будет. Частные производные по углам в (2.15) равны нулю. Использовав только первые два слагаемых в (2.15), из (2.11) получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right). \qquad (2.16)$$

Будем, как обычно, искать гармоническое во времени решение $U(\rho, t) = U(\rho)e^{i\omega t}$. При этом на пространственную часть решения получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dU}{d\rho} + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0. \qquad 2.17)$$

Подстановкой $U(\rho) = V(\rho)/\rho$ удается привести (2.17) к стандартному виду:

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{\omega^2}{c^2}V = 0. \qquad (2.18)$$

Решение последнего уравнения нам известно. Представив его в комплексной форме и перейдя к исходной функции U, мы будем иметь:

$$U(\rho,t) = \frac{1}{\rho}e^{i(\omega t \mp k\rho)}, \qquad (2.19)$$

где $k = \omega/c$. Вещественная часть от полученной формулы дает решение волнового уравнения в виде расходящейся (при знаке «–» в предыдущей формуле) сферической волны:

$$U = \frac{\cos(\omega t - k\rho)}{\rho}. \qquad (2.20)$$

Сферичность волны связана с тем, что фазовый фронт

$k\rho = const$ здесь представляет собой сферическую поверхность с центром в начале координат. Важнейшей особенностью сферической волны является то, что ее амплитуда зависит от координат, а именно, обратно пропорциональна расстоянию до начал системы. Следует отметить, что решение (2.20) имеет особенность в точке $\rho = 0$, а, следовательно, неправомерно в начале координат.

Представление решения волнового уравнения в виде сферической волны удобно использовать, когда источник волн можно считать точечным, то есть, когда расстояние от точки наблюдения до источника много дольше линейного размера источника. Непосредственно форма (2.20) применима к изотропному источнику, равномерно излучающему волны во все направления, однако, модель сферической волны можно применить и к анизотропному источнику. Примером анизотропного источника может служить линейная антенна (электрический диполь), излучающая радиоволны. Для учета анизотропии источника формулу (2.20) достаточно дополнить множителем, описывающим угловое распределение интенсивности излучения:

$$U(\rho,\varphi,\theta,t) = \Phi(\varphi,\theta)\frac{\cos(\omega t - k\rho)}{\rho}. \qquad (2.21)$$

Функция $\Phi(\varphi, \theta)$ является угловой диаграммой направленности излучателя.

В цилиндрической системе координатами, определяющими положение точки в пространстве являются азимутальный угол φ, радиус ρ и координата z (рис. 2.6).

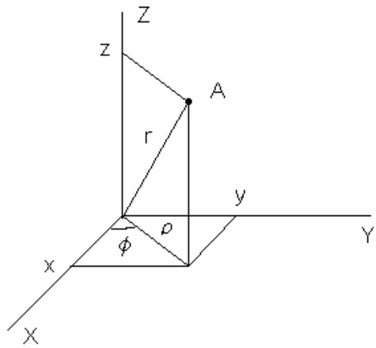


Рис. 2.6. Цилиндрическая система координат

Волновое уравнение здесь будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \qquad (2.22)$$

Рассмотрим поле с осевой симметрией и не зависящее от z. При этом в правой части (2.22) остается только первое слагаемое. Кроме того, как обычно, полагаем зависимость от времени гармонической. Тогда для функции от радиуса будем иметь уравнение:

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0. \qquad (2.23)$$

Данное уравнение является уравнением Бесселя. В простейшем случае его решением является функция Бесселя первого рода, нулевого порядка $U(\rho) = J_0(\frac{\omega}{c}\rho)$. Поведение функции Бесселя в зависимости от безразмерного аргумента x показано на рис. 2.7.

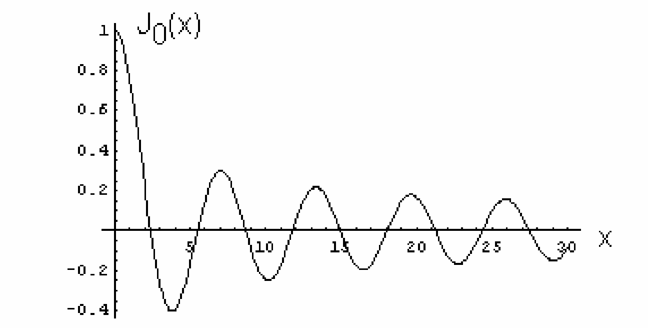


Рис. 2.7. График функции $J_0(x)$

Как можно видеть из графика, при больших значениях аргумента функция ведет себя подобно тригонометрическим функциям синуса или косинуса с убывающей с ростом аргумента амплитудой. На самом деле решение уравнения типа (2.23) может быть представлено и функцией Бесселя второго рода $Y_0(\frac{\omega}{\tilde{n}}\rho)$. Полное решение с учетом временной зависимости можно записать в виде:

$$U(\rho,t) = J_0(k\rho)\cos(\omega t). \quad (2.24)$$

С равным успехом можно было бы использовать во временной зависимости функцию синуса или любые комбинации синуса и косинуса.

Очевидно, фазовая поверхность ρ = *const* представляет собой цилиндрическую поверхность. Естественно, что такая волна называется цилиндрической. В противоположность точечному источнику, порождающему сферические волны, цилиндрические волны описывают волновое поле на расстояниях от линейного источника, много меньших его длины. Аналогично тому, как это делалось для сферических волн, можно ввести диаграмму направленности и для источника цилиндрических волн *Ф(φ)* – зависимость интенсивности излучения от азимутального угла.

Плоские и сферические волны, описанные здесь, соответствуют бегущим волнам, в то время как цилиндрическая волна в форме (2.24) является стоячей. Скомпоновать плоские и сферические стоячие волны не представляет труда. Необходимо только разделить временные и пространственные части и представить их в виде соответствующих тригонометрических функций. Несколько сложнее обстоит дело с представлением бегущей цилиндрической волны. Необходимо исходить из того, что функции Бесселя первого и второго рода имеют асимптотики при больших значениях аргумента в виде косинуса и синуса, соответственно, и с амплитудой, обратно пропорциональной аргументу. Тогда, в соответствии с тригонометрическим тождеством $cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$, бегущая цилиндрическая волна должна быть записана в виде:

$$J_0(k\rho)\cos(\omega t) + Y_0(k\rho)\sin(\omega t). \qquad (2.25)$$

На оси цилиндра такое решение имеет особенность (обращается в бесконечность).

Плоские, сферические и цилиндрические волны являются модельными описаниями волновых полей. Для конкретных задач та или иная модель становится предпочтительной. В то же время любое «достаточно хорошее» волновое поле может быть описано любой из этих моделей. Дело в том, что и тригонометрические функции, используемые в плоских и сферических волнах, и бесселевы функции в цилиндрических волнах являются ортогональными. Следовательно, любую, опять же «достаточно хорошую», функцию можно разложить в интеграл Фурье или интеграл Фурье–Бесселя.

3. ДИСПЕРСИЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

3.1. Дисперсионное соотношение

В предыдущей главе мы выяснили, что волновое уравнение может иметь самые разнообразные частные решения. Волновым решением мы договорились называть решение, которое зависит от времени и от пространственных координат гармоническим образом – через тригонометрические функции синуса или косинуса или в виде экспоненциальных функций с мнимыми аргументами, линейно зависящими от времени и координат. Для волновых решений важнейшими параметрами являются частота и волновое число (волновой вектор в трехмерном случае).

На данном этапе необходимо специально отметить, что волновое решение удовлетворяет волновому уравнению не при любых значениях ω и k, а только при наличии их взаимосвязи. Для выявления этой связи достаточно подставить решение вида $exp(i(\omega t - kx))$ в исходное волновое уравнение. Комплексная форма здесь наиболее удобна и компактна. Можно показать, что любое другое представление гармонического решения, в том числе и в виде стоячей волны, приводит к одной и той же связи между ω и k.

Подставив, в частности, волновое решение в уравнение (1.8) для струны, можно убедиться, что уравнение превращается в тождество при $\omega^2 = k^2c^2$. Точно такое же соотношение следует из уравнения (1.15) для волн в газе, уравнения (1.31) для упругих волн в твердом теле и из уравнения (1.44) для электромагнитных волн в вакууме.

Видоизменение исходного волнового уравнения приводит к изменению вида связи частоты с волновым числом. Нетрудно убедиться, что подстановка волнового решения в уравнение для плазменных волн (1.28) приводит к соотношению $\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2$. Как мы видели в примерах из первой главы, наличие диссипации энергии приводит к появлению первых производных в волновом уравнении. При этом связь между частотой и волновым числом переходит в область комплексных чисел. Например, уравнение для электрических волн в проводящей линии (1.38) дает соотношение $\omega^2 = k^2V^2 + i\,\omega R/L$.

Соотношение, связывающее между собой частоту и волновое число (волновой вектор), при котором волновое уравнение имеет волновое решение, называется дисперсионным соотношением, дисперсионным уравнением или законом дисперсии. Происхождение таких названий станет понятным в дальнейшем. Именно вид дисперсионного соотношения определяет характер волны. Поскольку волновые уравнения являются уравнениями с частными производными второго порядка по времени и координатам, закон дисперсии обычно представляет собой квадратное уравнение относительно частоты или волнового числа.

Простейшие дисперсионные уравнения, представленные выше для канонического волнового уравнения, имеют два простейших же решения $\omega = +kc$ и $\omega = -kc$. Мы уже знаем, что эти два решения соответствуют двум волнам, распространяющимся в противоположных направлениях. По своему физическому смыслу частота является величиной положительной так, что два решения должны определять два значения волнового числа, отличающиеся знаком. Указанный закон дисперсии допускает, вообще говоря, существование волн с любыми волновыми числами, то есть любой длины, а, следовательно, и любых частот. Фазовая скорость таких волн $v_ф = \omega/k$ совпадает с той самой скоростью, которая фигурирует в волновом уравнении и является постоянной величиной, зависящей только от свойств среды.

Закон дисперсии плазменных волн $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$ описывает совершенно иную ситуацию. Очевидно, что минимальная частота плазменных волн равна ленгмюровской частоте. Область пространства, в которой плазменная частота больше частоты волны, является для этой волны областью непрозрачности. Попав в такую область, волна быстро затухает в пространстве, то есть распространяться не может. Фазовая скорость $v_ф = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}}$ теперь зависит от волнового числа, а, следовательно, и от частоты.

Дисперсионное уравнение для проводящей линии представляет собой алгебраическое квадратное уравнение, имеющее комплексные корни. По аналогии с теорией колебаний, наличие мнимой части у частоты означает затухание или нарастание волн. В пространстве или во времени? На этот вопрос нам предстоит ответить в дальнейшем. Пока же можно констатировать то, что вид закона дисперсии определяет и наличие затухания или нарастания.

В общем виде закон дисперсии можно представить уравнением $\Phi(\omega, \vec{k}) = 0$, где Φ – некоторая функция частоты и волнового вектора. Разрешив это уравнение относительно ω, можно получить выражение для фазовой скорости $v_ф = \frac{\omega}{k} = f(\omega, \vec{k})$. По определению фазовая скорость является вектором, направленным по нормали к фазовой поверхности. Тогда более корректно записать последнее выражение в следующей форме:

$$\vec{v}_ф = \frac{\omega}{k^2}\vec{k} = f(\omega, \vec{k}). \tag{3.1}$$

Для простейших законов дисперсии, например, для волн в струне, функция f является просто константой – фазовая скорость не зависит ни от частоты, ни от модуля, ни от направления волнового вектора. В таком случае говорят, что среда не диспергирующая. Плазма по отношению к ленгмюровским волнам является средой диспергирующей. Действительно, из закона дисперсии для ленгмюровских волн следует выражение:

$$v_{\phi} = c\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}. \tag{3.2}$$

Здесь фазовая скорость явно зависит от частоты, но не зависит явно ни от модуля, ни от направления волнового вектора. Обратим внимание на то, что фазовая скорость ленгмюровской волны может быть сколь угодно большой. Отсутствие противоречия с принципами теории относительности мы продемонстрируем позднее.

Теперь настало время дать определение понятию дисперсии волн. Под этим термином следует понимать круг физических явлений, обусловленных зависимостью фазовой скорости волны от частоты или волнового вектора. В несколько упрощенном смысле дисперсией называют просто зависимость фазовой скорости от частоты.

Более детальный анализ дисперсии позволяет подразделить ее на частотную (временную) дисперсию и пространственную дисперсию. Дисперсия ленгмюровских волн является типичным примером частотной дисперсии – зависимости скорости только от частоты. Разумеется, сама частота через дисперсионное соотношение зависит от волнового числа, однако частотная дисперсия связана именно с явной зависимостью. Существует множество примеров сред и типов волн, фазовая скорость которых явно зависит от направления волнового вектора. Такие среды являются частными случаями так называемых анизотропных сред, свойства которых зависят от направления. При этом речь идет не только о направлении распространения волн. Например, в некоторых анизотропных средах проводимость зависит от направления тока. В указанных условиях говорят о пространственной дисперсии. Дисперсионные свойства сред – важнейший предмет исследований в волновой физике, имеющий первостепенную практическую значимость, что будет продемонстрировано в следующих разделах и на протяжении всей книги.

Возможность альтернативного представления дисперсионного соотношения в форме функциональной зависимости частоты от волнового вектора или, наоборот, волнового вектора от частоты отнюдь не является простой формальностью. Эти две альтернативы соответствуют двум различным постановкам задач анализа волнового поля.

Если рассматривается закон дисперсии в виде частотной зависимости волнового вектора, то говорят о задаче распространения. При этом в точечном или протяженном источнике задается гармонический колебательный процесс с фиксированной частотой, и рассматривается распространение волн в пространстве вне источника. Частота, будучи первичной в такой постановке, одинакова во всех точках поля, в то время как волновой вектор может меняться от точки к точке.

Другую альтернативу можно назвать задачей временной эволюции. В этом случае частота зависит от волнового вектора. Разумеется, вещественная часть частоты, определяющая временной период волн, и здесь постоянна (за исключением так называемых релаксирующих сред, где сами свойства среды изменяются во времени). Однако в зависимости от величины и направления волнового может зависеть мнимая часть комплексной частоты, определяющая нарастания или затухание волн во времени в данной точке пространства. В этой связи указанную задачу часто называют еще задачей устойчивости волн.

3.2. Биения волн

Напомним, что явление биений колебаний наблюдается при сложении двух гармонических процессов с близкими частотами и заключается в амплитудной низкочастотной модуляции суммарного высокочастотного колебания. Для рассмотрения явления биения волн вернемся к одномерной волновой задаче. Пусть вдоль оси x распространяются две однотипные волны с одинаковой (единичной) амплитудой и близкими частотами ω_1 и ω_2. Под словом «однотипные» мы будем понимать то, что волны имеют один и тот же закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ или наоборот $k = k(\omega)$ – дисперсионное уравнение может быть разрешено либо относительно частоты, как функция волнового числа, либо наоборот.

Считая, что каждая из волн задается выражением $U(x, t)_{1,2} = cos(\omega_{1,2}t - k_{1,2}x)$, суммарное колебание запишем в виде:

$$U(x,t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}\right). \quad (3.3)$$

Частоты волн близки по величине $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$, $\Delta\omega << \omega_1, \omega_2$. Тогда дисперсионное уравнение $k_1 = k(\omega_1) = k(\omega_2 + \Delta\omega)$ можно разложить в ряд Тейлора по малой величине $\Delta\omega$, ограничившись линейным по смещению частоты членом:

$$k_1 = k_2 + \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=\omega_2} \Delta\omega. \quad (3.4)$$

Введя обозначения $k = (k_1 + k_2)/2$ и $\omega = (\omega_1 + \omega_2)\cdot 2$, можно переписать (3.3) таким образом:

$$U = 2\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{x}{2}\frac{\partial k}{\partial\omega}\Delta\omega)\cos(\omega t - \mathrm{kx}). \quad (3.5)$$

Теперь мы можем видеть, что суммарная волна представляет собой высокочастотную бегущую волну с частотой, равной полусумме частот складываемых волн и волновым числом, равным полусумме исходных волновых чисел. Амплитуда результирующей волны представляет собой также бегущую волну:

$$2\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x), \tag{3.6}$$

где $\Delta k = \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_2} \Delta\omega$. Рис. 3.1 представляет собой «мгновенный снимок» волнового поля (3.5), как функцию *U(x)* в некоторый момент времени.

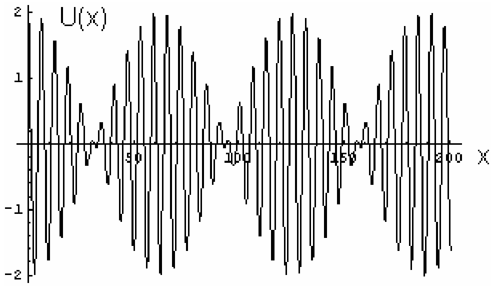


Рис. 3.1. Биения волн

По сути дела, данный рисунок ничем не отличается от рис. 4, иллюстрирующего биения колебаний, за исключением того, что там представлен график процесса во времени, а здесь показана функция координаты. Высокочастотная волна (несущая) распространяется с фазовой скоростью ω/k, в то время как огибающая амплитуды ведет себя иначе. Постоянное значение фазы огибающей определяется соотношением $\Delta\omega t/2 - \Delta kx/2 = const$. Нетрудно убедиться в том, что точка постоянного значения фазы огибающей перемещается со скоростью:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \tag{3.7}$$

Величина $\upsilon_г = \partial\omega/\partial k$ называется групповой скоростью волн. Ее численное значение определяется взятием частной производной от функции $\omega(k)$, задаваемой законом дисперсии. Если рассматривать трехмерное пространство, то производную следует рассматривать как вектор $\nabla\omega(\vec{k})$. Так, в прямоугольной декартовой системе:

$$\vec{v}_{\tilde{A}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\vec{i}, \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\vec{j}, \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\vec{k}\right). \tag{3.8}$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей x, υ, z – соответственно.

Модуляция волны может формироваться не только и не столько в результате биений, но и многими другими способами. Так, радиопередатчик может модулировать несущую частоту по амплитуде при передаче голоса. Тем самым, амплитудная модуляция кодирует передаваемый сигнал. При этом и колебания и волны перестают быть строго гармоническими. Используя понятия спектра сигнала, можно говорить о том, что при модуляции несущей порождается целый спектр волн или колебаний – группа волн. Отсюда и происходит название групповой скорости. Еще раз подчеркнем, что с групповой скоростью распространяется именно огибающая амплитуды, закодированный сигнал. Во всех реальных ситуациях групповая скорость оказывается меньше скорости света (в отличие от фазовой скорости). Таким образом, никаких противоречий с теорией относительности не возникает – сигнал распространяется с досветовой скоростью.

Для линейного закона дисперсии $\omega = kc$ (где c – постоянная величина) значения групповой и фазовой скорости совпадают и равны c. Уточним, что это имеет место в средах без дисперсии. Ранее мы показали, что в плазме, как в диспергирующей среде, фазовая скорость ленгмюровских волн равна $c\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}$. Обратившись к закону дисперсии для плазменных волн $\omega^2 = \omega^2_p + k^2c^2$, найдем групповую скорость:

$$v_{\text{г}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\sqrt{\omega_p^2 + k^2c^2} = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2c^2}} = c\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (3.9)$$

Если фазовая скорость оказалась больше тепловой скорости электронов c, то групповая скорость меньше c. Интересно отметить и то, что произведение групповой скорости на фазовую дает как раз квадрат характерной скорости c^2. Данная закономерность достаточно типична, однако, характерная скорость для каждой среды и волн в ней своя.

3.3. Спектральный анализ

Тема данного раздела напрямую к теории волн отношения не имеет, но напоминание основных положений спектрального анализа представляется весьма целесообразным для понимания последующего материала.

Периодическая функция времени $F(t + T) = F(t)$, где T – период, может быть представлена в виде разложения в ряд по гармоническим функциям:

$$F(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos(i\omega t). \qquad (3.10)$$

Здесь $\omega = 2\pi/T$. Формула (3.10) называется прямым преобразованием Фурье. Коэффициенты A_i и B_i , по сути дела, являются функциями от своих индексов и определяются формулами обратного преобразования Фурье:

$$B_i = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} F(t)\cos(i\omega t)dt,$$
$$A_i = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} F(t)\sin(i\omega t)dt. \qquad (3.11)$$

Величина a может быть выбрана произвольно.

Обратное преобразование Фурье вытекает из свойств ортогональности тригонометрических функций. Пусть, например, функция $F(t) = sin(\omega t)$. Ее период $T = 2\pi/\omega$. Выберем для а значение 0. Для B_i имеем:

$$B_i = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t)\cos(i\omega t)dt. \qquad (3.12)$$

Функция синуса ортогональна функции косинуса для любых i. Таким образом, все коэффициенты B равны нулю.

Для A_i имеем:

$$A_i = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t)\sin(i\omega t)dt. \qquad (3.13)$$

Здесь ненулевое значение (снова в силу ортогональности) будет иметь только коэффициент $A_1 = 1$. Таким образом, как и должно было быть, в ряде (3.10) остается одинединственный член – спектр сигнала состоит из единственной линии. Поскольку физически спектр показывает вклад в сигнал различных гармоник, сигнал, представляющий собой синусоиду, только ее и содержит.

При переходе от периодический функции к непериодической, последнюю можно формально рассматривать все же как периодическую, но с бесконечно большим периодом
$T \to \infty$. При этом, формально, $\omega \to 0$. Интуитивно понятно, что от дискретного ряда в суммах типа (3.10) следует перейти к интегралу:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t) \to \int_0^{\infty} A(\omega)\sin(\omega t)dt. \qquad (3.14)$$

Теперь формула прямого преобразования Фурье для непериодической функции будет выглядеть следующим образом:

$$F(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\sin(\omega t)dt + \int_0^{\infty} B(\omega)\cos(\omega t)dt. \qquad (3.15)$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(t)\sin(\omega t)dt,$$
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(t)\cos(\omega t)dt. \qquad (3.16)$$

Разложение непериодической функции в спектр принято иллюстрировать примером прямоугольного импульса единичной амплитуды, длительностью δt. Допустим, импульс появился в момент времени t_1. Тогда график процесса будет иметь вид, показанный на рис. 3.2.

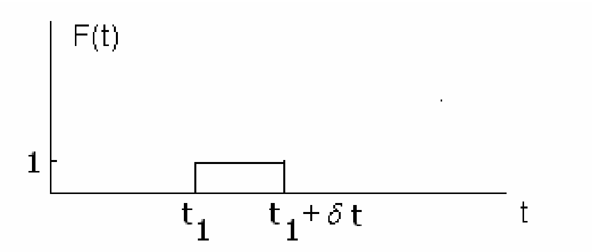


Рис. 3.2. Прямоугольный импульс

Функция, описывающая прямоугольный импульс, будет задаваться так, что $F(t) = 1$ при $t_1 \le t \le t_1 + \delta t$ и $F(t) = 0$ в остальные моменты времени. Для упрощения рассмотрения перенесем начало отсчета времени в точку $t_1 + \delta t/2$. Тогда пределы интегрирования в (3.16), определяемые областью, где $F(t)$ не равна нулю, будут составлять $-\delta t/2$ и $+\delta t/2$. Функция $A(\omega)$ задается интегралом:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta t/2}^{+\delta t/2} 1 \times \sin(\omega t)dt. \qquad (3.17)$$

В силу нечетности функции синуса и симметричности относительно нуля пределов интегрирования последний интеграл равен нулю.

Для функции $B(\omega)$ будем иметь следующее:

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta t/2}^{+\delta t/2} 1 \times \cos(\omega t)dt = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\delta t\omega}{2}\right)}{\omega}. \qquad (3.18)$$

Таким образом, спектр прямоугольного импульса содержит непрерывное распределение по всем частотам с функциями косинуса. График функции $P(x) = \sin(x)/x$ показан на рис. 3.3.

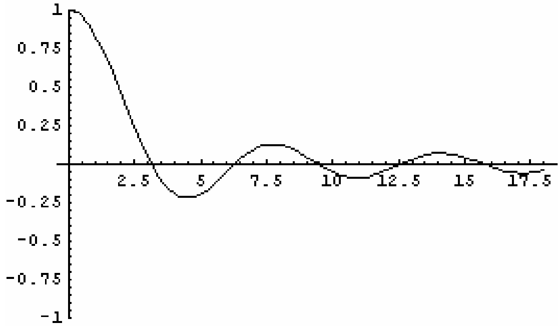


Рис. 3.3. Спектр прямоугольного импульса

В волновой физике наряду с прямоугольным импульсом в качестве модели сигнала широко используется так называемый гауссов импульс:

$$F(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\Delta t^2}\right). \tag{3.19}$$

Величина Δt задает характерную ширину (длительность) импульса. График функции (3.19) при Δt = *1* показан на рис. 3.4.

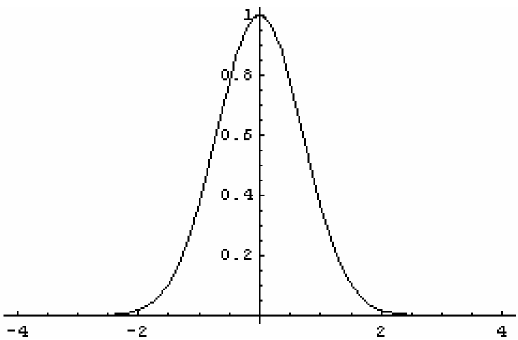


Рис. 3.4. Гауссов импульс

Обратные преобразования Фурье в данном случае дают:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\Delta t^2}\right)\sin(\omega t)dt. \qquad (3.20)$$

Как и в предыдущем примере, в силу нечетности функции синуса последнее выражение равно нулю.

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\Delta t^2}\right)\cos(\omega t)dt. \qquad (3.21)$$

Интеграл в (3.31) является «табличным», и мы окончательно имеем:

$$B(\omega) = \frac{1}{\Delta t\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\Delta t^2\omega^2}{4}\right). \qquad (3.22)$$

Здесь мы снова получили гауссову функцию, но уже от частоты ω. Собственно, гауссовский импульс тем и «знаменит», что он имеет гауссовский же спектр. Особо необходимо обратить внимание на то, что длительность сигнала во времени Δt и частотная ширина спектра обратно пропорциональны друг другу. Анализ спектра прямоугольного импульса приведет нас к такому же выводу. Правило является универсальным вне зависимости от формы импульса – чем короче импульс, тем шире его спектр и наоборот.

В данном разделе мы воспользовались разложением функции в ряды или интегралы как по синусам, так и по косинусам – разложения по квадратурным компонентам. Без особого труда можно было бы провести разложение, например, только по косинусам, внеся в аргумент тригонометрической функции фазу, зависящую от частоты. Тогда в формуле:

$$F(t)=\int_0^{\infty}C(\omega)\cos(\omega t+\Psi(\omega))\mathrm{d}\omega \qquad (3.23)$$

амплитуда $C(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$, где A и B определяются соотношениями (3.16). Эта функция называется амплитудно-частотной характеристикой сигнала (АЧХ). Фаза $\Psi(\omega)=-arctg\left(A(\omega)/B(\omega)\right)$ называется фаза-частотной характеристикой (ФЧХ).

Широко используется и комплексная форма спектрального анализа сигналов, в которой разложение представляется в виде:

$$F(t)=\int C(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega. \qquad (3.24)$$

В этом случае квадратурные компоненты или амплитудные и фазовые характеристики должны быть получены из модуля и аргумента комплексной функции *C(ω).*

3.4. Волновые пакеты

Пространственно-временное поле $F(t,\vec{r})$ можно рассматривать как функцию четырех переменных: времени и трех координат. Тогда эта функция разлагается в четырехкратный интеграл Фурье (в данном случае в комплексной форме):

$$F(t,\vec{r})=\int \Phi(\omega,\vec{k})\exp(i(\vec{k}\vec{r}-\omega t))d\omega d\vec{k}. \qquad (3.25)$$

Здесь под $d\vec{k}$ следует понимать дифференциал объема в трехмерном пространстве волнового вектора. $\Phi(\omega,\vec{k})$ дает вклад в поле от пространственно-временной гармоники с заданной частотой и волновым вектором. Однако представление (3.25) является всего лишь формальным соотношением, не использующим информации о физической природе волн, по которым производится разложение. Внесение такой информации осуществляется применением дисперсионного соотношения. При этом частота в (3.25) перестает быть самостоятельной переменной интегрирования, интеграл превращается в трехмерный, в показателе экспоненты ω следует рассматривать как функцию $\omega(\vec{k})$, задаваемую законом дисперсии:

$$F(t,\vec{r}) = \int \Phi(\omega,\vec{k}) \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)) d\vec{k}. \qquad (3.26)$$

В ряде случаев поле представляет собой ограниченное в пространстве перемещающееся образование, которое удается описать как волну, промодулированную по амплитуде ограниченной в пространстве функцией. В одномерном случае такую картину можно проиллюстрировать рис. 3.5.

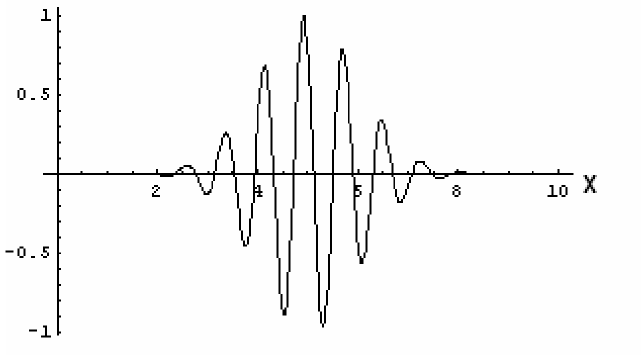


Рис. 3.5. Волновой пакет

Если пространственный размер области возмущения существенно больше длины волны, заполняющей эту область, то в спектр такого образования дают вклад только волны с близкими к некоторому значению k_0 волновыми числами или, что то же самое, волны с близкими к некоторому значению ω_0 частотами. Суперпозиция группы волн с близкими частотами (волновыми векторами), занимающая ограниченную область пространства, называется волновым пакетом.

Узкополосность по частоте волнового пакета позволяет для всех волн, составляющих пакет, разложить дисперсионное уравнение в ряд Тейлора по малым отклонениям волнового вектора от центрального значения. Ограничимся разложением до квадратичного члена и рассмотрим одномерный случай:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_{k=k_0} (k-k_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big|_{k=k_0} (k-k_0)^2. \quad (3.27)$$

Коэффициент при линейном члене является, как мы знаем, групповой скоростью волн. Обозначим коэффициент при квадратичном члене в (3.27) через β. Тогда дисперсионное уравнение примет вид:

$$\omega = \omega_0 + v_Г (k-k_0) + \beta (k-k_0)^2. \quad (3.28)$$

Теперь зададим спектр начального волнового пакета в виде гауссовой функции, но, в отличие от рассмотрения в предыдущем разделе, не по частотам, а по волновым числам:

$$\Phi(k) = \exp(-\alpha (k-k_0)^2). \quad (3.29)$$

Параметр a определяет ширину спектра пакета в k-пространстве.

Волновое поле пакета будет описываться следующей формулой:

$$U(x,t) = \int exp\{ -\alpha (k-k_0)^2 + ikx - i[\omega_0 + v_Г (k-k_0) + \beta (k-k_0)^2]t \} dk. \quad (3.30)$$

Выполнив интегрирование в последней формуле, получим:

$$U(x,t)=-i\sqrt{\frac{\pi}{4(\alpha+i\beta t)}}\,exp\left[-\frac{(x-v_\Gamma t)^2}{4(\alpha+i\beta t)}+i(k_0x-\omega_0 t)\right]\cdot$$
$$\cdot Erfi\left[\frac{2i\alpha(k-k_0)-2\beta(k-k_0)t-tv_\Gamma+x}{2\sqrt{\alpha+i\beta t}}\right]. \tag{3.31}$$

Здесь функция *Erfi(x)* – комплексная функция ошибок (комплексный интеграл вероятностей).

Можно видеть, что формула (3.31) описывает волну на центральной частоте ω_0 (или с центральным волновым числом k_0) с амплитудой, являющейся функцией координат и времени. Поскольку использовалась комплексная форма представления поля, амплитуда в последней формуле также является комплексным числом. Квадрат модуля амплитуды будет пропорционален физически наблюдаемой характеристике волны – ее интенсивности:

$$|\,A(x,t)|^2\propto\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}}\,exp\left(-\frac{\alpha(x-v_г t)^2}{\alpha^2+\beta^2t^2}\right). \tag{3.32}$$

Интенсивность задается гауссовой функцией, максимум которой перемещается в пространстве $x_m = v_г t$. Скорость перемещения совпадает с групповой скоростью. Ширина гауссовой кривой в пространстве увеличивается – знаменатель в показателе экспоненты увеличивается со временем. Максимальное значение функции – множитель перед экспонентой уменьшается со временем. Наличие множителя, определяемого интегралом ошибок, вносит дополнительные несимметричные относительно центра искажения формы импульса. Таким образом, волновой пакет перемещается с групповой скоростью, «расплывается» в пространстве и уменьшается по амплитуде. При этом расплывание и уменьшение по амплитуде обусловлены именно дисперсией волн, наличием квадратичного члена в дисперсионном уравнении (3.28). В среде без дисперсии, когда $\beta = 0$, волновой пакет распространяется без изменения формы.

Характер распространения и искажения волнового пакета в диспергирующей среде показан на рис. 3.6. Здесь изображена нормированная функция (3.32), в которой параметры a, β и $v_г$ выбраны равными единице. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени $t = 0$, 3, 6 и 9, соответственно.

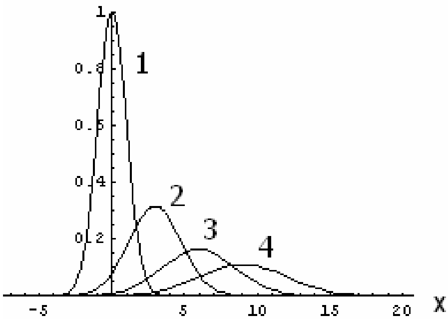


Рис. 3.6. Дисперсионное расплывание волнового пакета

Искажению при распространении в среде с дисперсией подвергаются не только гауссовские импульсы, но и любые другие сигналы. Характер искажений в приближении квадратичной дисперсии также универсален: происходит уширение импульса и уменьшение его амплитуды в максимуме. Таким образом, в практических задачах явление дисперсии волн обычно имеет негативный характер. Действительно, в системах передачи информации искажение передаваемых сигналов крайне нежелательно. Более того, как можно видеть из рис. 3.6, при достаточном удалении от источника импульсы начинают перекрываться, накладываться друг на друга, что может привести к невозможности правильного приема информации.

В заключение следует заметить, что уменьшение амплитуды волнового пакета при его распространении не связано с диссипацией энергии. Можно показать интегрированием формулы (3.32) по всему пространству, что полная энергия пакета сохраняется во времени.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1. Электромагнитное поле в среде

Электромагнитное поле в среде при наличии электрических зарядов и токов описывается системой уравнений Максвелла:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{4.1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$div\vec{B} = 0, \tag{4.3}$$

$$div\vec{D} = \rho. \tag{4.4}$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются силовыми характеристиками полей, оказывающими силовое действие на заряды и токи в свободном пространстве, и называются напряженностью электрического поля и магнитной индукцией. (О некоторой исторической путанице с названиями мы упоминали в первой главе.) Векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ – наведенные поля в среде, возникающие под действием наложенных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то есть результирующие поля, называемые электрической индукцией и напряженностью магнитного поля, соответственно.

Вектор $\vec{j}$ – плотность электрического тока, количество заряда, протекающего через единичную площадь за единицу времени. Величина ρ является объемной плотностью электрического заряда.

В линейной электродинамике напряженности полей и индукции связаны между собой пропорциональной зависимостью:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \tag{4.5}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \tag{4.6}$$

В последние соотношения входят мировые константы ε_0 и μ_0, называемые электрической и магнитной постоянными, и коэффициенты ε и μ, получившие название диэлектрической и магнитной проницаемостей среды. Именно эти коэффициенты определяют электрические и магнитные свойства сред. В отсутствие носителей зарядов, в вакууме в частности, проницаемости равны единице.

В нелинейной электродинамике при рассмотрении мощных полей линейная связь типа (4.5) и (4.6) может быть нарушена. В этом случае можно последние формальные соотношения оставить в силе, но считать, что проницаемости являются функциями величин полей. Кроме того, более корректно было бы записать, например, соотношение (4.5) в тензорном виде $D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j$. Это должно означать тот факт, что результирующее поле может не совпадать по направлению с наложенным.

Рассматривая волновые процессы, мы должны в общем случае предусмотреть возможность зависимости проницаемостей от частоты и волнового вектора, то есть полагать, что $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \vec{k})$ и $\mu = \mu(\omega, \vec{k})$.

Плотность тока связана с напряженностью электрического поля обобщенным законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{4.7}$$

где σ – еще одна электрическая характеристика среды, называемая проводимостью. Все сказанное относительно проницаемостей относится и к проводимости. Проводимость, в общем случае, может быть тензором, зависящим от частоты, волнового вектора и самого поля. Соотношения (4.5)–(4.7) называются материальными уравнениями электродинамики.

Применив оператор ротора к уравнению (4.2) и подставив в полученное соотношение значение $rot\vec{H}$ из (4.1), с использованием материальных уравнений получим:

$$rotrot\vec{E} = grad(div\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}\right). \tag{4.8}$$

В отсутствии объемного заряда (ρ = 0) дивергенция электрического поля равна нулю, и из (4.8) следует волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\tilde{n}^2}{\varepsilon\mu}\nabla^2\vec{E} - \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{4.9}$$

Здесь $c = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света в вакууме. Аналогичное волновое уравнение может быть получено и для вектора напряженности магнитного поля.

Рассмотрим сначала среду без проводимости, для которой σ = 0. Пусть в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{m}$, распространяется плоская волна. Тогда уравнение (4.9) приводится к одномерному с пространственной переменной $x = \vec{m}\vec{r}$, являющейся скалярным произведением единичного вектора направления на радиус-вектор точки в пространстве:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}. \tag{4.10}$$

Очевидно, последнее уравнение описывает две волны, распространяющиеся в направлениях $\pm\vec{m}$ с фазовой скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Можно показать, что:

$$\begin{aligned} div\vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{m}\vec{E}), \\ rot\vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x}[\vec{m}\vec{E}]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь круглые скобки обозначают скалярное, а квадратные – векторное произведение векторов. Уравнения Максвелла в отсутствии проводимости теперь будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\vec{m}\vec{E}] = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\vec{m}\vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{m}\vec{E}) = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{m}\vec{H}) = 0. \tag{4.15}$$

Введем новую переменную $\tau = t - x/v$, предполагая, что решение (4.10) будет находиться в виде $E = E(\tau)$. Для новой переменной $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial x = -1/v\,\partial/\partial\tau$. Тогда из уравнения (4.13) получим:

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{v}[\vec{m}\vec{H}] + \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\right) = 0. \tag{4.16}$$

Выражение под производной должно быть постоянной величиной, причем, для волновых переменных эта константа должна быть равной нулю. Отсюда получаем связь между электрическим и магнитным полями в электромагнитной волне:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}[\vec{m}\vec{H}]. \tag{4.17}$$

Векторы электрического, магнитного полей и вектор направления распространения образуют тройку взаимно ортогональных векторов. Характеристику среды $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ называют импедансом, или волновым сопротивлением. Физический смысл импеданса будет раскрыт позже. Вакуум также характеризуется своим импедансом $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, называемым волновым сопротивлением свободного пространства.

Вернемся к волновому уравнению с учетом проводимости, которое в одномерном случае следует из уравнения (4.9):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \tag{4.18}$$

где E – любой компонент электрического поля. Будем искать гармоническое во времени решение $E(x, t) = E_0(x)exp(-i\omega t)$. При подстановке в волновое уравнение указанной гармонической временной зависимости формируется так называемое уравнение Гельмгольца – дифференциальное уравнение, уже не содержащее производных по времени. В нашем случае уравнение Гельмгольца представляется следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2E_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\mu E_0 = 0. \tag{4.19}$$

Теперь находим решение уравнения Гельмгольца с гармонической зависимостью от пространственной координаты $E_0 \sim \exp(ikx)$. При этом формируется дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\tilde{\varepsilon}. \tag{4.20}$$

Можно видеть, что наличие конечной проводимости приводит к тому, что волновое число становится комплексной величиной. Принято считать, что благодаря проводимости комплексной становится диэлектрическая проницаемость среды $\left(\varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right) = \tilde{\varepsilon}$.

Теперь волновое число можно представить в виде суммы вещественной и мнимой части:

$$k = \frac{\omega}{c}(n + i\chi). \tag{4.21}$$

Безразмерные величины n и x называются показателями преломления и поглощения волн. Для выяснения физического смысла этих параметров выпишем в окончательном виде решение уравнения (4.19) в вещественной форме волны с единичной начальной амплитудой:

$$E(x,t)=\exp\left(-\frac{\omega}{c}\chi x\right)\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}nx\right). \qquad (4.22)$$

Фазовая скорость волны равна c/n. Отсюда следует определение показателя преломления $n = c/\upsilon_ф$. Показатель преломления численно равен отношению фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме (скорости света) к фазовой скорости электромагнитной волны в среде.

Для электромагнитных волн есть «абсолютная мера отсчета» – скорость света в вакууме. Для волн других типов также определено понятие показателя преломления. Однако здесь следует говорить только об относительных величинах. Отношение $n_1/n_2 = \upsilon_{ф2}/\upsilon_{ф1}$ показателей преломления сред 1 и 2 равно отношению фазовых скоростей в средах 2 и 1.

Как видно из формулы (4.22), амплитуда волны уменьшается с увеличением x, волна затухает по мере распространения. Если ввести понятие длины волны в вакууме

$\lambda_0 = 2\pi c/\omega$, то показатель поглощения x показывает, за сколько длин волн в вакууме (с точностью до множителя 2π) амплитуда волны уменьшится в e раз.

В большинстве случаев в волновой физике рассматриваются среды, в которых затухание мало. Условием слабого затухания является сильное неравенство $n \gg x$ или $\varepsilon \gg \sigma/(\varepsilon_0\omega)$. При этом:

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu}\sqrt{\varepsilon+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}}\approx\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1+i\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right). \qquad (4.23)$$

Отсюда следуют формулы для показателя преломления и показателя поглощения в случае сред со слабым затуханием:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{4.24}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}. \tag{4.25}$$

Во многих случаях среда распространения волн является немагнитной μ = 1, и для нее $n = \sqrt{\varepsilon}$. Что касается показателя поглощения, то здесь необходимо отметить важнейшее обстоятельство. Показатель поглощения обратно пропорционален частоте волны. В этой связи при передаче информации посредством волн, например в системах радиосвязи, предпочтительно использование наиболее высокочастотных диапазонов из возможных.

4.2. Энергия и импульс электромагнитных волн

В среде без диссипации полная энергия электромагнитного поля сохраняется. Обозначив через $W(\vec{r},t)$ объемную плотность энергии в данной точке в данный момент времени, можно утверждать, что $\int W(\vec{r},t)d^3\vec{r} = const.$ Тогда, как для любой сохраняющейся субстанции, для плотности энергии можно записать уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div\vec{S} = 0, \tag{4.26}$$

где $\vec{S}$ – вектор плотности потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга), численно равный количеству энергии, протекающей через единицу площади за единицу времени. Если энергия переносится со скоростью $\vec{v}$, то $\vec{S} = W\vec{v}$.

Уравнение Максвелла $\varepsilon\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t = rot\vec{H}$ умножим скалярно на $\vec{E}$, а уравнение $-\mu\mu_0 \partial\vec{H}/\partial t = rot\vec{E}$ – на $\vec{H}$ и вычтем из первого второе. В результате будем иметь соотношение:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E}. \tag{4.27}$$

В правой части (4.27), в силу известной формулы векторного исчисления, стоит величина $div[\vec{E}\vec{H}]$. Левую же часть можно записать в виде $\partial/\partial t(\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2)$. Из электростатики и магнитостатики известно, что под знаком производной стоит в точности выражение для полной плотности энергии электрического и магнитного поля. Сравнив соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right) + div[\vec{E}\vec{H}] = 0 \tag{4.28}$$

с уравнением непрерывности (4.26), приходим к выводу о том, что:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2), \\ \vec{S} &= [\vec{E}\vec{H}]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

В бегущей электромагнитной волне модуль вектора Пойнтинга можно выразить, например, через амплитуду электрического поля E_m, используя связь E и H в формуле (4.17):

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx). \qquad (4.30)$$

В любой точке пространства плотность потока энергии осциллирует во времени, изменяясь от нуля до максимального значения. Интенсивностью волны называют модуль усредненной за период колебаний плотности потока энергии. Как известно, среднее за период значение квадрата косинуса равно одной второй. Следовательно, для интенсивности электромагнитной волны имеем формулу:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2 / 2. \qquad (4.31)$$

Наряду с энергией электромагнитные волны обладают импульсом (количеством движения). Для нахождения импульса волн удобно исходить их квантового описания. Импульс одиночного фотона, согласно теории относительности, задается формулой:

$$p = w / c, \qquad (4.32)$$

где w – его энергия, а c – скорость света. Умножим равенство (4.32) на концентрацию фотонов и на квадрат скорости света:

$$c^2 P = Wc. \qquad (4.33)$$

Здесь W есть не что иное, как плотность энергии, а поскольку фотоны движутся со скоростью света, в правой части стоит плотность потока энергии. В левой части (4.33) через P обозначен импульс единицы объема. Используя второе из выражений (4.29) и переходя к векторам, получим формулу для плотности импульса электромагнитных волн:

$$\vec{P} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c^2}. \tag{4.34}$$

Важным следствием наличия у электромагнитных волн импульса является явление давления света. Пусть на некоторую поверхность, перпендикулярно к ней падает волна и полностью этой поверхностью поглощается. За время Δt площадь S поверхности поглотит объем волны, равный $cS\,\Delta t$, а следовательно и полный импульс $WS\,\Delta t$. По определению, импульс, переданный единице поверхности за единицу времени равен давлению на поверхность. Импульс, как и другие параметры волны, осциллирует во времени. Поэтому физически наблюдаемое давление электромагнитных волн следует рассматривать как усредненное во времени за период:

$$P^* = \langle W \rangle. \tag{4.35}$$

Если волна полностью отражается от поверхности, давление, ею оказываемое, удваивается по сравнению со случаем полного поглощения.

4.3. Поляризация волн

При распространении поперечных волн в трехмерном пространстве важным становится вопрос о геометрической ориентации изменяющегося в волне параметра. Так для волны в струне речь идет о направлении отклонения струны. Для электромагнитной волны важна ориентация векторов электрического и магнитного полей. Круг явлений, связанных с направлением смещения параметра волны, называется поляризацией.

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении оси Oz декартовой системы координат, то есть волну с волновым вектором, направленным по оси *Oz*. В ней вектор электрического поля лежит в плоскости *xOy* и может быть ориентирован произвольно. Соответствующая геометрия изображена на рис. 4.1.

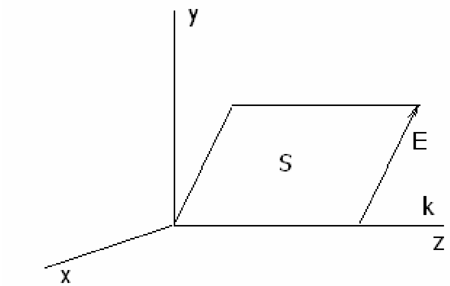


Рис. 4.1. Плоскость поляризации электромагнитной волны

Плоскость, в которой лежат волновой вектор и вектор напряженности электрического поля, называется плоскостью поляризации электромагнитной волны. На рис. 4.1 это плоскость *S*.

В представленной геометрии вектор $\vec{E}$ имеет два компонента – E_x и E_y. По сути дела, можно говорить о двух самостоятельных электромагнитных волнах, поляризованных по соответствующим осям. Эти две волны могут быть как взаимно зависимыми, так и совершенно независимыми. Представим эти компоненты в виде двух решений уравнения Гельмгольца, у которых одинаковы частоты и, соответственно, волновые числа, но различны амплитуды e_1 и e_2 и начальные фазы φ_1 и φ_2:

$$\begin{aligned} E_x &= e_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1), \\ E_y &= e_2 \cos(\omega\tau + \varphi_2). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Здесь $\tau = z/c$. Обозначив через Δ разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ и исключив из системы (4.36) параметр τ можно прийти к следующему соотношению, связывающему E_x и E_y:

$$\left(\frac{E_x}{e_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{e_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{e_1 e_2}\cos\Delta = \sin^2\Delta. \qquad (4.37)$$

Если рассматривать величины E_x и E_y как координаты конца вектора $\vec{E}$, то конец вектора лежит на кривой, описываемой формулой (4.37). Из аналитической геометрии известно, что эта формула соответствует эллипсу с полуосями, равными амплитудам e_1 и e_2, форма и ориентация которого в плоскости xOy зависит от величины Δ. На рис. 4.2 представлен эллипс поляризации для произвольных значений амплитуд и разности фаз.

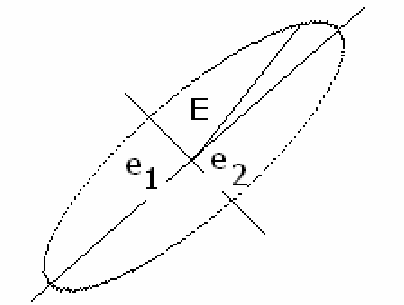


Рис. 4.2. Эллипс поляризации

В общем случае вектор электрического поля делает один оборот за один период волны, а конец этого вектора скользит по эллипсу. Таким образом, электромагнитную волну называют эллиптически поляризованной. Если разность фаз между компонентами постоянна, $\Delta = \varphi_1 - \varphi_2 = const$, то ориентация и форма эллипса поляризации неизменна во времени. При этом имеется ряд интересных частных случаев. Когда разность фаз составляет величину $\pm \pi/2 + n\pi$ (n – целое), эллипс ориентирован по осям координат:

$$\left(\frac{E_x}{e_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{e_2}\right)^2 = 1. \tag{4.38}$$

В случае равенства амплитуд эллипс превращается в окружность, и говорят о волне с круговой поляризацией.

Если разность фаз кратна π, то из (4.37) следует:

$$\left(\frac{E_x}{e_1} \pm \frac{E_y}{e_2}\right)^2 = 0. \tag{4.39}$$

Очевидно, последняя формула описывает прямую, наклоненную к оси *Ox* под углом $arctg(e_2/e_1)$. В этом случае волна называется линейно поляризованной или плоско поляризованной. В такой волне плоскость поляризации фиксирована. В других же вариантах имеет место вращение плоскости поляризации.

Состояние поляризации характеризуется комплексной величиной, называемой множителем поляризации:

$$\Re = \frac{e_1}{e_2}\exp(i\Delta). \tag{4.40}$$

Если и амплитуды компонентов и разность фаз строго фиксированы во времени, то компоненты называются когерентными, а волновое поле – полностью поляризованным. Если же разность фаз является случайной функцией времени или случайными функциями являются амплитуды, то компоненты будут некогерентными, а волны – неполяризованными.

В природе и технике волновые поля часто представляют собой наложения поляризованных и неполяризованных составляющих. В таких случаях волна считается частично поляризованной. В этой связи целесообразно определить количественную величину, характеризующую относительный вклад в волновое поле поляризованной и неполяризованной составляющей.

При описании волн в комплексной форме удобно применить так называемую матрицу когерентности:

$$J = \begin{pmatrix} \overline{E_x E_x^*} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{E_y E_y^*} \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Символ * означает комплексное сопряжение, а черта над выражением соответствует усреднению во времени. След матрицы (4.41):

$$Sp(J) = \overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2} \tag{4.42}$$

представляет собой не что иное, как интенсивность волны I.

В неполяризованной волне компоненты независимы, и усреднение их произведений равно нулю $\overline{E_x E_y^*} = \overline{E_y E_x^*} = 0.$ На каждый компонент приходится половина интенсивности $\overline{|E_x|^2} = \overline{|E_y|^2} = I/2.$ При этом определитель $|J| = I^2/4.$

Можно показать, что в полностью поляризованной волне определитель матрицы когерентности равен нулю. Таким образом, в зависимости от степени поляризованности волнового поля определитель матрицы когерентности принимает числовое значение от 0 до $I^2/4$. Матрица когерентности позволяет рассчитывать поляризованность для различных математических моделей волновых полей.

Экспериментально измеряемой характеристикой поляризованности является степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \qquad (4.43)$$

Предполагается, что имеется измерительный инструмент, который измеряет распределение интенсивности по углу между плоскостью поляризации и фиксированным направлением. В частности, для радиоволн таким инструментом служит простейшая антенна – диполь. Тогда в определении (4.43) I_{max} и I_{min} соответствуют максимальной и минимальной интенсивности. Если волна не поляризована, то интенсивность при всех ориентациях антенны одинакова – степень поляризации равна нулю. В противоположном случае, когда волна полностью поляризована, минимальная интенсивность равна нулю (антенна ориентирована перпендикулярно плоскости поляризации) и степень поляризации равна единице.

Важнейшим обстоятельством является то, что линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн, поляризованных по кругу, у которых направления вращения плоскости поляризации противоположны. Пусть исходная волна единичной амплитуды поляризована линейно так, что вектор электрического поля ориентирован вдоль оси Ox, то есть параллелен единичному вектору $\vec{e}_x$. Формально эту волну можно записать в виде двух компонентов – содержащую как x, так и y составляющие:

$$\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_y \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})\right]. \qquad (4.44)$$

Поскольку разность фаз в искусственно введенных y-составляющих равна π, эти слагаемые в (4.44) взаимно сокращаются. С другой стороны, каждое из выражений в квадратных скобках здесь описывает вращение векторов в плоскости xOy, причем в противоположные стороны – сдвиг фаз между горизонтальной и вертикальной компонентами составляет $+\pi/2$ и $-\pi/2$, соответственно. Геометрически суть представления линейно поляризованной волны двумя циркулярно поляризованными показана на рис. 4.3.

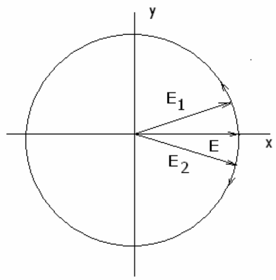


Рис. 4.3. Разложение линейно поляризованной волны на две поляризованные по кругу

Может создаться впечатление, что мы проделали только формальное математическое преобразование, не содержащее никакой физической сущности. В следующих главах мы убедимся, что это не так – любая линейно поляризованная волна всегда составляется из двух поляризованных по кругу. В природе существуют условия, в которых эти составляющие могут быть выделены и даже распространяются различными способами. Пока ограничимся тем, что назовем циркулярные составляющие волнами с правосторонней и левосторонней круговой поляризацией, обыкновенными и необыкновенными волнами или *o*-волнами и *x*-волнами.

4.4. Эффект Доплера

Эффект Доплера описывает явления, проявляющиеся в изменении частоты принимаемого сигнала относительно частоты излучаемого сигнала при относительном движении источника и приемника волн. Хотя качественно характер изменения частоты подобен для волн любой природы, имеются некоторые количественные отличия. Еще более важно то, что физическая интерпретация этих явлений существенно различна для различных типов волн. Несмотря на то, что данный раздел помещен в главу, посвященную электромагнитным волнам, рассмотрение эффекта Доплера следует начать со звуковых волн.

Начнем со случая, когда источник звука покоится в среде распространения, для которой скорость звука равна *c*. Приемник звука удаляется от источника вдоль прямой, соединяющей их со скоростью υ_n. При этом волна движется относительно приемника уже не со скоростью *c*, а с меньшей скоростью, раной $c - \upsilon_n$. Одна длина волны λ проходит мимо приемника, затратив время $\lambda/(c - \upsilon_n)$. Это время является периодом колебания, воспринимаемым приемником. Следовательно, частота волны, воспринимаемая приемником, составляет величину $(c - \upsilon_n)/ \lambda$. В это же время частота волны, излучаемой источником, равна c/ λ. Таким образом, в рассматриваемом случае излучаемая частота f_u и принимаемая частота f_n связаны соотношением:

$$f_n = f_u \frac{c - v_{\text{п}}}{\text{c}}. \tag{4.45}$$

Итак, при удалении приемника от источника частота воспринимаемого сигнала понижается. Если скорость удаления больше скорости звука в среде, то формула (4.45) перестает работать. Физически это означает, что звуковая волна просто не достигает приемника. При приближении источника к приемнику частота увеличивается – в формуле следует рассматривать скорость приемника как отрицательную величину. Наконец, следует отметить, что речь идет именно о скорости относительного удаления или приближения приемника так, что под υ_n следует понимать проекцию скорости на направление прямой, соединяющей приемник и источник.

Теперь будем считать, что приемник покоится в среде распространения, а движется источник от приемника вдоль прямой, их соединяющей со скоростью υ_u. Испускаемая в сторону приемника волна теперь удаляется от источника со скоростью $c + \upsilon_u$. Тогда один временной период в источнике сформирует длину волны, равную $(c + \upsilon_u)T$, которая и будет распространяться в среде со скоростью c. Если же источник покоился бы, то длина волны была бы равна cT. Поскольку частоты обратно пропорциональны длинам волн, связь излучаемой и принимаемой частот в случае подвижного источника имеет вид:

$$f_n = f_u \frac{c}{c + v_u}. \tag{4.46}$$

Замечания, указанные после формулы (4.45), полностью относятся и к последнему соотношению. В частности, формула перестает работать, если источник удаляется от приемника со скоростью, превышающей скорость звука в среде.

Выражения (4.45) и (4.46) легко скомбинировать и получить универсальную формулу эффекта Доплера для звуковых волн, учитывающую движение источника и приемника относительно неподвижной среды распространения звука:

$$f_n = f_u \frac{c - v_n}{c + v_u}. \tag{4.47}$$

Представленная выше методика не применима к выводу формулы эффекта Доплера для электромагнитных (в частности – световых) волн. Дело в том, что для света не существует какой-либо выделенной, «привилегированной» системы координат. Иными словами, скорость света инвариантна для всех инерциальных систем. Таким образом, эффект Доплера для световых волн является эффектом чисто релятивистским.

Вывод основного соотношения для доплеровского смещения частоты электромагнитных волн базируется на двух фундаментальных принципах теории относительности. Во-первых, все законы природы выглядят во всех инерциальных системах координат одинаково. Во-вторых, как уже замечено, скорость распространения электромагнитных волн c во всех системах одинакова.

Рассмотрим одномерное относительное движение источника и приемника света вдоль оси x. Свяжем с источником нештрихованную систему отсчета K, а с приемником – штрихованную систему K'. Системы движутся друг относительно друга со скоростью V. В каждой из систем определена своя координата x и x' и свое время t и t'.

В K-системе запишем волну в виде:

$$E(x,t) = \cos(\omega(t - x/c)). \tag{4.48}$$

Тогда в K'-системе, на основании первого из указанных принципов, формула для волнового поля будет иметь такой же вид:

$$E(x',t') = \cos(\omega'(t' - x'/c)). \tag{4.49}$$

Преобразование времени и координат при переходе от одной системы к другой является известным преобразованием Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (4.50)$$

Поскольку *E(x, t)* должно совпадать с *E(x’, t’),* подстановка (4.50) в (4.49) дает:

$$E(x',t') = \cos\left\{\omega\left[\frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{x' + Vt'}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right]\right\}. \qquad (4.51)$$

После некоторых преобразований выражение (4.51) можно привести к виду:

$$E(x',t') = \cos\left[\omega\frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\left(t' - \frac{x'}{c}\right)\right]. \qquad (4.52)$$

Остается сравнить полученное соотношение с (4.49) и убедиться в том, что:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}. \qquad (4.53)$$

Это и есть формула эффекта Доплера для электромагнитных волн.

Представляет интерес рассмотреть слабо релятивистский случай, когда относительная скорость источника и приемника мала по сравнению со скоростью света $V \ll c$. Разложив (4.53) по малому параметру V/c и ограничившись линейным членом в ряде Тейлора, мы получим:

$$\omega' = \omega(1 - V/c). \qquad (4.54)$$

Здесь также следует напомнить о том, что положительное значение скорости V соответствует взаимному удалению приемника и источника и то, что V является проекцией относительной скорости на прямую, соединяющую приемник и источник.

5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН

Отражение волн – явление, хорошо известное даже в быту. Так, эхо является следствием отражения звуковых волн, например, от стен помещения. Также хорошо знакомо и явление преломления. Искажение формы чайной ложки, опущенной в стакан с водой, является проявлением преломления световых волн. Под отражением и преломлением волн мы будем понимать изменения свойств волн при их падении на границы раздела сред с различающимися характеристиками.

5.1. Импеданс и согласованная нагрузка

Если совершать колебательные движения с концом натянутого упругого шнура, то можно ощутить сопротивление, которое оказывает шнур руке. Рука, как источник волн, преодолевает это сопротивление, совершая работу и развивая некоторую мощность. Точно так же радиопередатчик совершает работу, преодолевая сопротивление даже свободного пространства, которое оно оказывает волнам. Аналогично этому и человеческая гортань совершает работу при излучении в окружающий воздух звука. Таким образом, любая среда сопротивляется возбуждению в ней волн, а любой излучатель волн совершает работу при их испускании, развивая при этом мощность P. Количественная характеристика сопротивляемости среды волнам называется импедансом, или волновым сопротивлением среды. В механических процессах мощность, связанная с передачей энергии телу, пропорциональна квадрату скорости тела. Коэффициент пропорциональности между мощностью и квадратом скорости как раз численно и составляет импеданс. Итак, в механике, если x – координата тела (при рассмотрении одномерного движения), то

$P = Z\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$. В данном случае импеданс Z имеет размерность массы, деленной на время. Переходя от механического движения к другим объектам физики, можно ввести понятие обобщенной координаты φ и обобщенной скорости $\partial\varphi/\partial t$. При рассмотрении волн в струне под φ следует понимать поперечное смещение элемента струны. Для волн в проводящей линии φ может представлять собой напряжение в заданной точке линии, хотя выбор обобщенной координаты можно остановить, например, на заряде данной точке. В электромагнитных волнах обобщенной координатой может быть любой компонент электрического поля. И так далее. Тогда, в общем виде, количественное определение импеданса будет следовать из соотношения:

$$P = Z\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2. \tag{5.1}$$

Здесь P – мощность, развиваемая источником волн. Очевидно, что для различных волновых полей размерность импеданса будет различной. Физическая же сущность импеданса универсальна. Это характеристика среды распространения, определяющая ее сопротивляемость именно волнам.

Приведем пример расчета импеданса для поперечных волн в струне. Как мы видели в главе 1, вертикальная сила, действующая на элемент струны, равна:

$$F = T\sin\alpha \approx Ttg\alpha = T\,{}^{\partial\varphi}\!/_{\partial x}. \tag{5.2}$$

Здесь α – угол наклона касательной к струне в данной точке, а φ – обобщенная координата – вертикальное смещение. Волновое решение мы запишем в стандартном виде:

$$\varphi(x,t) = A\cos(\omega t - kx). \tag{5.3}$$

При этом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= kA\ \sin\,(\,\omega t\ \text{-}\ kx), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -\omega A\ \sin(\ \omega t - kx\ ). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Отсюда можно получить следующее выражение для обобщенной скорости, использующее определение фазовой скорости:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\omega}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -v_\phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{5.5}$$

С учетом формулы (5.2) найдем выражение для вертикальной силы:

$$F = -\frac{T}{v_\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.6}$$

С другой стороны, как известно, мгновенная механическая мощность является произведением силы на скорость $P = F\partial\varphi/\partial\mathrm{t}$. Тогда получим выражение для мощности через обобщенную скорость в случае волн в струне:

$$P = \frac{T}{v_\phi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2. \tag{5.7}$$

«Потерянный» знак минус, вообще говоря, значения не имеет, но его изменение разумно, поскольку мощность расходуется именно на преодоление силы в (5.6).

Остается вспомнить определение фазовой скорости для волн в струне $v_ф = \sqrt{T/\rho}$ и получить окончательное выражение для импеданса:

$$Z = \sqrt{T\rho}. \tag{5.8}$$

Теперь мы имеем две характеристики среды, связанные с ее волновыми свойствами. Фазовая скорость является кинематической характеристикой, в то время как импеданс представляет собой динамическую характеристику. Можно видеть, что и то и другое зависит от одних и тех же величин (силы натяжения и линейной плотности), но входящих в различных комбинациях. Заметим также, что имеет место еще одно количественное определение волнового сопротивления. Импеданс является коэффициентом пропорциональности между силой, работающей в волне, и обобщенной скоростью:

$$F = Z\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.9}$$

В другом примере механических волн – продольных волнах в твердом теле мы имели выражение для фазовой скорости $v_ф = \sqrt{ka/\rho}$. Логично предположить (и это можно показать), что импеданс будет определяться формулой:

$$Z = \sqrt{ka\rho}. \tag{5.10}$$

В проводящей линии с погонной индуктивностью L/a и погонной емкостью C/a электрическая мощность есть произведение тока на напряжение $P = IV$. Ток является производной от заряда по времени $I = {\partial Q}/{\partial t}$. Обобщенной координатой в данном случае можно считать заряд Q, а обобщенной скоростью – ток I.

Продифференцировав формулу связи заряда, накопленного в емкости с напряжением $Q = CV$, получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = C\frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (5.11)$$

Величина $\partial Q/\partial t$, являющаяся током через емкость, соответствует приращению тока при переходе от одной LC-ячейки эквивалентной схемы проводящей линии к другой. Можно записать ее в форме $\Delta I = \Delta x \, \Delta I/\Delta x$. Это сделано для использования длины ячейки а в предельном переходе при $\Delta x \to 0$. Теперь $\partial Q/\partial t = a \, \partial I/\partial x$. Поскольку в волне все величины V, Q, и I пропорциональны $\cos(\omega t - kx)$, из последнего соотношения и формулы (5.11) следует:

$$V = -\frac{\omega}{k}\frac{a}{C}I = -\frac{a}{Cv_{ф}}I. \qquad (5.12)$$

Из основного исходного соотношения $P = VI$ и определения $P = ZI^2$ получаем:

$$Z = \frac{a}{Cv_{ф}}. \qquad (5.13)$$

В первой главе мы определили фазовую скорость в проводящей линии, выражаемую через погонные индуктивность и емкость:

$$v_{ф} = \sqrt{\frac{a}{L}\frac{a}{C}}. \qquad (5.14)$$

Отсюда следует окончательное выражение для импеданса, которое мы представим так:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{a}\frac{a}{C}}. \tag{5.15}$$

Мы видим, что волновое сопротивление выражается комбинацией тех же параметров, что и фазовая скорость, как это имело место для механических волн. Нетрудно проверить, что для рассматриваемой электрической системы импеданс имеет размерность электрического сопротивления, хотя как такового активного сопротивления в рассматриваемой эквивалентной схеме нет. Из этого следует, что волновое сопротивление в любых средах носит чисто реактивный характер и не связано с диссипацией энергии.

До сих пор мы рассматривали абстрактную проводящую линию. Теперь исследуем более реалистичную модель. Будем считать, что линия представляет собой две плоско-параллельные проводящие пластины, вытянутые в направлении оси *Ox*. Ширина пластин равна w, а расстояние между ними обозначим через *g*. Рассмотрим участок линии длиной *a*. Описанная геометрия представлена на рис. 5.1.

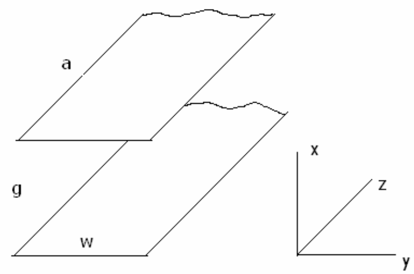


Рис. 5.1. Проводящая линия из плоско-параллельных пластин

Для данной системы необходимо найти погонную емкость и погонную индуктивность. Рассматривая участок линии как конденсатор, заключим, что между плоскостями формируется электрическое поле $E = E_x = V/g$, где V – напряжение между пластинами. Поскольку емкость плоского конденсатора в данном случае определяется величиной $C = \varepsilon_0 S/g$, а заряд на пластине равен $Q = \varepsilon_0 SE$, $S = wa$, погонная емкость составит величину:

$$\frac{C}{a} = \frac{Q}{Va} = \frac{Q}{gEa} = \frac{Q\varepsilon_0 aw}{gaQ} = \frac{\varepsilon_0 w}{g}. \qquad (5.16)$$

Ток I, текущий по пластинам, наводит в боковом сечении ga магнитный поток $\Phi = gaB$, где $B = B_y$. Из магнитостатики для данной геометрии известно, что $wB = \mu_0 I$. По определению индуктивность L является коэффициентом пропорциональности между током и магнитным потоком, им наводимым $\Phi = LI$. Теперь определяем погонную емкость:

$$\frac{L}{a} = \frac{\Phi}{Ia} = \frac{gaB}{Ia} = \frac{gB\mu_0}{wB} = \frac{\mu_0 g}{w}. \qquad (5.17)$$

Таким образом, фазовая скорость волны в проводящей линии $v_\phi = \sqrt{\frac{a}{L}\frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ совпадает со скоростью света в вакууме. Волновое сопротивление нашей системы равно:

$$Z = \sqrt{\frac{a}{C}\frac{L}{a}} = \frac{g}{w}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \qquad (5.18)$$

Мощность волны:

$$P = ZI^2 = \frac{V^2}{Z} = g^2 E^2 \frac{w}{g}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = gw\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2. \qquad (5.19)$$

Плотность потока энергии в волне:

$$S = \frac{P}{wg} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2. \qquad (5.20)$$

Обратившись к материалам предыдущей главы, можно убедиться в том, что плотность потока полностью совпадает с соответствующим выражением для электромагнитной волны в вакууме. Аналогичный вывод можно сделать и для объемной плотности энергии.

Реальная проводящая линия не безгранична. Удаленный ее конец может быть либо просто разорван, либо нагружен какой-то замыкающей «заглушкой». Очевидно, что если «заглушка» имеет сопротивление, равное импедансу линии, то ее присутствие эквивалентно продолжению линии до бесконечности. Другими словами, «заглушка» полностью поглощает падающую на нее волну. Такая нагрузка называется согласованной.

Рассмотрим, каким требованиям должна отвечать согласованная нагрузка в нашей модели. Представим себе, что удаленный конец линии замкнут проводящим прямоугольным параллелепипедом шириной w, высотой g и толщиной d – рис. 5.2.

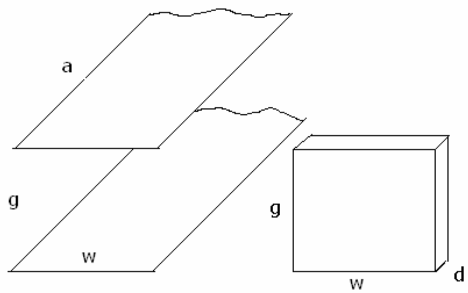


Рис. 5.2. Нагрузка для проводящей линии

Поскольку речь идет об электрических явлениях, импедансом «заглушки» будет просто ее активное электрическое сопротивление R. Условием согласованности является равенство импедансов линии и нагрузки $Z = R$, где Z определяется формулой (5.18). Сопротивление проводящего параллелепипеда пропорционально его длине в направлении тока g и обратно пропорционально площади поперечного сечения dw. Коэффициент пропорциональности ρ является только характеристикой материала, из которого сделана «заглушка» и называется удельным сопротивлением:

$$R = \rho \frac{g}{wd}. \tag{5.21}$$

Приравняв последнее значение импедансу линии, можно показать, что для согласованной нагрузки должно быть:

$$\frac{\rho}{d} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \tag{5.22}$$

В правой части последнего соотношения стоит уже знакомая нам комбинация мировых констант, имеющая размерность сопротивления, численно равная 377 Ом и получившая название волнового сопротивления свободного пространства.

Интересно оценить технические параметры согласованной нагрузки. Удельное сопротивление меди составляет $1,7\cdot10^{-4}$ Ом/м. Толщина такой медной пластинки, в соответствии с (5.22) должна составлять $5\cdot10^{-11}$ м, что совершенно нереально, поскольку такая толщина меньше размера атома. Для графита с удельной проводимостью $3,5\cdot10^{-1}$ Ом/м толщина должна составить 10^{-7} м. Создание столь тонких графитовых пленок возможно, но, в любом случае, разработка согласованных нагрузок из обычных материалов – задача не простая.

5.2. Отражение волн на границе двух сред

Достигая границы раздела сред с различными свойствами, волна в общем случае может частично отразиться от границы и пойти в обратно направлении и частично пройти через границу и распространиться вперед. Важнейшей задачей является определение относительных долей отраженной и прошедшей волны. Рассмотрим такую задачу для модели механических поперечных волн в струне. При этом окончательные расчетные формулы будут приведены к универсальному виду, применимому к волнам любого типа.

Пусть слева из бесконечности вдоль оси Ox распространяется одномерная волна $\varphi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, достигая точки $x = 0$, правее которой среда распространения имеет другие свойства. Как мы видели в предыдущем разделе, правую часть полупространства можно заменить эквивалентной нагрузкой, имеющей импеданс, равный волновому сопротивлению среды справа от точки $x = 0$. Говоря о поперечных волнах в струне, можно наглядно представить эту нагрузку в виде амортизатора, действующего на конец струны. Будем обозначать через $V_{пад}$ и $V_{отр}$ поперечные скорости точки струны, которые связаны с падающей и отраженной волной, соответственно. Пусть импеданс струны слева от границы составляет величину Z_1, а импеданс амортизатора равен Z_2.

Если бы амортизатор являлся согласованной нагрузкой, то граничная сила $F_{гр}$, действующая на струну со стороны амортизатора, была бы равна:

$$F_{гр} = -Z_1 V_{пад}. \qquad (5.23)$$

Если же нагрузка согласована не полностью, то на струну действует сила:

$$F = F_{гр} + F_{изб}, \qquad (5.24)$$

где $F_{изб}$ – некоторая избыточная сила. Последняя, действуя на струну, как раз и генерирует отраженную волну, распространяющуюся в струне справа налево. Для нее:

$$Z_1 V_{отр} = F_{изб}. \qquad (5.25)$$

Подстановка последнего выражения в (5.24) с учетом (5.23) дает:

$$F = -Z_1 V_{пад} + Z_1 V_{отр}. \qquad (5.26)$$

С другой стороны, сила реакции амортизатора F равна произведению суммарной скорости в волне (падающей и отраженной) на $-Z_2$. Ну, а суммарная скорость равна $V = V_{пад}$ + + $V_{отр}$. Таким образом, для силы сопротивления амортизатора имеем:

$$F = -Z_2 V = -Z_2 V_{пад} - Z_2 V_{отр}. \qquad (5.27)$$

Сравнение (5.27) с (5.26) дает равенство правых частей этих соотношений:

$$-Z_1 V_{пад} + Z_1 V_{отр} = -Z_2 V_{пад} - Z_2 V_{отр}. \qquad (5.28)$$

Сгруппировав слагаемые со скоростями в падающей и отраженной волн, получим:

$$\frac{V_{отр}}{V_{пад}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \qquad (5.29)$$

Последнее соотношение показывает, очевидно, отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей волны. Естественно назвать это отношение амплитудным коэффициентом отражения на границе раздела двух сред:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \qquad (5.30)$$

Как говорилось ранее, выражение (5.30) носит универсальный характер – отражение на границе раздела любых волн полностью определяется импедансами сред. Если волновые сопротивления слева и справа одинаковы, то волна проходит границу без отражения. В случае бесконечно большого импеданса второй среды $Z_2 = \infty$ коэффициент отражения равен –1. Суммарная волна в струне представляет собой сумму волн, противоположных по знаку и распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi = \cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz) = 2\sin(\omega t)\sin(kz). \qquad (5.31)$$

Формируется стоячая волна. Для волн в струне такое импедансное условие означает жесткое закрепление конца струны. Для проводящей линии, очевидно, бесконечно большой импеданс соответствует просто размыканию линии.

В противоположном случае, когда $Z_2 = 0$, коэффициент отражения обращается в 1 и также формируется стоячая волна, но с другой начальной фазой модуляции амплитуды и другой начальной фазой несущей:

$$\varphi = \cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz) = 2\cos(\omega t)\cos(kz). \qquad (5.32)$$

Для волн в струне такой импеданс на границе означает полностью свободный конец струны. Для электрической линии нулевой импеданс соответствует короткому замыканию удаленного конца.

5.3. Компенсация отражения

Отражение волн на границе раздела сред на практике зачастую является нежелательным явлением. Так, оптические приборы, получающие свет через стекла объективов, должны получать максимально возможный световой поток. Динамики, излучающие звуковые волны, должны отдать максимум звука в окружение и избегать отражения внутрь, а плоскость между динамиком и внешним пространством тоже является границей раздела. Существует ряд методов компенсации отражения на границе сред с различными импедансами. Рассмотрим два из них.

Первый вариант реализован в так называемой технологии тонких пленок. Идея состоит в том, чтобы создать в пространстве, из которого падает исходная волна, две отраженные волны, равные по амплитуде, но находящиеся в противофазе. При этом, складываясь, эти волны уничтожают друг друга, устраняя отраженное поле. Суть метода представлена на рис. 5.3.

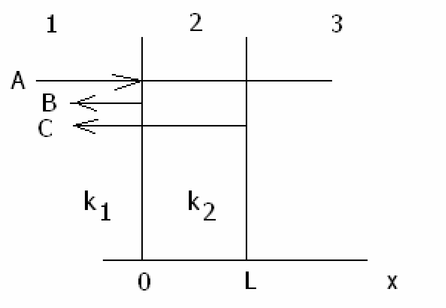


Рис. 5.3. Компенсация отражения в тонких пленках

Итак, для компенсации отражения волн на границе сред 1–3 с импедансими Z_1 и Z_3 между этими средами создается слой толщиной L с импедансом Z_2. На границу 1–2 в положительном направлении оси Ox падает исходная волна A единичной амплитуды, которую мы представим в виде:

$$A = \cos(\omega t - k_1 x), \tag{5.33}$$

где k_1 – волновое число в среде 1. Падающая волна частично проходит границу и частично отражается обратно в виде волны B:

$$B = R_{12} \cos(\omega t + k_1 x). \tag{5.34}$$

Здесь R_{12} – коэффициент отражения от границы 1–2, а знак у волнового числа изменен на противоположный, поскольку отраженная волна распространяется в обратном направлении. Частично прошедшая первую границу волна будет иметь в среде 2 амплитуду $1 - R_{12}$ – эту величину можно назвать коэффициентом прохождения границы 1–2. Далее прошедшая волна частично отражается границей 2–3, после чего ее амплитуда становится равной $(1 - R_{12})R_{23}$. Наконец, эта часть волны частично проходит границу 2–1 и выходит в среду 2 в виде еще одной отраженной волны с амплитудой $(1 - R_{12})R_{23}(1 - R_{21})$ – волна C.

Пройдя дважды среду 2, вторая отраженная волна приобретает в ней набег фазы $\Delta\Phi$. Тогда волну C можно представить в виде:

$$C = (1 - R_{12})R_{23}(1 - R_{21})\cos(\omega t + k_1 x + \Delta\Phi). \qquad (5.35)$$

Ограничимся случаем слабого отражения, когда все коэффициенты отражения малы по сравнению с единицей. В этом случае амплитуда волны C равна R_{23}, и равенство амплитуд волн B и C, необходимое для компенсации отражения, достигается при условии $R_{12} = R_{23}$. Тогда из (5.30) следует соотношение:

$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}. \qquad (5.36)$$

Поделив числитель и знаменатель левой части последней формулы на Z_1, а правой части – на Z_2, получим Z_1/Z_2 =
= Z_2/Z_3, или окончательно:

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}. \qquad (5.37)$$

Итак, первое условие, необходимое для компенсации отражения заключается в выборе такого материала среды 2, для которого импеданс равен среднему геометрическому импедансов сред 1 и 3.

Для того чтобы волны C и B находились в противофазе, необходимо иметь набег фазы в среде 2, равный нечетному числу π, то есть $\Delta\Phi = n\,\pi$, n = 1, 3, 5… . Очевидно, что набег фазы составляет величину $2Lk_2$. Отсюда следует формула для толщины слоя среды 2:

$$L = \frac{n\pi}{2k_2} = n\frac{\lambda_2}{4}, \tag{5.38}$$

где λ_2 – длина волны данной частоты в среде 2. Таким образом, минимальная толщина слоя 2 будет составлять четверть длины волны в веществе среды 2.

Рассмотренная методика компенсации отражения широко используется в виде так называемой технологии тонких пленок, наносимых на объективы оптических приборов. Такие объективы получили название объективов с просветленной оптикой. В частности, все более или менее качественные фотокамеры снабжаются просветленной оптикой. Наличие покрытия объектива тонкой пленкой легко обнаружить визуально. Такой объектив имеет характерное свойство отражать коротковолновый (фиолетовый) и, менее заметно, длинноволновый (красный) концы видимого спектра. Действительно, все рассмотренное выше относится к фиксированной частоте. По мере удаления по частоте от фиксированной в любую сторону компенсация ухудшается. Просветленная оптика настраивается на компенсацию середины диапазона видимого света, в то время как края диапазона все же отражаются.

Другой метод компенсации отражения называется методом плавного импеданса. Суть метода заключается в том, что, применительно к рис. 5.3, среда 2 создается не однородной, а с переменным по толщине волновым сопротивлением. Импеданс вещества 2 слабо меняется на длине волны. Разобьем условно область 2 на тонкие слои толщиной $\lambda/4$, где λ – длина волны в данном слое. (Поскольку изменение импеданса связано с изменение показателя преломления, понятно, что толщины слоев будут различаться, но незначительно.) Так как толщина слоя равна четверти длины волны, как и в методе тонких пленок, первичное и вторичное отражения в каждом слое скомпенсированы по фазе. При переходе от слоя с номером i к слою с номером i+1 частичный коэффициент отражения составит:

$$\Delta R_i = \frac{Z_i - Z_{i+1}}{Z_i + Z_{i+1}}. \qquad (5.39)$$

Обозначим через ΔZ разность $Z_{i+1} - Z_i$, а через Z полусумму $(Z_{i+1} + Z_i)/2$. Тогда:

$$\Delta R_i = -\frac{\Delta Z}{2Z} = -\frac{1}{2Z}\frac{\Delta Z}{\Delta x}\Delta x \approx -\frac{1}{2Z}\frac{dZ}{dx}\frac{\lambda}{4}. \qquad (5.40)$$

Здесь дифференциал координаты приближенно заменен на четверть длины волны, как на величину малую.

Если частичные коэффициенты отражения на всех слоях одинаковы (ΔR не зависит от номера слоя), то на каждом слое первичная и вторичная отраженные волны совпадают по амплитуде. Тогда на каждом слое имеет место полная компенсация отражения. Стало быть, это имеет место и для всей системы. Итак, полагаем, что $\Delta R = a$ – произвольная постоянная. Из (5.40) следует дифференциальное уравнение:

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{8\alpha}{\lambda}dx. \qquad (5.41)$$

По сути дела, величину $-8a/\lambda$ тоже можно считать произвольной константой β. Теперь уравнение (5.41) будет иметь решение:

$$Z = \mathrm{Z}_0 e^{\beta x}. \qquad (5.42)$$

Величина Z_0 соответствует импедансу области 1. Всегда можно выбрать величину β такой, чтобы по выходу из области 2 согласовать импеданс с областью 1.

Итак, для компенсации отражения методом плавного импеданса необходимо создать промежуточный слой, в котором импеданс меняется с толщиной по экспоненциальному закону. При этом на длине волны импеданс должен меняться слабо. Примером реализации метода могут служить раструбы духовых музыкальных инструментов. Поскольку расширение раструба напоминает экспоненциальную кривую, при переходе от рабочей области инструмента к открытому воздуху создан плавный импеданс. Надо отметить, что форма раструба подбиралась эмпирически мастерами еще задолго до появления теории волн. Можно упомянуть и о так называемых рупорных антеннах, излучающих радиоволны СВЧ диапазона. Геометрические формы таких антенн также обусловлены требованиями метода плавного импеданса.

5.4. Закон Снеллиуса и формулы Френеля

Ранее мы рассматривали одномерные волны, и о направлениях распространения падающих, отраженных и прошедших граница раздела волн говорить не приходилось. Теперь рассмотрим вопрос о взаимосвязи таких направлений в случае падения волны на границу под произвольным углом. На рис. 5.4 представлена геометрия падающей, отраженной и прошедшей границу (преломленной) волны в плоскости падения xOz, в которой лежит нормаль к плоскости раздела Oz и волновые вектора волн.

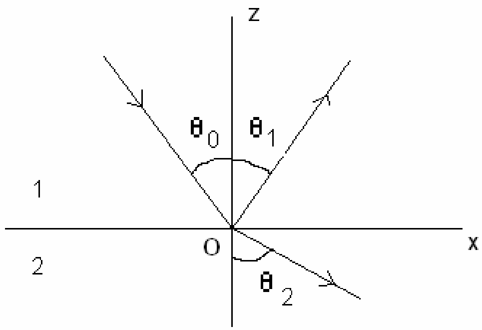


Рис. 5.4. Геометрия отражения и преломления волн

Волна падает на границу из пространства 1 под углом θ_0 к нормали Oz – углом падения, частично отражается обратно под углом θ_1 – углом отражения и частично проходит (преломляется) в среду 2 под углом θ_2 – углом преломления. Хорошо известно, что угол падения равен углу отражения $\theta_0 = \theta_1$. Это должно быть понятно из соображений симметрии, но может быть и доказано. Если показатели преломлений сред 1 и 2 различны, то угол преломления не равен углу падения. Физическая причина неравенства углов заключается в различии фазовых скоростей волн в средах 1 и 2. Соотношение, связывающее между собой углы падения и отражения, носит название закона Снеллиуса. Этот закон может быть получен из некоторых общих принципов. Представим два варианта вывода формулы закона Снеллиуса.

Первый способ основан на так называемом принципе Ферма, который утверждает, что траектория распространения света (в общем случае – волны любого типа) между двумя точками пространства такова, что фазовое время распространения минимально. Сначала несколько преобразуем рис. 5.4 и приведем его к виду, показанному на рис. 5.5. Имеется плоская граница раздела сред 1 и 2, характеризующихся показателями преломления n_1 и n_2, соответственно. Волна распространяется из точки A, находящейся в области 1 на высоте a над границей и на нулевой горизонтальной координате x. Конечная точка находится в области 2 на глубине b и на горизонтальной координате m.

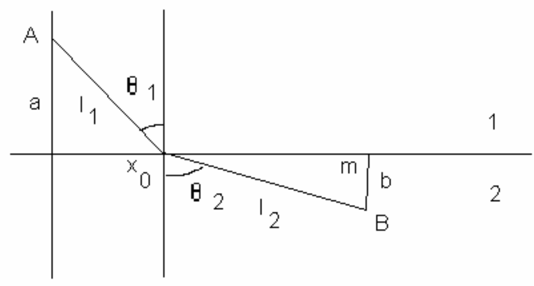


Рис. 5.5. К выводу закона Снеллиуса из принципа Ферма

Фазовое время на некотором отрезке определяется как длина этого отрезка, деленная на фазовую скорость. У нас траектория состоит из суммы двух прямолинейных отрезков l_1 и l_2, так, что фазовое время равно $t_ф = l_1/v_{ф1} + l_2/v_{ф2}$. Поскольку фазовая скорость в среде равна $v_ф = c/n$ (c – скорость света, n – показатель преломления), для суммарного фазового времени по обоим отрезкам имеем $t_ф = (n_1l_1 + n_2l_2)/c$. Обозначим через x_0 координату точки преломления. Тогда, из геометрии прямоугольных треугольников следует:

$$t_ф = \frac{1}{c}(n_1\sqrt{a^2 + x_0^2} + \sqrt{b^2 + (m - x_0)^2}). \qquad (5.43)$$

Необходимо найти такое значение x_0, при котором значение фазового времени минимально. Для этого продифференцируем выражение (5.43) по x_0 и приравняем производную нулю:

$$\frac{\partial t_\phi}{\partial x_0} = \frac{1}{c}\left(n_1 \frac{2x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} - n_2 \frac{2(m - x_0)}{\sqrt{b^2 + (m - x_0)^2}} \right) = 0. \quad (5.44)$$

Легко видеть, что:

$$\frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} = \sin\theta_1,$$
$$\frac{m - x_0}{\sqrt{b^2 + (m - x_0)^2}} = \sin\theta_2. \quad (5.45)$$

Теперь из равенства нулю (5.44) следует математическая формулировка закона Снеллиуса:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \quad (5.46)$$

Преломление волн на границе раздела полностью определяется показателями преломления сред.

Закон Снеллиуса может быть получен и из принципа Гюйгенса, который утверждает, что все точки любой поверхности являются источниками сферических волн, которые и формируют волновое поле во всем пространстве.

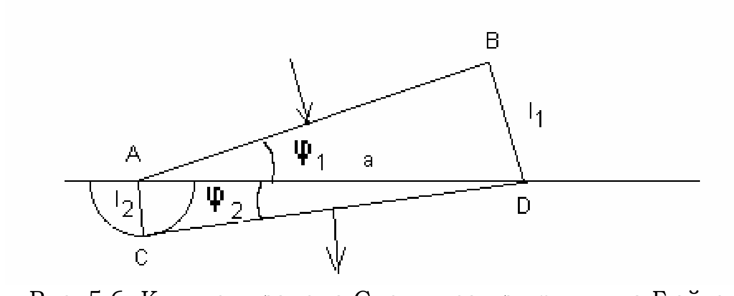


Рис. 5.6. К выводу закона Снеллиуса из принципа Гюйгенса

В соответствии с рис. 5.6, рассмотрим ситуацию, когда на границу раздела из области 1 падает плоская волна

– направление падения показано стрелкой. Отрезок AB представляет собой часть проекции фазовой поверхности на плоскость падения. Рассматривается момент, когда конец A этого отрезка коснулся плоскости раздела. Точка касания, а затем и другие точки прямой AD начинают излучать сферические волны, формирующие фазовую поверхность CD в области 2. Спустя время T границы раздела коснется второй конец фронта B, пройдя расстояние l_1. За это время левый конец фронта CD пройдет расстояние l_2. В области 1 длина l_1 равна $\upsilon_{ф1}T = cT/n_1$, В области 2 длина l_2 равна $\upsilon_{ф2}T = cT/n_2$. Теперь из прямоугольных треугольников ABD и ACD с общей гипотенузой a следует:

$$a = \frac{l_1}{\sin\varphi_1} = \frac{l_2}{\sin\varphi_2} = \frac{cT}{n_1 \sin\varphi_1} = \frac{cT}{n_2 \sin\varphi_2}. \tag{5.47}$$

С учетом того, что углы φ_1 и φ_2 равны углам падения и преломления (как дополнительные углы прямоугольных треугольников), соответственно, снова имеем закон Снеллиуса $n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$.

Если в данном подходе рассмотреть отражение волны, то можно представить в области 1 прямоугольный треугольник, равный ABD с той же диагональю, но повернутый относительно ABD на 180 градусов по вертикали. Отсюда следует, что угол отражения будет равен углу падения.

При падении волны из более оптически плотной среды в менее оптически плотную ($n_1 > n_2$) угол преломления больше угла падения. При некотором угле падения угол преломления становится равным $\pi/2$. Таким образом, начиная с определенного угла падения, при дальнейшем его увеличении волна уже не проходит в область 2, имеет место так называемое полное внутреннее отражение. Нетрудно понять, что, поскольку $\theta_2 = \pi/2$, предельный угол определяется соотношением $n_1 sin\theta_1 = n_2$. То есть начальный угол полного внутреннего отражения равен:

$$\theta_{пред} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{5.48}$$

Если имеется многослойная среда или среда с плавным изменением показателя преломления, то закон Снеллиуса позволяет построить траекторию распространения волны – луч. При этом закон следует записать в виде $sin(\theta)n = const$.

Ранее мы рассмотрели вопрос о коэффициенте отражения для одномерной волны. В случае наклонного падения волн на границу раздела коэффициенты отражения и преломления рассчитываются по так называемым формулам Френеля, которые мы выведем применительно к электромагнитным волнам. Рис. 5.7 иллюстрирует геометрию преломления и отражения. Плоскость падения является плоскостью *zOx.* Верхняя полуплоскость содержит среду 1, из которой на границу раздела падает волна. Нижняя полуплоскость содержит среду 2. Единичный вектор $\vec{m}_0$ совпадает по направлению с волновым вектором падающей волны $\vec{k}_0$. Для отраженной волны соответствующими векторами будут $\vec{m}_1$ и $\vec{k}_1$, а для преломленной волны – $\vec{m}_2$ и $\vec{k}_2$.

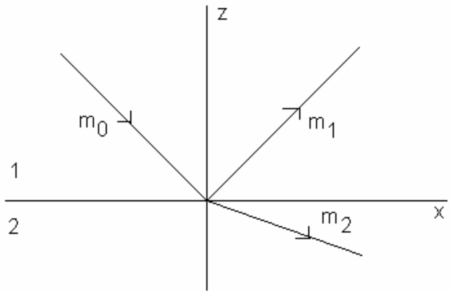


Рис. 5.7. К выводу формул Френеля

Падающую, отраженную и преломленную волны представим в комплексной форме. Для электрического поля волн имеем:

$$\begin{aligned}
&\vec{E}_0 \exp\{i[k_0(\vec{m}_0\vec{r}) - \omega t]\},\\
&\vec{E}_1 \exp\{i[k_1(\vec{m}_1\vec{r}) - \omega t]\}, \qquad (5.49)\\
&\vec{E}_2 \exp\{i[k_2(\vec{m}_2\vec{r}) - \omega t]\}.
\end{aligned}$$

Учитывая связь между магнитным и электрическим полем в волне, полученную в предыдущей главе, можно записать магнитные составляющие следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\vec{H}_0 = \frac{[\vec{m}_0\vec{E}_0]}{Z_1}\exp\{i[k_0(\vec{m}_0\vec{r}) - \omega t]\},\\
&\vec{H}_1 = \frac{[\vec{m}_1\vec{E}_1]}{Z_1}\exp\{i[k_1(\vec{m}_1\vec{r}) - \omega t]\}, \qquad (5.50)\\
&\vec{H}_2 = \frac{[\vec{m}_2\vec{E}_2]}{Z_2}\exp\{i[k_2(\vec{m}_2\vec{r}) - \omega t]\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $k_0 = k_1$, а импедансы определяются значениями $Z_1 = \sqrt{\mu_0\mu_1 / \varepsilon_0\varepsilon_1}$, $Z_2 = \sqrt{\mu_0\mu_2 / \varepsilon_0\varepsilon_2}$.

Из электродинамики известно, что при переходе из одной среды в другую через границу раздела сохраняются тангенциальные к границе компоненты полей. Если ввести единичный вектор вдоль оси Oz – вектор $\vec{z}$, то векторное произведение $[\vec{z}\vec{R}]$ как раз дает продольную к границе раздела составляющую вектора $\vec{R}$. Тогда, сократив в фазовых множителях в (5.49) зависимость от времени, запишем условие непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля волны:

$$[\vec{z}\vec{E}_0]\exp(i\vec{k}_0\vec{r}) + [\vec{z}\vec{E}_1]\exp(i\vec{k}_1\vec{r}) = [\vec{z}\vec{E}_2]\exp(i\vec{k}_2\vec{r}). \quad (5.51)$$

Аналогично, для магнитного поля:

$$[\vec{z}[\vec{m}_0\vec{E}_0]]exp(i\vec{k}_0\vec{r})/Z_1 + [\vec{z}[\overrightarrow{m_1 E_1}]]exp(i\vec{k}_1\vec{r})/Z_1 = $$
$$= [\vec{z}[\overrightarrow{m_2 E_2}]]exp(i\vec{k}_2\vec{r})/Z_2. \quad (5.52)$$

Для выполнения этого условия необходимо, во-первых, потребовать равенства всех фазовых множителей на границе:

$$k_1(\vec{m}_0\vec{r})\,|_{z=0} = k_1(\vec{m}_1\vec{r})\,|_{z=0} = k_2(\vec{m}_2\vec{r})\,|_{z=0}\,. \quad (5.53)$$

Здесь, без потери общности, можно отнормировать вектор $\vec{r}$ на единичную длину. Тогда, как можно показать, (5.53) преобразуется в следующую формулу с участием углов падения, отражения и преломления:

$$k_1\sin\theta_0 = k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2. \quad (5.54)$$

Первое равенство утверждает, что угол падения равен углу отражения. Поскольку $k = n\omega/c$, легко видеть, что второе из равенств (5.54) снова привело нас к закону Снеллиуса.

Прежде чем переходить к соотношениям амплитуд, представим волну в виде суммы двух волн с различными поляризациями. Для электрических компонентов запишем:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}. \quad (5.55)$$

Здесь $\vec{E}_{\perp}$ – перпендикулярная к плоскости падения составляющая, имеющая, очевидно, только y – компонент E_y. $\vec{E}_{\parallel}$ – продольная к плоскости падения составляющая, имеющая z- и x-компоненты E_z и E_x, но не имеющая z-компонента.

Для волны с перпендикулярной к плоскости падения поляризацией из (5.51) и (5.52) будем иметь:

$$E_0 + E_1 = E_2,$$
$$\frac{E_0 \cos\theta_0}{Z_1} - \frac{E_1 \cos\theta_1}{Z_1} = \frac{E_2 \cos\theta_2}{Z_2}. \tag{5.56}$$

После некоторых довольно громоздких, но несложных преобразований из системы (5.56) можно получить коэффициент отражения для перпендикулярно поляризованных волн:

$$R_\perp = \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_2 \cos\theta_0 - Z_1 \cos\theta_2}{Z_2 \cos\theta_0 + Z_1 \cos\theta_1}, \tag{5.57}$$

и коэффициент преломления:

$$T_\perp = 1 - R_\perp = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2Z_2 \cos\theta_0}{Z_2 \cos\theta_0 + Z_1 \cos\theta_1}. \tag{5.58}$$

Перейдя к случаю нормального падения на границу, когда все углы равны нулю, легко получить выведенные ранее коэффициенты отражения и прохождения для одномерных волн.

Для того чтобы получить коэффициенты отражения и преломления для волн, поляризованных параллельно плоскости падения, необходимо за основу взять вместо (5.49) записи для магнитных составляющих, вместо (5.50) выразить электрические поля через магнитные, разложить по поляризациям не электрические, а магнитные составляющие и, действуя аналогично, получить:

$$R_{\parallel} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{Z_1 \cos\theta_0 - Z_2 \cos\theta_2}{Z_1 \cos\theta_0 + Z_2 \cos\theta_2},$$
$$T_{\parallel} = \frac{H_2}{H_0} = \frac{2Z_2 \cos\theta_2}{Z_1 \cos\theta_0 + Z_2 \cos\theta_2}. \tag{5.59}$$

Формулы (5.57) – (5.59) получили название формул Френеля.

Для волн, поляризованных параллельно плоскости падения, имеется одна интересная особенность. Прежде всего напомним, что для непроводящей *(σ = 0)* и немагнитной *(μ = 1)* среды импеданс равен $\sqrt{\mu_0 / \varepsilon\varepsilon_0}$. При этом:

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_2}. \tag{5.60}$$

С учетом того, что $\sqrt{\varepsilon} = n$ и закона Снеллиуса $n_2 sin\theta_2$ =

= $n_1 sin\theta_1$, а также того, что $\theta_1 = \theta_0$ из (5.60), можно получить:

$$R_{\parallel} = \frac{tg(\theta_0 - \theta_2)}{tg(\theta_0 + \theta_2)}. \tag{5.61}$$

Если сумма углов $\theta_0 + \theta_2$ составляет $\pi/2$, то знаменатель в формуле (5.61) обращается в бесконечность, а коэффициент отражения – в ноль. Это произойдет при $\theta_0 = arctg\left(n_2 / n_1 \right)$ – так называемом угле Брюстера. Если волна падает на границу раздела под углом, равным углу Брюстера, то компонент, поляризованный параллельно плоскости падения, не отражается, а отражается только перпендикулярно поляризованная волна. Явление Брюстера может быть легко использовано для получения линейно поляризованного света или другой электромагнитной волны.

6. ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Под неоднородными средами будем понимать среды, в которых характеристики изменяются в пространстве, причем, в отличие от резких границ раздела, речь идет о непрерывном изменении характеристик от точки к точке. Важнейшей характеристикой распространения волн является показатель преломления, а применительно к электромагнитным волнам показатель преломления определяется в первую очередь диэлектрической проницаемостью, к более детальному знакомству с которой мы и переходим.

6.1. Диэлектрическая проницаемость среды

В линейной электродинамике напряженности и индукции полей, а также плотность тока и электрическое поле связаны между собой через диэлектрическую и магнитную проницаемость и проводимость $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Как уже указывалось ранее, проницаемости и проводимость могут являться тензорами, однако в данном рассмотрении будем считать их скалярными величинами.

Воздействие внешнего электрического поля на среду приводит к ее поляризации. Речь идет не о направлении поляризации волны, а о появлении наведенного заряда, связанного с пространственным разделением, например, электронов и ионов. Такое разделение приводит к поляризованности (дипольному электрическому моменту единицы объема), определяемому вектором:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}. \tag{6.1}$$

Поляризованность (в линейной теории), естественно, пропорциональна наложенному полю, а коэффициент пропорциональности х называется диэлектрической восприимчивостью. С другой стороны, поскольку поляризованность как раз и является добавкой к внешнему полю, формирующей вместе с ним электрическую индукцию, имеет место следующая связь:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}. \tag{6.2}$$

Таким образом, $\varepsilon = 1 + x$. Теперь мы имеем рецепт нахождения диэлектрической проницаемости в общем виде. Применим его к двум типичным средам – к плазме и к диэлектрикам.

В данном случае под плазмой будем понимать смесь неподвижных тяжелых положительных зарядов и свободных электронов. Такому определению соответствуют хорошие металлические проводники и газовая разреженная плазма. Уравнение движения электрона под действием макроскопического электрического поля $\vec{E}$ и с учетом столкновений с другими частицами имеет вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} + e\vec{\mathrm{E}}. \tag{6.3}$$

Здесь m и e – масса и заряд электрона, ν – частота столкновений, $\vec{r}$ – координата электрона (смещение относительно начального положения). В случае гармонической зависимости электрического поля от времени, как это и имеет место в волне, E пропорционально $exp(-i\omega t)$, и для скорости электрона из (6.3) имеем:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{e\vec{E}}{m(\nu - i\omega)}. \qquad (6.4)$$

Дипольный момент единицы объема при смещении электронов на величину $\vec{r}$ составит значение $\vec{P} = eN\vec{r}$, где N – концентрация электронов. Тогда, с учетом (6.4), найдем, что $eN\vec{v} = d\vec{P}/dt = -i\omega\vec{P}$, а, следовательно:

$$\vec{P} = i\frac{e^2 N\vec{E}}{m\omega(\nu - \mathrm{i}\omega)}. \qquad (6.5)$$

Поскольку коэффициент пропорциональности между $\vec{P}$ и $\vec{E}$ равен $\varepsilon_0 x$ и $\varepsilon = 1 + x$, получаем окончательную формулу для диэлектрической проницаемости, отделив действительную и мнимую части:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} + i\frac{\nu\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (6.6)$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{\dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$ – уже знакомая нам плазменная, или ленгмюровская частота.

Мнимая часть диэлектрической проницаемости пропорциональна проводимости:

$$\sigma = \frac{\nu e^2 N}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \qquad (6.7)$$

Последнее соотношение содержит важнейший фундаментальный результат – проводимость, а следовательно, и поглощение волн в диссипативных средах обратно пропорционально квадрату частоты. По этой причине, в частности, в системах радиосвязи предпочтительно использовать как можно более высокие рабочие частоты.

В металлах плазменная частота и частота столкновений очень велики по сравнению с частотами электромагнитных волн вплоть до оптического диапазона, и плазменная частота много больше частот столкновений $\omega_p >> \nu >> \omega$ так, что проводимость становится независящей от частоты волны $\sigma = e^2N/m\nu$. Показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ является мнимой величиной. Это значит, что внутрь проводника поле практически не распространяется – быстро затухает на глубине так называемого скин-слоя.

В разреженной плазме обычно частота волн существенно больше частоты столкновений электронов $\omega >> \nu$. Тогда:

$$\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{6.8}$$

Волны в плазме распространяются на частотах, превышающих плазменную. В противном случае, согласно (6.18) диэлектрическая проницаемость становится отрицательной, коэффициент преломления становится чисто мнимым, и волна быстро затухает, попав в соответствующую область пространства.

В диэлектриках, в отличие от плазмы, электроны не являются свободными. Будучи привязанными к положительным зарядам, они, тем не менее, могут осциллировать около положения равновесия. При этом для таких осцилляций существует резонансная частота ω_0. Если, подобно (6.3), учесть диссипацию энергии движения электронов ведением некоторой эффективной частоты столкновений ν, то уравнение движения примет вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2\vec{r} + e\overrightarrow{\mathrm{E}_{\text{д}}}. \tag{6.9}$$

В отличие от плазмы действующее в диэлектрике поле отличается от среднего макроскопического поля $\vec{E}$ и составляет величину $\vec{E_д} = \vec{E} + \vec{P}/3\varepsilon_0$. При гармонической зависимости величин от времени из (6.9) следует:

$$(-\omega^2 - i\omega\nu + \omega_0^2)\vec{P} = \frac{e^2 N}{m}\vec{E} + \frac{e^2 N}{3m\varepsilon_0}\vec{P}. \qquad (6.10)$$

Теперь можно определить x, а, следовательно, и диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2(\overline{\omega}_0^2 - \omega^2)}{(\overline{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} + i\frac{\omega_p^2\nu\omega}{(\overline{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}. \qquad (6.11)$$

Введено обозначение $\overline{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$.

В твердых диэлектриках для не слишком больших частот (включая оптический диапазон) $\omega^2 << \overline{\omega}_0^2$. В этом случае в (6.11) исчезает частотная зависимость:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_0^2}. \qquad (6.12)$$

При этом диэлектрическая проницаемость и показатель преломления могут существенно превышать единицу.

В газах концентрация частиц мала, а, следовательно, мала и ленгмюровская частота по сравнению с резонансной частотой. В этом случае диэлектрическая проницаемость и показатель преломления мало отличаются от единицы.

6.2. Приближение геометрической оптики

До сих пор мы неоднократно оперировали понятиями траекторий волны, лучами. Хотя эти понятия кажутся совершенно естественными, напомним, что волновая физика рассматривает и такие явления, которые не могут быть описаны на «лучевом языке». Речь идет о дифракции волн. Рассмотрение дифракции составит предмет одной из последующих глав. Сейчас же отметим, что дифракция и геометрическая оптика – суть два противоположных подхода к описанию волновых явлений.

Итак, в приближении геометрической оптики предполагается, что волна распространяется вдоль некоторой линии – луча или траектории. Метод геометрической оптики позволяет приближенно рассчитать траекторию распространения в пространстве и найти распределение вдоль луча амплитуды и фазы волны. Подчеркнем, что речь идет именно о некотором приближении, которое справедливо только в определенных условиях.

Будем исходить из волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2(\vec{r})\nabla^2 U, \tag{6.13}$$

где фазовая скорость c считается зависящей от координат. Считая, что временная зависимость в волне гармоническая, из волнового уравнения (6.13) получаем уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0. \tag{6.14}$$

Далее будем рассматривать электромагнитные волны в среде, хотя приближение геометрической оптики может быть применено к любому типу волн. Поскольку для электромагнитных волн $c = c_0/n$, и $n = \sqrt{\varepsilon}$ (c_0 теперь обозначает скорость света в вакууме), уравнение Гельмгольца можно представить в виде:

$$\nabla^2 U = -\frac{\omega^2}{c_0^2} n^2(\vec{r}) U. \qquad (6.15)$$

В однородной среде, где показатель преломления не зависит от координат, решение последнего уравнения может быть представлено в виде плоской волны:

$$U = U_0 \exp(-i\vec{k}\vec{r}), \qquad (6.16)$$

где U_0 и $k = \omega/c_0$ – постоянные величины. В неоднородной среде, по аналогии, попробуем искать решение уравнения (6.15) в виде:

$$U = U_0(\vec{r}) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\psi(\vec{r})\right). \qquad (6.17)$$

(Здесь и далее индекс 0 у скорости света писать не будем.) Итак, амплитуду будем считать функцией от координат, а в фазовом множителе вместо r записываем некоторую функцию координат ψ, называемую эйконалом. Подстановка (6.17) в уравнение Гельмгольца приведет нас к уравнению:

$$\nabla^2 U_0 - 2i\frac{\omega}{c}\nabla\psi\nabla U_0 - \frac{\omega}{c}U_0\nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}[\varepsilon - (\nabla\psi)^2]\mathrm{U}_0 = 0. \qquad (6.18)$$

Амплитуду будем считать медленно меняющейся функцией координат в том смысле, что на длине волны $\lambda = \omega/c$ величина U_0 изменяется несущественно. Значительные изменения амплитуда претерпевает на масштабе L, на котором существенно меняются и свойства самой среды распространения. В однородной среде эйконал представляет собой просто координату так, что градиент эйконала $\nabla\psi$ – постоянная величина. В приближении геометрической оптики для неоднородной среды градиент эйконала также считается слабо меняющейся функцией координат, то есть характерный масштаб изменений градиента эйконала также составляет L.

Основным условием применимости приближения геометрической оптики является условие слабой неоднородности $L >> \lambda$. Свойства среды распространения волн должны мало изменяться на длине волны. Тогда справедливы следующие оценки по порядку величины пространственных производных амплитуды и градиента эйконала:

$$\begin{aligned}
&\nabla U_0 \approx U_0 / L, \\
&\nabla^2 U_0 \approx U_0 / L^2, \\
&\nabla^2 \psi \approx \nabla \psi / L.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Умножим уравнение (6.18) на $c^2/\omega^2 = \lambda^2/4\pi^2$:

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\nabla^2 U_0 - \frac{\lambda}{2\pi}2i\nabla\psi\nabla U_0 - \frac{\lambda}{2\pi}iU_0\nabla^2\psi + [\varepsilon - (\nabla\psi)^2]U_0 = 0. \tag{6.20}$$

С учетом оценок (6.19) можно видеть, что в последнем уравнении первое слагаемое имеет второй порядок малости по величине λ/L, два следующих слагаемых – величины первого порядка малости, а последний член имеет нулевой порядок малости. Тогда первое слагаемое вообще не рассматривается, а члены первого и второго порядка по отдельности приравниваются к нулю, откуда получаем два уравнения:

$$[\varepsilon - (\nabla\psi)^2]U_0 = 0. \tag{6.21}$$

$$\nabla\psi\nabla U_0 + \frac{U_0}{2}\nabla^2\psi = 0. \tag{6.22}$$

Из (6.21) следует важнейшее соотношение приближения геометрической оптика, называемое уравнением эйконала:

$$(\nabla\psi)^2=\varepsilon. \tag{6.23}$$

Уравнение (6.22) перепишем следующим образом:

$$\frac{\nabla U_0}{U_0}=-\frac{1}{2}\frac{\nabla^2\psi}{\nabla\psi}=-\frac{1}{2}\frac{\nabla(\nabla\psi)}{\nabla\psi}. \tag{6.24}$$

Последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется, в результате чего получается решение $U_0\sqrt{\nabla\psi}=const.$ В правой части стоит произвольная постоянная интегрирования. С учетом выражения для градиента эйконала (6.23) получаем окончательное выражение для амплитуды:

$$U_0(\vec{r})=\frac{const}{\sqrt[4]{\varepsilon(\vec{r})}}. \tag{6.25}$$

В любой точке траектории амплитуда волны обратно пропорциональна корню четвертой степени из диэлектрической проницаемости или квадратному корню из показателя преломления. Константа может определяться, например, из значения амплитуды в начале траектории.

Уравнение эйконала представим в виде:

$$(\nabla\psi(\vec{r}))^2=n^2(\vec{r}). \tag{6.26}$$

В прямоугольной декартовой системе координат это уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2=n^2(x,y,z). \tag{6.27}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу уравнений Гамильтона–Якоби, имеющих общий вид:

$$H\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1},\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\ldots,q_1,q_2,\ldots\right)=0. \qquad (6.28)$$

Функция H, как известно, называется гамильтонианом и может быть произвольной функцией своих аргументов. Вектор $\vec{q}$ является вектором обобщенных координат, а вектор $\vec{p}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\vec{q}}$ – вектор обобщенного импульса.

Уравнение (6.28) решается методом характеристик – приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_i}{\partial H/\partial p_i}=-\frac{dp_i}{\partial H/\partial q_i}=\frac{d\psi}{\sum p_j\,\partial H/\partial q_j}=d\tau. \qquad (6.29)$$

Здесь τ – параметр.

В нашем случае уравнение эйконала имеет вид:

$$(\vec{p})^2-n^2(\vec{q})=0. \qquad (6.30)$$

Удобно выбрать гамильтониан в форме $H=(p^2-n^2)/2$. Теперь система (6.29) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{q}}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial\vec{q}},\\
&\frac{d\vec{p}}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}=\frac{1}{2}\frac{\partial n^2(\vec{q})}{\partial\vec{q}},\\
&\frac{d\psi}{d\tau}=\vec{p}\,\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}=\vec{p}\,\vec{p}.
\end{aligned} \qquad (6.31)$$

преобразуется в следующие уравнения:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \vec{p},$$
$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2}\nabla(n^2(\vec{q})), \qquad (6.32)$$
$$\frac{d\psi}{d\tau} = p^2.$$

Поставив начальные условия и решив последнюю систему, мы можем найти траекторию $\vec{q}(\tau)$, заданную в параметрическом виде, фазу $\psi(\tau)\omega/c$, также заданную как функцию от параметра. Наконец, по формуле (6.25) может быть найдена и амплитуда в любой точке траектории.

Применим рассмотренное приближение к так называемому линейному слою. Пусть в плоскости xOy диэлектрическая проницаемость меняется с высотой y по линейному закону так, что на уровне $y = 0$ она равна 1, а на уровне $y = L$ обращается в 0. Очевидно, аналитическое представление такого слоя дается формулой:

$$\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{y}{L}. \qquad (6.33)$$

Волна (в нашей терминологии – луч) испускается под углом φ_0 к оси Ox из начала координат, как это показано на рис. 6.1.

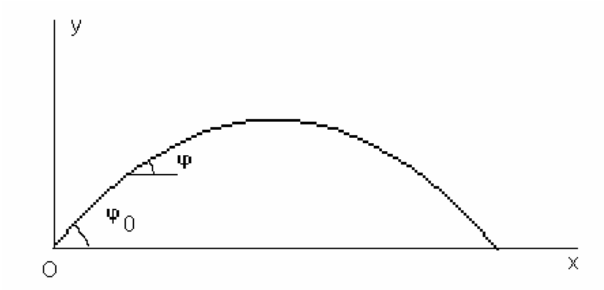


Рис. 6.1. Траектория волны в линейном слое

Система (6.32) для данной модели будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dx}{d\tau} = p_x, \tag{6.34}$$

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial x} = 0, \tag{6.35}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = p_y, \tag{6.36}$$

$$\frac{dp_y}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial y} = -\frac{1}{2L}, \tag{6.37}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = p_x^2 + p_y^2. \tag{6.38}$$

Можно показать, что величины p_x и p_y имеют смысл косинуса и синуса угла наклона касательной к траектории, соответственно. Из (6.35) следует, что величина p_x постоянна, а следовательно, равна начальному значению $p_x = \cos(\varphi_0)$. Тогда из (6.34) имеем $\partial x / \partial \tau = \cos\varphi_0$. Решение этого простейшего уравнения:

$$x = \tau\cos\varphi_0. \qquad (6.39)$$

Учтено, что в начале траектории при $\tau = 0$ координата x также равна нулю.

Решение уравнения (6.37) также весьма простое $p_y = sin(\varphi_0) - \tau/2L$. Здесь также учтено начальное условие $p_y = sin(\varphi_0)$ при $\tau = 0$. Теперь уравнение (6.36) запишется в форме $\partial y/\partial\tau = p_y = \sin(\varphi_0) - \tau/2L$. Его решением с учетом начальных условий будет функция:

$$y = \tau\sin(\varphi_0) - \frac{\tau^2}{4L}. \qquad (6.40)$$

Наконец, уравнение (6.38), которое с учетом полученных выше решений имеет вид $\partial\psi/\partial\tau = \cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0) - \sin(\varphi_0)\tau/L - \tau^2/4L^2$, дает решение:

$$\psi = \psi_0 + \tau - \frac{\sin(\varphi_0)}{2L}\tau^2 - \frac{\tau^3}{12L^2}, \qquad (6.41)$$

где ψ_0 – начальное значение эйконала. С учетом того, что, согласно (6.25), для амплитуды имеем значение $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0/\sqrt{1 - y/L}$, можно считать задачу о распространении волны в линейном слое решенной. Из (6.39) и (6.40) можно исключить параметр τ и получить траектории не в параметрическом, а в явном виде, то есть как функцию $y(x)$. Не станем выполнять эту простейшую процедуру, а укажем только, что в линейном слое траектория представляет собой параболу, как это и показано на рис. 6.1. Волна распространяется до некоторой максимальной высоты, а затем поворачивает вниз.

Рассмотрим особый случай, когда волна испускается вертикально вверх, то есть при $\varphi_0 = \pi/2$. При этом $y = \tau - \tau^2 / 4L$ и $p_y = 1 - \tau / 2L$. Волна, распространяясь вертикально, достигает максимальной высоты $y = L$, где показатель преломления обращается в ноль, отражается и распространяется вниз. В приближении геометрической оптики получается, что амплитуда поля в точке отражения обращается в бесконечность. Физически это, естественно, невозможно, но, в точке отражения и само приближение перестает работать. Как мы видели выше, условие применимости приближения заключается в малости изменения, в том числе амплитуды на длине волны. При подходе к точке отражения амплитуда в наших расчетах возрастает сколь угодно быстро. Таким образом, вблизи точки, где $n \to 0$ геометрооптическое решение перестает быть верным.

6.3. Точные решения уравнения Гельмгольца

Уже тот факт, что геометрическая оптика не позволяет найти истинное значение амплитуды поля в точке отражения, свидетельствует о необходимости поиска точных решений уравнения Гельмгольца для неоднородных сред. В ряде модельных описаний точные решения действительно существуют. К их рассмотрению мы и переходим.

Замечательным является то, что именно для линейного слоя задача расчета волнового поля решается до конца и в аналитическом виде. Рассмотрим одномерную электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении оси Oz, вдоль которой диэлектрическая проницаемость изменяется по линейному закону $\varepsilon(z) = 1 - z/z_0$, где z_0 – постоянная. Уравнение Гельмгольца при этом запишется в виде:

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)E=0. \qquad (6.41)$$

Перейдем от z к безразмерной переменной:

$$\chi=\left(\frac{\omega^2}{c^2 z_0}\right)^{1/3}(z_0-z). \qquad (6.42)$$

Относительно этой переменной уравнение (6.41) представляется в форме:

$$\frac{d^2E}{d\chi^2}+\chi E=0. \qquad (6.43)$$

Несмотря на простоту записи уравнения, его решение не представляется в элементарных функциях. Уравнение (6.43) может быть приведено к уравнению Бесселя, но существует и другая специальная функция, называемая функцией Эйри, которая является решением непосредственно уравнения (6.43). График функции Эйри показан на рис. 6.2.

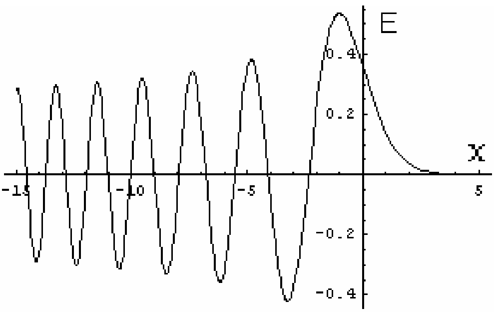


Рис. 6.2. Функция Эйри

Из представленного графика видно, что волновое поле слева от точки отражения x = 0 имеет структуру стоячей волны, образованной падающей и отраженной волнами.

При приближении к точке отражения амплитуда нарастает, но отнюдь не до бесконечности, как это следовало из приближения геометрической оптики. Эффект «разбухания поля» вблизи точки, где показатель преломления обращается в ноль, имеет место для любых волн и наблюдается экспериментально. Можно видеть также и увеличение длины волны при приближении к точке отражения. Интереснейшим моментом, следующим из точного решения, является проникновение поля в область мнимых значений показателя преломления ($x > 0$). Хотя поле здесь быстро затухает по мере проникновения, само явление имеет глубокие физические следствия. Заметим, что геометрическая оптика ничего подобного не предсказывает. Уже при отступлении всего на несколько длин волн влево точное решение практически полностью будет совпадать с геометрооптическим. Из этого следует, что в большинстве случаев распространения волн в слабо неоднородной среде можно пользоваться представленным выше приближенным описанием. Только вблизи точки отражения возникает необходимость применять модель линейного слоя и точное решение.

Еще одна модель пространственного распределения диэлектрической проницаемости, допускающая точное решение уравнения Гельмгольца, называется слоем Эпштейна. Решение представляется гипергеометрическими функциями. Формальное его написание весьма громоздко и мало что дает для физического понимания картины. В этой связи мы остановимся только на некоторых конечных результатах.

Сама модель Эпштейна задается следующей формулой для диэлектрической проницаемости, как функции координаты z:

$$\varepsilon(z) = 1 - \mathrm{P}\frac{\mathrm{e}^{\gamma z}}{1+e^{\gamma z}} - M\,\frac{4e^{\gamma z}}{(1+e^{\gamma z})^2}. \tag{6.44}$$

Здесь P, M и γ – постоянные величины. Представляет интерес рассмотреть два частных случая слоя Эпштейна.

Первый случай получил название симметричного слоя, в котором $P = 0$, а M и γ – положительные величины. При этом поведение функции $\varepsilon(z)$ при различных значениях M и при $\gamma = 1$ показано на рис. 6.3.

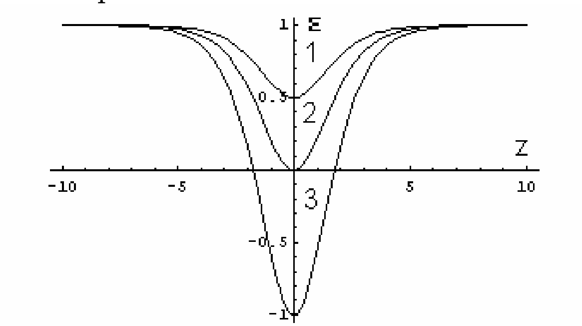


Рис. 6.3. Симметричный слой Эпштейна

Кривая 1 соответствует значению $M = 0{,}5$. Диэлектрическая проницаемость всюду положительна и точки отражения нет. Кривая 3 иллюстрирует вариант с $M = 2$. Можно видеть, что имеется область, где $\varepsilon < 0$ и показатель преломления мнимый – область, недоступная для волны с точки зрения геометрической оптики. При подходе к точкам отражения (слева или справа) волны должны отражаться. Кривая 2 соответствует особому случаю. При $M = 1$ функция только в одной точке обращается в ноль. Отметим также, что параметр γ определяет ширину слоя.

Для дальнейшего исследования удобно ввести безразмерную величину $S = {}^{2\omega}\!/_{c\gamma}$ – безразмерную толщину слоя. Если ввести так называемую критическую частоту $f_{кр}$ из соотношения $M = {}^{f_{кр}^2}\!/_{f^2}$ (f – частота волны), то можно видеть, что волны на частоте $f > f_{кр}$ не встречают точек отражения – проходят через слой. Однако, как мы вскоре увидим, в отличие от геометрической оптики волны частично отражаются. При $f < f_{кр}$ имеется точка отражения. Здесь, в отличие от геометрооптического решения, коэффициент отражения не равен единице – волны частично проходят через слой.

С использованием обозначения $d = \sqrt{4S^2M - 1}\big/2$ можно представить коэффициент отражения от слоя следующим образом:

$$R = \frac{ch(\pi d)}{\sqrt{\mathrm{ch}(\pi(\mathrm{d}+\mathrm{S}))\mathrm{ch}(\pi(\mathrm{d}-\mathrm{S}))}}. \qquad (6.45)$$

На рис. 6.4 представлена зависимость коэффициента отражения от M – фактически от частоты волны и от S – фактически от толщины слоя.

Можно видеть, что коэффициент никогда точно не равен 1. Это означает, что часть энергии волны, пусть даже ничтожно малая, всегда «просачивается» через слой в область $\varepsilon > 0$, где волна снова может распространяться. Ситуация здесь аналогична известному квантово-механическому эффекту прохождения частиц через потенциальный барьер – туннельному эффекту.

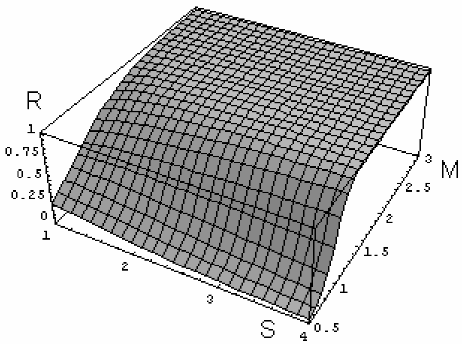


Рис. 6.4. Коэффициент отражения для симметричного слоя

С другой стороны, коэффициент отражения нигде не обращается точно в 0. Это означает, что любая, самая малая неоднородность среды обеспечивает пусть ничтожно малое, но имеющее место частичное отражение волны.

Еще раз подчеркнем, что обсуждаемые эффекты удалось выявить только благодаря точному решению уравнения Гельмгольца, в то время как в приближении геометрической оптики такие нюансы отсутствуют. Отметим также, что аналогия с квантовой теорией здесь имеет глубокий физический смысл. Действительно, в микромире частицы являются объектами корпускулярно-волнового дуализма, а раз они обладают свойствами волн, то и ведут себя в определенных ситуациях как волны.

Второй пример применения модели слоя Эпштейна – это так называемый переходной слой. Для него коэффициент M в (6.44) равен нулю, а величина P положительна. На рис. 6.5 представлены графики функций $\varepsilon(z)$ для переходного слоя при значениях параметра P, равных 0,5, 1 и 2 – кривые 1, 2 и 3, соответственно.

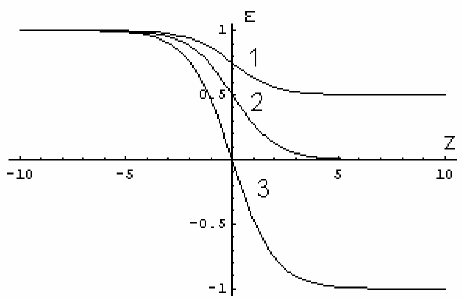


Рис. 6.5. Диэлектрическая проницаемость для переходного слоя

Если $P < 1$, то проницаемость нигде не обращается в ноль – точки отражения нет. При P большем единицы имеется точка отражения. (В случае $P = 1$ точка отражения находится на бесконечности.) «Крутизна» переходного слоя определяется параметром γ, и в представленном на рисунке варианте $\gamma = 1$.

Исследование гипергеометрического решения для переходного слоя показывает, что при P большем или равным единице коэффициент отражения равен 1. В отличие от симметричного слоя, если имеется точка отражения, то волна отражается от нее полностью. Это и понятно. Ведь в данном случае за точкой отражения уже нигде нет области, в которой волна могла бы распространяться.

При $P < 1$ выражение для коэффициента отражения имеет вид:

$$R = \frac{sh\left(\frac{\pi}{2}S(1-\sqrt{1-P})\right)}{sh\left(\frac{\pi}{2}S(1+\sqrt{1-P})\right)}. \qquad (6.46)$$

Поведение коэффициента отражения в зависимости от значений S и P показано на рис. 6.6.

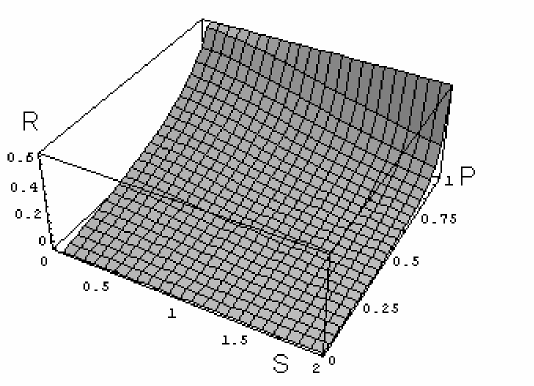


Рис. 6.6. Коэффициент отражения от переходного слоя

Несмотря на то, что при $P < 1$ имеются условия прохождения волны в любую точку, коэффициент отражения нигде не равен в точности нулю. Это еще раз показывает, что любая неоднородность среды приводит к частичному отражению.

При стремлении z к бесконечности, то есть достаточно глубоко в переходном слое, для диэлектрической проницаемости справедливо представление $\varepsilon = 1 - P$. А далеко слева от слоя $\varepsilon = 1$. Если перейти к пределу бесконечно тонкого слоя $S \to 0$, то слой превращается в «ступеньку» – имеет место граница раздела двух сред. Асимптотика формулы (6.46) при $S = 0$ дает:

$$R = \frac{1-\sqrt{1-P}}{1+\sqrt{1-P}} = \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon} - 1}{1/\sqrt{\varepsilon} + 1}. \qquad (6.47)$$

Вспомним, что $1/\sqrt{\varepsilon}$ представляет собой импеданс справа от границы, а 1 – импеданс слева (без учета константы ε_0). Тогда $R = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$, что полностью соответствует полученным ранее формулам Френеля.

6.4. Волны в периодических структурах

Специфическим видом неоднородности среды является неоднородность, периодическая в пространстве. В такой среде какая-либо ее характеристика, существенная для распространения волн, меняется периодически в зависимости от координаты.

Начнем рассмотрение с проводящей линии, составленной из последовательно соединенных LC – ячеек, изображенной на рис. 6.7. Геометрическую длину ячейки обозначим через a. Эта длина и является пространственным периодом.

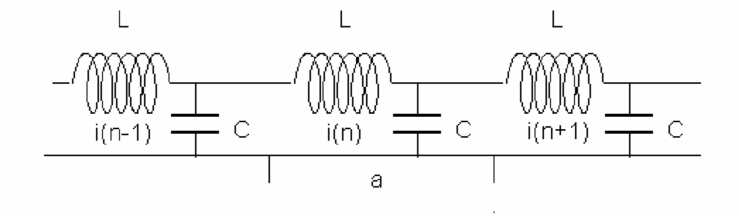


Рис. 6.7. Проводящая линия из LC-ячеек

Ток в индуктивности в n-й ячейке подчиняется уравнению:

$$L\frac{di(n)}{dt} = V(n) - V(n-1) = \frac{Q(n)}{C} - \frac{Q(n-1)}{C}, \qquad (6.48)$$

где V и Q – напряжение и заряд на соответствующей емкости. С другой стороны, изменение тока на длине ячейки, обусловленное током через емкость, определяется как:

$$i(n) - i(n-1) = \frac{dQ(n)}{dt}. \qquad (6.49)$$

Продифференцировав (6.48) по времени и использовав (6.49), нетрудно получить уравнение:

$$L\frac{d^2 i(n)}{dt^2} = -\frac{1}{C}[2\mathrm{i(n)} - \mathrm{i(n+1)} - \mathrm{i(n-1)}]. \qquad (6.50)$$

Величина $a{\cdot}n$ является дискретной координатой, определяющей положение ячейки.

Попробуем искать решение последнего уравнения в виде:

$$i(t, an) = A\exp[i(\omega t - kan)]. \qquad (6.51)$$

(В показателе экспоненты i – мнимая единица, а не ток.) Подстановка (6.51) в уравнение приводит к дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 L = -\frac{1}{C}(2 - e^{-ika} - e^{ika}). \qquad (6.52)$$

После очевидных преобразований закон дисперсии можно записать в виде:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right). \qquad (6.53)$$

Если перейти к длинноволновому пределу $ka \to 0$, то получится известное нам дисперсионное уравнение для проводящей линии $\omega = ka/\sqrt{LC} = k\sqrt{\frac{a}{L}\frac{a}{C}}$. В дискретной цепочке с размером ячейки, сравнимым с длиной волны, проявляется совершенно новое качество. Поскольку значение функции синуса по модулю не превышает единицы, появляется ограничение на частоту волн, распространяющихся в линии:

$$\omega \le \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{6.54}$$

Рассматриваемая система является фильтром высоких частот.

Рассмотрим среду, в которой показатель преломления – периодическая функция координат. В одномерном случае будем считать, что показатель преломления имеет малую периодическую добавку к единице так, что:

$$n^2 = 1 + \mu\cos(2Kx). \tag{6.55}$$

Здесь $\Lambda = \pi/K$ – пространственный период неоднородностей, $\mu << 1$ – относительная интенсивность неоднородностей.

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1+\mu\cos(2Kx)}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{6.56}$$

при гармонической зависимости от времени дает уравнение Гельмгольца:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2[1+\mu\cos(2Kx)]A, \tag{6.57}$$

где $k = \omega/c$.

Поскольку поправка к показателю преломления мала, будем считать, что решение, частота и волновое число имеют малые линейные поправки к соответствующим величинам, которые имели бы место в отсутствии возмущений n.

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \mu A_1, \\ \omega &= \omega_0 + \mu\omega_1, \\ k &= k_0 + \mu k_1. \end{aligned} \tag{6.58}$$

В отсутствии возмущений имеем уравнение:

$$\frac{d^2A_0}{dx^2}+k_0^2A_0=0. \tag{6.59}$$

Его решение запишем в виде:

$$A_0=B_1\exp(ik_0x)+B_2\exp(-ik_0x). \tag{6.60}$$

После вычитания из полного уравнения части, соответствующей отсутствию возмущений (6.59), мы получим уравнение на слагаемые первого порядка малости по μ:

$$\frac{d^2A_1}{dx^2}+k_0^2A_1=-k_0A_0[2k_1+k_0\cos(2\mathrm{Kx})]. \tag{6.61}$$

В правую часть последнего выражения следует подставить соотношение (6.60) для A_0. Полученное в результате дифференциальное уравнение имеет общее решение, представляемое в элементарных функциях, однако решение это настолько громоздко, что приводить его здесь не целесообразно. Приведем только некоторые важнейшие моменты, следующие из структуры решения.

В случае, когда $k_0 \neq K$ в решении будет присутствовать слагаемое, пропорциональное k_1x, которое неограниченно возрастает при возрастании x. Поскольку такая картина физически невозможна, следует вывод, что при $k_0 \neq K$ необходимо полагать k_1 равным нулю. Иными словами, в рассматриваемой ситуации основная волна практически не чувствует малые периодические возмущения в среде.

Если $k_0 = K$, то в решении присутствуют слагаемые, пропорциональные $x(2k_1B_1+\frac{k_0}{2}B_2)$ и $x(2k_1B_2+\frac{k_0}{2}B_1)$. Для того чтобы здесь не было неограниченного роста решения при увеличении x, необходимо потребовать равенства нулю выражений в круглых скобках. Нетрудно убедиться, что это будет выполнено при $k_1 = \pm k_0 / 4$. Итак, при $k_0 = K$ в системе порождаются индуцированные волны с частотами, слегка отличающимися от частоты исходной волны. Можно показать, что при объединении случаев $k_0 \neq K$ и $k_0 = K$ в общее рассмотрение, обнаруживается особенность (разрыв) дисперсионной кривой вблизи значения $k_0 = K$. Иными словами, если пространственный период неоднородностей равен половине длины исходной волны, то волна попадает в запрещенную частотную зону. Это означает, что падающая волна эффективно трансформируется в отраженную периодическими неоднородностями волну, распространяющуюся в противоположном направлении. Такое явление называется обратным брэгговским рассеянием. Отметим, что при малых возмущениях рассеяние происходит практически без изменения частоты и модуля волнового числа, но с изменением направления на обратное. Интересно отметить, что, поскольку любое поле возмущений показателя преломления можно представить разложением по пространственным гармоникам, волна «найдет» в таком поле нужную гармонику и будет в той или иной степени испытывать обратное рассеяние.

Обобщением брэгговского рассеяния является так называемое трехволновое взаимодействие. Если в среде имеются возмущения показателя преломления волновой природы (в случае рассеяния Брэгга это просто фиксированная во времени пространственная периодичность), и в этой среде распространяется исходная волна, то она испытывает рассеяние, частично трансформируясь в рассеянную волну. Изучение энергетики рассеяния, то есть определение коэффициентов трансформации падающей волны в рассеянную – весьма сложная задача. Что же касается «кинематики» рассеяния, то здесь ситуация достаточно проста. Если $\vec{k}_0$, $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ – волновые векторы падающей волны, волны, на которой происходит рассеяние и рассеянной волны, а ω_0, ω_1 и ω_2 – соответствующие частоты, то для них должны выполняться так называемые условия пространственно-временного синхронизма:

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_0 + \vec{k}_1,$$
$$\omega_2 = \omega_0 + \omega_1. \tag{6.62}$$

Итак, волновой вектор рассеянной волны есть векторная сумма волновых векторов падающей и рассеивающей волн, а частота рассеянной волны есть алгебраическая сумма соответствующих частот. Следует особо отметить, что рассеяние будет возможно, если рассеянная волна с указанным волновым вектором и частотой вообще может существовать, то есть, если волновой вектор и частота удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$\omega_2 = \omega_2(\vec{k}_2).$$

Возвращаясь от общих соотношений (6.62) к варианту брэгговского рассеяния, мы должны положить ω_0 равной нулю – рассеивающие неоднородности не изменяются во времени. При обратном рассеянии $\vec{k}_2 = -\vec{k}_0$, откуда следует, что $k_1 = 2k_0$ – пространственный период рассеивающих неоднородностей должен быть вдвое меньше длины падающей волны, как мы и получили выше.

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Анизотропной называется среда, свойства которой зависят от выбранного направления. Такое определение выглядит весьма общим: что означает выбранное направление, кем или чем выбранное, о каких свойствах идет речь? Однако эта общность в то же время и универсальна. Применительно к волнам в качестве выбранного направления может рассматриваться направление распространения, а свойством, зависящим от направления, может быть, например, фазовая скорость волны. На самом деле все здесь гораздо более разнообразно. Некоторые аспекты этого разнообразия мы и рассмотрим в данной главе.

7.1. Тензор диэлектрической проницаемости

До сих пор мы рассматривали такие среды, в которых отклик на наложение внешних электрических или магнитных полей совпадал по направлению с полями-источниками. Формально это сводилось к тому, что в материальных уравнениях $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ диэлектрическая и магнитная проницаемости представляли собой скалярные величины. Однако это далеко не всегда так.

Причины, по которым индуцированные поля могут не быть параллельными наложенным, разнообразны. Так, например, в кристаллах имеются преимущественные направления, вдоль которых могут смещаться заряды, и если электрическое поле наложено не в этих направлениях, то результирующее поле не параллельно исходному. В среде со сторонним магнитным полем в поперечной к нему плоскости заряды испытывают силу Лоренца, перпендикулярную полю и скорости частиц – смещение вообще перпендикулярно воздействию.

Таким образом, в общем случае, например, материальное уравнение для электрических компонентов должно быть записано символическим образом как $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\,\varepsilon_0\vec{E}$, где ^ обозначает тензор. Более корректно представить его в матричной форме:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j. \tag{7.1}$$

В дальнейшем мы будем использовать и ту, и другую запись. Аналогичные соотношения можно привести и для магнитных компонентов.

Если в уравнениях Максвелла принять гармоническую зависимость полей от времени *exp(iωt)*, то из первой пары этих уравнений можно получить знакомое нам соотношение:

$$rotrot\vec{E} = \frac{\omega^2}{\tilde{n}^2}\hat{\varepsilon}\vec{E}. \tag{7.2}$$

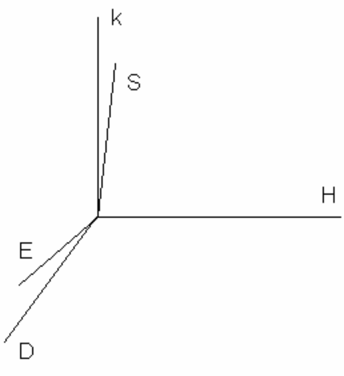
Рассматривая плоскую волну вида $\exp(i\vec{k}\vec{r})$, из последнего уравнения получим:

$$[\vec{k}[\vec{k}\vec{E}]] = -\frac{\omega^2}{\tilde{n}^2}\hat{\varepsilon}\vec{E}. \tag{7.3}$$

Вторая пара уравнений Максвелла для немагнитной среды (μ = 1) $div\vec{D} = 0$ и $div\vec{B} = 0$ для волн приводится к форме:

$$\begin{aligned} &\vec{k}\vec{D} = 0, \\ &\vec{k}\vec{B} = 0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Из этого следует, что векторы $\vec{k}$, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ составляют ортогональную тройку. В отличие от изотропной среды вектор $\vec{\mathrm{E}}$ уже не перпендикулярен волновому вектору (хотя $\vec{H} \perp \vec{k}$). Вектор плотности потока энергии $\vec{S}$, который,



как мы знаем, пропорцио-пропорционален $[\vec{E}\vec{H}]$, перестал быть параллельным волновому вектору. Этот важнейший момент можно описать несколько более физично – в анизотропной среде направление распространения волны не совпадает с направлением распространения энергии. Звучит несколько парадоксально, но, стоит напомнить, что направление распространения волны – это направление фазовой скорости, однако энергия в волне переносится вовсе не с фазовой, а с групповой скоростью. Геометрия векторов в волне представлена на рис. 7.1.

Рис. 7.1. Взаимное расположение векторов электромагнитной волны в анизотропной среде

Вернемся к уравнению (7.3). В матричном виде (по компонентам) это уравнение можно представить так:

$$(n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij})E_j = 0. \tag{7.5}$$

Здесь $n_i = k_i \omega / c$, $n^2 = \sum n_i^2$ – показатель преломления, δ_{ij} – символ Кронекера. В этом выражении подразумевается суммирование по индексу j. По сути дела, (7.5) представляет собой три уравнения для i = 1, 2, 3 для трех неизвестных E_j. Имеем систему линейных однородных алгебраических уравнений. Как известно, нетривиальное решение такой системы может существовать только при равенстве нулю определителя этой системы:

$$\det(n^2\delta_{ij} - n_i n_j \varepsilon_{ij}) = 0. \tag{7.6}$$

Последнее соотношение дает связь между ω и k, следовательно, является обобщением дисперсионного уравнения для анизотропной среды. Далее мы рассмотрим один из наиболее интересных примеров анизотропии.

7.2. Магнитоактивная плазма как анизотропная среда

Магнитоактивной называют плазму, на которую наложено внешнее постоянное магнитное поле. Типичной средой такого типа является околоземное космическое пространство. Верхние слои атмосферы (ионосфера) и ближний космос (магнитосфера) представляют собой среду с существенной концентрацией заряженных частиц – электронов и ионов, то есть плазму. Поскольку Земля обладает собственным магнитным полем, ионосферная и магнитосферная плазма оказываются замагниченными, или магнитоактивными. Аналогичная ситуация имеет место для некоторых других планет (например, Юпитера) и, в наиболее яркой степени – в солнечной короне.

Обозначим внешнее магнитное поле через $\overrightarrow{B_0}$. Со стороны этого поля на заряд q действует сила Лоренца:

$$\vec{\mathrm{F}} = q[\vec{v}\overrightarrow{B_0}], \qquad (7.7)$$

где $\vec{v}$ – скорость заряда. Из характера векторного уравнения (7.7) следует, что сила действует перпендикулярно внешнему полю и перпендикулярно скорости. Аналогичная ситуация имеет место для центростремительной силы, например, в поле тяготения. Сила стремится постоянно «закрутить» частицу поперек ее движения. В результате заряженная частица вращается по окружности, плоскость которой перпендикулярна внешнему полю. Геометрию движения заряда в магнитном поле иллюстрирует рис. 7.2.

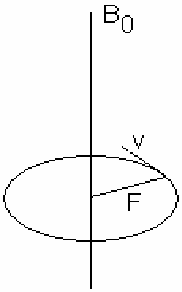


Рис. 7.2. Действие силы Лоренца на заряд в магнитном поле

Направление вращения зависит от знака заряда – электроны и ионы вращаются в противоположных направлениях. Циклическая частота вращения, называемая гирочастотой, задается выражением:

$$\omega_H = \frac{qB_0}{m}, \qquad (7.8)$$

где m – масса заряженной частицы.

Для расчета диэлектрической проницаемости поступим аналогично тому, как мы действовали в разделе 6.1. Мы видели, что поляризация связана со скоростью электронов соотношением $-i\omega\vec{P} = -eN\vec{v}$. При этом $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\left(\vec{E} - i\dfrac{Ne}{\varepsilon_0\omega}\vec{v}\right)$. Введем обозначения $u = {\omega_p^2}/{\omega^2}$, $\vec{V} = i\,{m\omega}/{e}\,\vec{v}$, где ω_p – плазменная частота. Последнее соотношение представится в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\vec{E} - u\vec{V}). \qquad (7.9)$$

Уравнение движения электрона в электрическом и магнитном поле будет следующим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e[\vec{v}\vec{B_0}]. \qquad (7.10)$$

С учетом гармонической зависимости величин от времени и с учетом введенных обозначений последнее выражение представим формулой:

$$\vec{V} = \vec{E} - i[\vec{V}\vec{W}]. \tag{7.11}$$

Введено еще одно новое обозначение $\vec{W} = \frac{\vec{B_0}}{B_0}\frac{\omega_H}{\omega}$.

В системе координат с осью Oz, направленной вдоль внешнего магнитного поля вектор $\vec{W}$ имеет компоненты $(0,\ 0,\ \omega_H/\omega)$. Векторное уравнение (7.11), расписанное по компонентам, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} V_x &= E_x - i\mathrm{W}\mathrm{V}_\mathrm{y}, \\ V_y &= E_y + iWV_x, \\ V_z &= E_z. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Последняя система путем несложных, но довольно громоздких преобразований может быть разрешена относительно компонентов V, то есть компоненты V будут представлены линейными комбинациями компонентов электрического поля. Результат подставляется в (7.9), и, с учетом основного определения материального уравнения $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j$ можно получить вид тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{u}{1-W^2} & i\dfrac{uW}{1-W^2} & 0 \\ -i\dfrac{u\mathrm{W}}{1\text{-}\mathrm{W}^2} & 1 - \dfrac{u}{1-W^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-u \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Можно перейти от введенных обозначений к частотам:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\chi = i\frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \tag{7.14}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Если бы в уравнении движения мы учли столкновения электронов с другими частицами, то в тензоре диэлектрической проницаемости появились бы поправки, которые можно учесть единообразно, сделав в формулах (7.14) замену ω на $\omega + i\nu$, где ν – частота столкновений.

Итак, мы получили явный вид тензора диэлектрической проницаемости замагниченной плазмы в системе координат с вертикальной осью, направленной вдоль внешнего магнитного поля. Полезно отметить, что выполняется предельный переход к случаю отсутствия замагниченности. В случае $B_0 = 0$ гирочастота ω_H также равна нулю. При этом в тензоре остаются только диагональные элементы, равные $1 - \omega_p^2 / \omega^2$. Таким образом, мы пришли к известному нам виду диэлектрической проницаемости изотропной плазмы.

7.3. Распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

Декартову систему координат с осью Oz, параллельной внешнему магнитному полю, повернем таким образом, чтобы волновой вектор $\vec{k}$ волны лежал в плоскости *zOy*. Угол между волновым вектором и осью *Oz* обозначим через θ. Тогда $k_x = 0$, $k_y = k\sin(\theta)$, $k_z = k\cos(\theta)$. Используя обозначения (7.14), уравнение (7.5) можно расписать по проекциям в виде системы:

$$\begin{aligned}
&(n^2-\varepsilon_\perp)E_x - i\chi E_y = 0,\\
&i\chi E_x + (n^2\cos^2\theta-\varepsilon_\perp)E_y - n^2\sin\theta\cos\theta E_z = 0,\\
&-n^2\sin\theta\cos\theta E_y + (n^2\sin^2\theta-\varepsilon_\parallel)E_z = 0.
\end{aligned} \quad (7.15)$$

Как мы уже указывали, равенство нулю определителя системы дает дисперсионное уравнение, которое удается привести к виду биквадратного уравнения относительно показателя преломления *n*. Его решение можно представить в форме:

$$n^2 = 1 - \frac{2(a-b+c)}{2a-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}. \quad (7.16)$$

Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&a = \varepsilon_\perp\sin^2\theta + \varepsilon_\parallel\cos^2\theta,\\
&b = (\varepsilon_\perp^2-\chi^2)\sin^2\theta + \varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel(1+\cos^2\theta),\\
&c = \varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp^2-\chi^2).
\end{aligned} \quad (7.17)$$

Соотношение (7.16) принято записывать с использованием введенных ранее величин *u* и *W*:

$$n^2 = 1 - \frac{2u(1-u)}{2(1-u) - W^2\sin^2\theta \pm \sqrt{W^4\sin^4\theta + 4W^2(1-u)^2\sin^2\theta}}. \quad (7.18)$$

Таким образом, в магнитоактивной плазме на заданной частоте ω существуют две волны, отличающиеся показателями преломления. В формуле (7.18) волны соответствуют знакам «+» и «–». Различие показателей преломления ведет к различию фазовых и групповых скоростей волн. Подчеркнем, что появление двух решений связано именно с наличием выделенного направления (направления внешнего магнитного поля), то есть обусловлено анизотропией среды. Волна, для которой в показателе преломления в формуле (7.18) используется знак «+», называется обыкновенной, а вторая волна – необыкновенной. Пара таких волн в анизотропной среде называется парой нормальных волн.

Наибольший интерес представляет рассмотрение поляризации обыкновенной и необыкновенной волны. Для изучения поляризации следует перейти в иную систему координат, а именно, в систему с осью Oz, параллельной волновому вектору $\vec{k}$. Вектор $\overrightarrow{B_0}$ разместим в плоскости yOz так, чтобы он составлял угол θ с волновым вектором. В этой системе вектор $\vec{n}$ имеет только z-составляющую. Тогда из общего уравнения (7.5) можно получить:

$$\begin{aligned}
&(n^2 - \varepsilon_{xx})E_x - \varepsilon_{xy}E_y - \varepsilon_{xz}E_z = 0,\\
&-\varepsilon_{yx}E_x + (n^2 - \varepsilon_{yy})E_y - \varepsilon_{yz}E_z = 0,\\
&\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z = 0.
\end{aligned} \qquad (7.19)$$

Величину n^2 следует рассматривать как известную – формула (7.18). Тогда в последней системе независимыми будут только два уравнения. Исключив из нее E_z можно получить связь между E_x и E_y:

$$\left(n^2 - \varepsilon_{xx} + \frac{|\varepsilon_{xz}|^2}{\varepsilon_{xz}}\right)E_x = \left(\varepsilon_{xy} - \frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}\right)E_y. \qquad (7.20)$$

Здесь тензор ε_{ij} определен нами для другой системы координат. Преобразование тензора в новую систему весьма громоздко. Приведем сразу конечный результат, полученный после этого преобразования из (7.20) для множителя поляризации:

$$\Re_{1,2}=\frac{E_x}{E_y}=-i\frac{2W(1-u)\cos\theta}{W^2\sin^2\theta\mp\sqrt{W^4\sin^4\theta+4W^2(1-u)^2\cos^2\theta}}. \quad (7.21)$$

Поскольку множитель поляризации чисто мнимый, сдвиг по фазе между компонентами составляет $\pi/2$ или $-\pi/2$. Для обыкновенной и необыкновенной волны эти знаки противоположны. При этом модуль множителя поляризации в общем случае отличен от 1. Из всего этого следует, что обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы по эллипсу с противоположными направлениями вращения вектора электрического поля.

При строго продольном распространении волн, когда $\theta = 0$, отношение компонентов в (7.21) равно $+i$ или $-i$, следовательно, и та и другая волна поляризованы по кругу. В противоположном пределе строго поперечного распространения множитель поляризации равен нулю – равна нулю x – проекция поля. В этом случае волны линейно поляризованы. В промежуточных направлениях распространения имеет место эллиптическая поляризация обыкновенной и необыкновенной волны.

В силу различия показателей преломления нормальных волн, а следовательно, и различия их фазовых скоростей, при прохождении волнами одинакового отрезка пути углы поворота вектора электрического поля в волнах не только противоположны по знаку, но и различны по абсолютной величине. В этих условиях суммарный вектор поля двух волн также испытывает вращение. Это явление названо эффектом Фарадея, или эффектом вращения плоскости поляризации в замагниченной плазме. Можно показать, что при распространении изначально линейно поляризованной волны на расстояние l ее плоскость поляризации поворачивается на угол:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c} luW \cos\theta. \tag{7.22}$$

Вращение плоскости поляризации свойственно распространению волн и в других анизотропных средах. Так, в некоторых кристаллах наблюдается аналогичный эффект для световых волн, получивший название двойного лучепреломления.

8. ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ

Хорошо известно, что если элементы какой-либо радиотехнической или просто электротехнической конструкции становятся соизмеримы с длиной радиоволны, соответствующей рабочей частоте, то такие элементы начинают эффективно излучать в пространство электромагнитные волны. В определенных случаях именно это и требуется от системы, как, например в антеннах. В других ситуациях потери на излучение, напротив, нежелательны. Действительно, при переходе к сверхвысоким частотам, соответствующим длинам волн порядка дециметров–сантиметров, обычные проводники в конструкциях наряду со своей основной задачей – передачей токов – достаточно заметно теряют энергию на излучение. Колебательный контур, состоящий из емкости и катушки индуктивности с размерами порядка сантиметров, становится низко добротным снова в силу потерь на излучение. В этой связи в радиотехнике и электронике СВЧ используются специальные конструкции для передачи и концентрации электромагнитной энергии внутри замкнутых объемов. Такие конструкции называются волноводами и объемными резонаторами. К их рассмотрению мы переходим далее.

8.1. Прямоугольный волновод – простейший случай

Простейший прямоугольный волновод представляет собой конструкцию, представленную на рис. 8.1. Поперечное сечение волновода является прямоугольником с высотой a и шириной b, ориентированными по осям Ox и Oy прямоугольной декартовой системы координат. Вертикальные и горизонтальные стенки волновода ориентированы по оси Oz и выполнены из идеально проводящего металла. Внутри волновода находится вакуум (или воздух) так, что диэлектрическая и магнитная проницаемости равны 1.

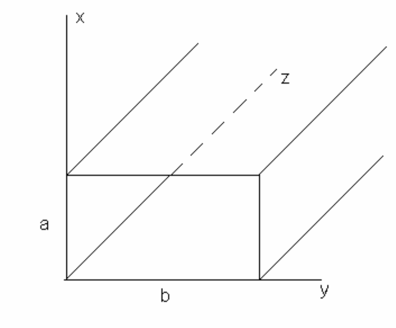


Рис. 8.1. Простейший прямоугольный волновод

В декартовой системе координат волновое уравнение для любой из проекций электрического поля записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right). \quad (8.1)$$

В нашем простейшем случае будем считать, что распространение волны происходит вдоль оси Oz, и имеется единственная проекция электрического поля $E = E_x(z, y)$. Имея в виду гармоническую зависимость всех величин от времени, из (8.1) получим следующее уравнение Гельмгольца:

$$-\omega^2 E = \tilde{n}^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right). \qquad (8.2)$$

Ищем решение в виде одномерной волны, распространяющейся в продольном направлении с амплитудой, распределенной в зависимости от y в поперечной плоскости:

$$E = A sin(k_y y) cos(k_z z - \omega t). \qquad (8.3)$$

Подстановка последней формулы в (8.2) приводит к дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + k_y^2). \qquad (8.4)$$

На идеально проводящих стенках волновода не должно быть тангенциальной составляющей электрического поля. Это фундаментальное граничное условие в электродинамике имеет простое физическое толкование. Наличие поля в идеальном проводнике мгновенно привело бы к перераспределению электронов, порождающему внутреннее поле, полностью компенсирующего внешнее.

Тогда нам необходимо потребовать выполнения двух следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} &E(y = 0) = 0, \\ &E(y = b) = 0. \end{aligned} \qquad (8.5)$$

Поскольку в (8.3) зависимость от y задана в виде $sin(k_y y)$, первое из приведенных условий выполняется автоматически. Для выполнения второго условия необходимо, чтобы аргумент функции синуса был равен целому числу π, то есть $k_y b = m\pi$, где m = 1, 2, … . Значение m = 0 недопустимо, поскольку при этом поле в волноводе вообще отсутствовало бы.

Таким образом, спектр допустимых поперечных волновых чисел дискретен, и имеется минимальное возможное значение $k_{y\,min} = \pi/b$. В соответствии с дисперсионным уравнением (8.4) получим формулу для частоты волн в волноводе:

$$\omega^2 = \tilde{n}^2\left(k_z^2 + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right). \qquad (8.6)$$

Очевидно, имеется минимальная частота $\omega_{min} = \pi c/b$. Волновод является фильтром, не пропускающим волны с частотами ниже граничной.

Из вида дисперсионного соотношения с очевидностью следует, что волновод является средой с дисперсией – фазовая и групповые скорости отличны от скорости света в вакууме и зависят от частоты волн.

Для выяснения физических причин отличия скоростей от скорости света представим решение (8.3) в виде:

$$A\sin(k_y y)\cos(k_z z - \omega t) = \frac{A}{2}[\sin(\vec{k_1}\vec{r} - \omega t) + \sin(\vec{k_2}\vec{r} - \omega t),] \quad (8.7)$$

где $\vec{k_1} = k_z\vec{e_z} + k_y\vec{e_y}$, $\vec{k_2} = k_z\vec{e_z} - k_y\vec{e_y}$, векторы $\vec{e}$ – единичные векторы по соответствующим осям.

Суммарное волновое поле мы представили в виде суперпозиции двух бегущих волн, распространяющихся под углами к направлению оси Oz с волновыми векторами, равными по модулю, но различающимися по направлению. Геометрия распространения показана на рис. 8.2, где изображена проекция плоскости zOy волновода.

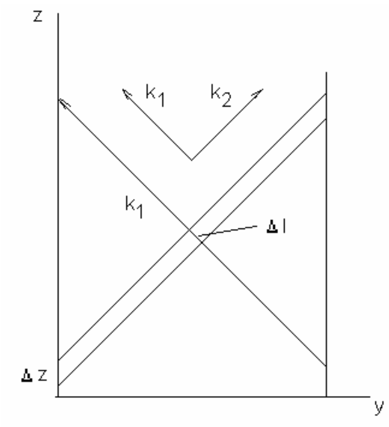


Рис. 8.2. Распространение волн в простейшем волноводе

Рассмотрим одну из волн – с индексом 1. За время Δt волна пройдет путь $\Delta l = c\Delta t$ вдоль направления вектора $\vec{k}_1$. В направлении оси Oz этот путь отобразится на отрезок $\Delta z = \Delta l/\cos\theta = c\Delta t/\cos\theta$, где $tg\theta = k_y/k_z$. Скорость вдоль оси Oz является фазовой скоростью волны в волноводе:

$$v_\phi = \frac{c}{\cos\theta} = c\sqrt{\frac{k_z^2 + k_y^2}{k_z^2}}. \qquad (8.8)$$

Таким образом, скорость волн в волноводе отлична от скорости света в вакууме в силу того, что волны распространяются наклонно к оси волновода, последовательно отражаясь от стенок. Подчеркнем, что именно наличие пары волн, распространяющихся под углом к оси, предоставляет возможность удовлетворить краевым условиям отсутствия тангенциальной составляющей поля на стенках.

8.2. Вектор Герца

При решении задач о распространении волн в волноводах мы должны были бы заниматься решением волновых уравнений (или уравнений Гельмгольца) для всех компонентов электрических и магнитных полей. Однако с учетом наличия выделенного направления – оси волновода, задача может быть существенно упрощена. Упрощение связано с возможностью введения в рассмотрение так называемого вектора Герца, который в наших задачах будет иметь единственную проекцию *z*, и через который могут быть выражены все компоненты полей. В электродинамике аналогичный подход базируется на введении так называемого векторного потенциала.

Было показано, что вектор Герца с необходимыми нам свойствами может существовать в двух модификациях. Это – так называемый электрический вектор Герца $\overrightarrow{\Pi}^{e}$ и магнитный вектор Герца $\overrightarrow{\Pi}^{m}$.

Если связать электрическое и магнитное поле с вектором Герца следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k_0^2 \overrightarrow{\Pi}^{e} + graddiv\overrightarrow{\Pi}^{e}, \\ \vec{H} &= -ik_0 rot\overrightarrow{\Pi}^{e}, \end{aligned} \tag{8.9}$$

где $k_0 = \omega/c$, то необходимым и достаточным условием для выполнения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= -ik_0\vec{E}, \\ rot\vec{E} &= ik_0\vec{H}, \\ div\vec{E} &= 0, \\ div\vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

является выполнение уравнения Гельмгольца для вектора Герца:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e + k_0^2 \vec{\Pi}^e = 0. \qquad (8.11)$$

Здесь предполагалась гармоническая зависимость от времени так, что $\partial/\partial t \to i\omega$.

В случае представления полей через магнитный вектор Герца вида:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= ik_0 rot \vec{\Pi}^m, \\ \vec{H} &= k_0^2 \vec{\Pi}^m + graddiv \vec{\Pi}^m \end{aligned} \qquad (8.12)$$

необходимым и достаточным условием реализации уравнений Максвелла тоже будет выполнение уравнения Гельмгольца типа (8.11), но уже для магнитного вектора.

Наряду с соотношениями (8.9) и (8.12) поля могут быть выражены и через комбинации электрического и магнитного векторов Герца:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= rotrot \vec{\Pi}^e + ik_0 rot \vec{\Pi}^m, \\ \vec{H} &= rotrot \vec{\Pi}^m - ik_0 rot \vec{\Pi}^e. \end{aligned} \qquad (8.13)$$

Существование двух представлений полей свидетельствует о возможности существования в системе двух самостоятельных и независимых типов волн, различие между которыми будет понятно из дальнейшего материала.

В произвольной ортогональной системе координат с координатными переменными u_1, u_2 и u_3 уравнения (8.9) представляются в форме:

$$
\begin{aligned}
&H_1 = \frac{-ik_0}{h_2}\frac{\partial \Pi^e}{\partial u_2}e^{ihz},\\
&H_2 = \frac{ik_0}{h_1}\frac{\partial \Pi^e}{\partial u_1}e^{ihz},\\
&H_3 = 0,\\
&E_1 = \frac{ih}{h_1}\frac{\partial \Pi^e}{\partial u_1}e^{ihz},\\
&E_2 = \frac{ih}{h_2}\frac{\partial \Pi^e}{\partial u_2}e^{ihz},\\
&E_3 = (k^2 - h^2)\Pi^e e^{ihz}.
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

В последних формулах полагается, что координата 3 есть координата вдоль оси волновода z. Именно вдоль оси z имеет место периодическое в пространстве решение. Через h обозначена продольная проекция волнового вектора k_z, а коэффициенты $h_{1,\,2,\,3}$ есть коэффициенты Ламэ.

Из (8.14) видно, что в рассматриваемых волнах отсутствует продольная проекция магнитного поля. В этой связи волны, соответствующие электрическому вектору Герца, называются поперечно-магнитными, или *TM*-волнами. Иногда используется термин «*E*-волна».

Для волн с магнитным вектором Герца вместо (8.14) можно получить:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = \frac{-ik_0}{h_2}\frac{\partial \Pi^m}{\partial u_2}e^{ihz},\\
&E_2 = \frac{-ik_0}{h_1}\frac{\partial \Pi^m}{\partial u_1}e^{ihz},\\
&E_3 = 0,\\
&H_1 = \frac{ih}{h_1}\frac{\partial \Pi^m}{\partial u_1}e^{ihz},\\
&H_2 = \frac{ih}{h_2}\frac{\partial \Pi^m}{\partial u_2}e^{ihz},\\
&H_3 = (k^2 - h^2)\Pi^m e^{ihz}.
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

Здесь отсутствует продольная составляющая электрического поля, и волны называются поперечно-электрическими, *TE*-волнами или *H*-волнами.

Как уже упоминалось, векторы Герца имеют единственную проекцию – продольную. Для расчета полей в волноводе необходимо решить одно уравнение Гельмгольца для Π^e или Π^m, а затем по приведенным формулам найти векторы электрического и магнитного поля.

Для качественного понимания характера распределения полей в поперечном сечении волновода нет необходимости обращаться к формулам (8.14) и (8.15). Прежде всего, заметим, что в соответствии с (8.12) и (8.13) скалярное произведение $\vec{E}\vec{H}$ равно нулю. Следовательно, силовые линии магнитного и электрического поля взаимно ортогональны. Нетрудно убедиться в том, что в *TM*-волне силовые линии электрического поля параллельны $grad_\perp \Pi^e$, а значит, линии магнитного поля совпадают с изолиниями $\Pi^e = const$. Для *TE*-волн ситуация противоположная. Изолинии $\Pi^m = const$ соответствуют силовым линиям магнитного поля, а линии электрического поля перпендикулярны им.

8.3. Уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат

Уравнение, которое нам предстоит решать, в общем виде может быть записано в форме:

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0. \qquad (8.16)$$

В обобщенной цилиндрической системе координат (системе ортогональных координат с выделенным направлением *z*) оператор Лапласа представляется следующим образом:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right). \qquad (8.17)$$

Для гармонического в продольном направлении решения будем иметь:

$$\Pi(u_1, u_2, u_3 = z) = \Pi(u_1, u_2)e^{ihz}. \qquad (8.18)$$

В этом случае комбинация $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi$, входящая в уравнение Гельмгольца для обобщенной цилиндрической системы, преобразуется в $(k^2 - h^2)\Pi$.

Теперь рассмотрим круглую (обычную) цилиндрическую систему. Использовав соответствующие выражения для коэффициентов Ламэ, приведем уравнение (8.16) к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + (k^2 - h^2)\Pi = 0. \qquad (8.19)$$

Будем искать решение в форме:

$$\Pi(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{8.20}$$

Аналогично тому, как это делалось во второй главе при рассмотрении цилиндрических волн, приведем (8.20) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уравнение на угловую часть:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + p^2\Phi = 0, \tag{8.21}$$

где p – пока произвольная постоянная, нам хорошо известно. Его решение можно записать как:

$$\Phi(\varphi) = \exp(ip\varphi). \tag{8.22}$$

Поскольку это – периодическая по углу φ функция и поскольку решение должно переходить само в себя, необходимо, чтобы константа p была целым числом p = 0, ±1, ±2, … .

Уравнение на радиальную часть:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + [(k^2 - h^2)r^2 - p^2]R = 0 \tag{8.23}$$

является уравнением Бесселя. Ему удовлетворяют любые цилиндрические (бесселевые) функции порядка p $R(r) = Z_p(r\sqrt{k^2 - h^2})$. Выбор конкретного типа бесселевых функций зависит от характера рассматриваемой задачи.

Если рассматривается ограниченная по радиусу область, исключающая саму ось цилиндра $0 < r < \infty$, то общее решение можно скомпоновать из функций Бесселя и Неймана:

$$R = A_1 J_p(r\sqrt{k^2 - h^2}) + A_2 N_p(r\sqrt{k^2 - h^2})\,. \tag{8.24}$$

Это решение убывает при росте радиуса как $1/r$.

Если $0 <= r < \infty$, то решение следует выражать только через J_p, поскольку функция Неймана в нуле имеет особенность. Если же рассматривается вся область изменения радиуса
$0 < r <= \infty$, то единственное решение, нигде не обращающееся в бесконечность, должно быть построено с использованием цилиндрической функции Ханкеля первого рода $H_p^{(1)}(r\sqrt{k^2-h^2})$.

8.4. Электромагнитное поле в волноводе

Теперь мы можем приступить к изучению волн в конкретных типах волноводов. Начать следует с напоминания о том, что кроме формулировки необходимого дифференциального уравнения для корректной постановки задачи необходимо сформулировать граничные условия. Мы уже говорили, что на идеально проводящих стенках волновода должна отсутствовать тангенциальная проекция электрического поля. Как это условие трансформируется в граничное условие для вектора Герца?

Выберем некоторую точку на стенке волновода. Разместим в этой точке начало прямоугольной системы координат с осью z, направленной вдоль оси волновода, осью η, перпендикулярной стенке в данной точке и осью τ, составляющей правую тройку с остальными. В таком варианте оси z и τ касательные к поверхности. Геометрия размещения системы координат показана на рис. 8.3.

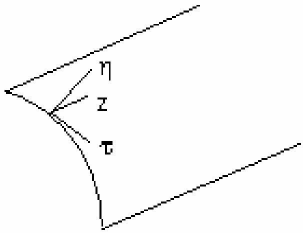


Рис. 8.3. К постановке граничных условий

Воспользуемся первой из формул (8.13), выражающей напряженность электрического поля через комбинацию электрического и магнитного векторов Герца. Применительно к указанной системе координат тангенциальные к поверхности проекции будут заданы следующими выражениями:

$$E_\tau = (ih\frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} + ik\frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta})e^{ihz},$$
$$E_z = (k^2 - h^2)\Pi^e e^{ihz}. \qquad (8.25)$$

Продольные проекции должны быть равны нулю. Один из вариантов выполнения этих условий приводит к соотношениям:

$$\Pi^e |_C = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta} |_C = 0. \qquad (8.26)$$

Обозначение $|_C$ указывает на то, что условия должны выполняться в любой точке контура C – на стенке поперечного сечения волновода.

Другой вариант обращения в ноль проекции E_z сводится к условию $k^2 = h^2$. Однако, как мы знаем, волновой вектор в волноводе не может быть чисто продольным –

волны распространяются наклонно, отражаясь от стенок. В этой связи в волноводе второй вариант не работает.

Таким образом, для двух типов волн – *TM* и *TE* имеем две постановки краевых задач на вектор Герца:

$$\begin{gathered} \nabla_{\perp}^{2}\Pi^{e}+(k^{2}-h^{2})\Pi^{e}=0, \\ \Pi^{e}|_{C}=0 \end{gathered} \tag{8.27}$$

и

$$\begin{gathered} \nabla_{\perp}^{2}\Pi^{m}+(k^{2}-h^{2})\Pi^{m}=0, \\ \frac{\partial\Pi^{m}}{\partial\eta}|_{C}=0. \end{gathered} \tag{8.28}$$

Известно, что представленные краевые задачи имеют нетривиальные решения только при дискретных наборах собственных чисел $a^2 = k^2 - h^2$. Расположим эти числа по возрастанию $\alpha_1^2<\alpha_2^2<\alpha_3^2...$. Если a_i является собственным числом краевой задачи, то ему соответствует собственная функция $\Pi_i^{e,m}$. При заданном k каждому a_i сопоставляется дискретное продольное волновое число $h_i=\sqrt{k^2-\alpha_i^2}$. Решения $A_i\Pi_i^e(u_1,u_2)\exp(i(h_iz-\omega t)$ и $B_i\Pi_i^m(u_1,u_2)\exp(i(h_iz-\omega t)$ называются нормальными волнами (модами) типа E и H, соответственно. Здесь A_i и B_i – произвольные амплитуды, а $\Pi(u_1, u_2)$ – решения приведенных краевых задач, как функции поперечных координат.

При фиксированной частоте ω, начиная с некоторого номера $i = n$, величина продольного волнового числа h_i становится мнимой – волна в волноводе не распространяется. Таким образом, в волноводе может существовать дискретный набор нормальных волн. Если частота такова, что $k^2<\alpha_1^2$, то распространение вообще невозможно. Имеется предельная (максимальная) длина волны $\lambda_{\max}=2\pi/\alpha_1$ и предельная (минимальная) частота $\omega_{\min} = c\alpha_1$, которые еще пропускаются волноводом. Эти выводы мы уже получили, рассматривая простейший прямоугольный волновод. Напомним, что в наших обозначениях фазовая скорость рассматриваемых волн составляет величину $v_ф = c/\sqrt{1-\dfrac{\omega_{\min}^2}{\omega^2}}$, а групповая скорость равна $v_{гр} = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_{\min}^2}{\omega^2}}$.

Перейдем к рассмотрению поля в прямоугольном волноводе в общем случае. Для определенности будем считать, что ширина волновода больше его высоты $a > b$. Вектор Π представим в виде $\Pi(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда уравнение Гельмгольца распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha_x^2 X = 0, \\ &\frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha_y^2 Y = 0, \end{aligned} \tag{8.29}$$

где $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha^2$. Общие решения этих уравнений известны:

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin(\alpha_x x) + B_1 \cos(\alpha_x x), \\ Y &= A_2 \sin(\alpha_y y) + B_2 \cos(\alpha_y y). \end{aligned} \tag{8.30}$$

Для E-волны краевое условие $\Pi^e |_C = 0$ сводится к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &X |_{x=0,\, x=a} = 0, \\ &Y |_{y=0,\, y=b} = 0. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Условия при $x = 0$ и $y = 0$ выполняются автоматически. Условия при $x = a$ и $y = b$ выполняются при $B_1 = B_2 = 0$. Отсюда следуют условия на собственные числа:

$$\alpha_x = m\pi / a, \\ \alpha_y = n\pi / b. \tag{8.32}$$

Тогда общее собственное число следует снабдить двумя индексами:

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \tag{8.33}$$

Можно видеть, что ни m ни n не могут обращаться в ноль, иначе поле в волноводе вообще отсутствовало бы.

Основной модой будет являться волна с $m = n = 1$, мода E_{11}. Для нее максимальная длина волны составляет:

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{\alpha_{11}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{8.34}$$

Собственные функции для E-волн будут иметь вид:

$$\Pi^e_{mn} = \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right). \tag{8.35}$$

Мы знаем, что для E-волны изолинии $\Pi = const$ являются силовыми линиями магнитного поля, а линии им перпендикулярные – силовые линии электрического поля. Для моды E_{11} картина силовых линий представлена на рис. 8.4.

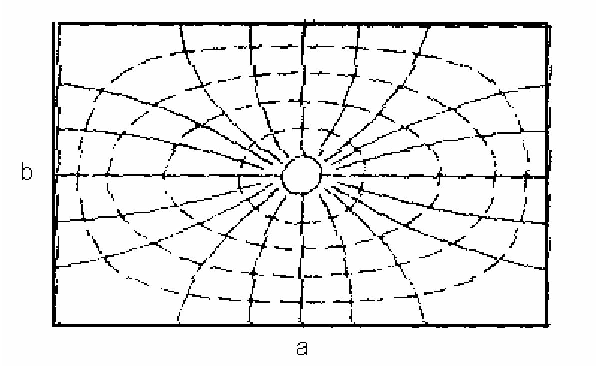


Рис. 8.4. Электромагнитные поля для моды E_{11}

На этом и следующих рисунках пунктирные линии изображают магнитное поле, а сплошные – электрическое. При переходе к модам более высоких порядков (*m* или *n* отличны от единицы) картина полей в поперечном сечении будет состоять из ячеек, аналогичных рисунку 8.4, повторяющихся по ширине и высоте.

Для *H*-волны краевое условие $\partial \Pi^m / \partial \eta |_C = 0$ выбирает решение (8.30) в виде:

$$\Pi^m_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{8.36}$$

В отличие от *E*-волны здесь либо *m* либо *n* (но не оба одновременно) могут обращаться в ноль. Поскольку *a* > *b*, минимальное собственное число будет:

$$\alpha_{\min} = \alpha_{10} = \frac{\pi}{a}. \tag{8.37}$$

Основной модой здесь является мода H_{10} с максимально возможной длиной волны $\lambda_{\max} = 2\pi / \alpha_{10} = 2a$. Следующей модой, в зависимости от соотношений высоты и ширины волновода, будет либо H_{11} с $\lambda_{\max} = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$, либо H_{20} с $\lambda_{\max} = a$.

Основная мода *H*-волны $H_{10} = \cos(\pi x/a)$. Изолинии *П = const* здесь параллельны силовым линиям электрического поля и представляют собой вертикальные прямые. Тогда линии магнитного поля будут горизонтальными прямыми. Картина силовых линий в рассматриваемом случае показана на рис. 8.5. Отметим, что описанный ранее пример простейшего прямоугольного волновода соответствует именно волне H_{10}.

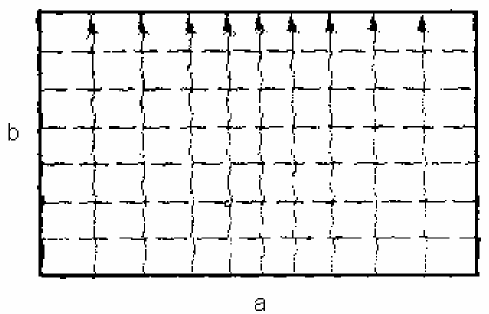


Рис. 8.5. Электромагнитные поля для моды H_{10}

Для волны H_{01} картина силовых линий будет аналогичной рисунку 8.5, но повернутой на 90°.

Приведем также без подробных выкладок распределение полей для моды H_{11}, в которой вектор Герца представляется как $П_{11}^{m} = \cos\left(\pi x/a\right)\cos\left(\pi y/b\right)$ – рис. 8.6.

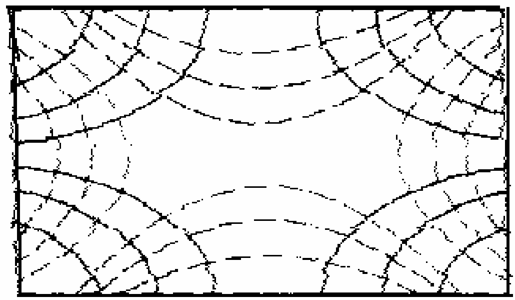


Рис. 8.6. Электромагнитные поля для моды H_{11}

Переходим к рассмотрению круглого волновода, то есть цилиндрического волновода с круговым сечением. В этом случае для электрического и магнитного вектора Герца имеем:

$$\Pi^{e,m} = J_m(\alpha r) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m\varphi) \exp[i(z\sqrt{k^2 - \alpha^2} - \omega t)]. \qquad (8.38)$$

Угловая зависимость может быть представлена как синусом, так и косинусом (за исключением мод с собственным числом m = 0). Такая ситуация называется двукратным вырождением решения. Легко понять, что различие между синусоидальной модой и косинусоидальной модой заключается только в том, что картина полей повернута на 90°. В случае m = 0 вырождения нет, поскольку ненулевое решение имеет место только при косинусоидальной зависимости, причем решение аксиально-симметрично.

Если обозначить через R радиус волновода, то для E-волны граничное условие будет заключаться в следующем:

$$J_m(\alpha r)\,|_{r=R} = 0. \qquad (8.39)$$

Отсюда определяются собственные числа a_m. Пусть υ_{mn} – n-й ноль функции Бесселя J_m порядка m. Тогда a_{mn} = υ_{mn}/R и:

$$\Pi^e_{mn} = J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\frac{\sin}{\cos}(m\varphi). \qquad (8.40)$$

Минимальное собственное число будет при m = 0 (косинусоидальная мода) и n = 1 с численным значением υ_{01}, равным 2.4. Следующее – при $m = n = 1$ с числовым значением
$\upsilon_{11} = 3,8$.

Граничное условие для H – волны задается уравнением $\left.\partial J_m \middle/ \partial r \right|_{r=R} = 0$. Теперь через μ_{mn} обозначим n-й ноль производной функции Бесселя J_m порядка m. Собственные числа в этих условиях определяются соотношением a_{mn} = μ_{mn}/R. Минимальное значение a_{mn} будет при m = 1 и n = 1 (a_{11} = 1,8). Следующее – при m = 0, n = 1 (a_{01} = 3,8 для косинусоидальной моды).

Основной модой в круглом волноводе является мода H_{11}. Для нее критическая длина волны составляет $\lambda_{max} = 2\pi R/1,8 = 3,4R$. Структура полей основной моды представлена на рис. 8.7.

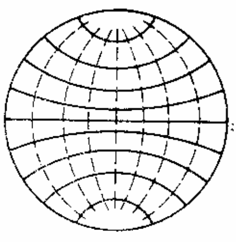


Рис. 8.7. Поля моды H_{11} в круглом волноводе

Первой аксиально-симметричной модой в круглом волноводе является волна E_{01}, для которой $\Pi_{01}^{e} = J_{0}(3{,}4r/R)$. Распределение полей для такой волны представлено на рис. 8.8

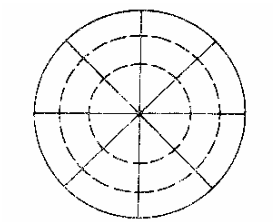


Рис. 8.8. Поля моды E_{01} в круглом волноводе

Завершая рассмотрение волн в волноводах, следует обратить внимание на то, что выяснение картины полей в поперечном сечении является задачей первостепенной важности. Именно знание структуры силовых линий полей позволяет выбрать оптимальное расположение средств возбуждения волн в волноводах и, наоборот – средств вывода волновой энергии из них.

8.5. ТЕМ-волны

Наряду с волноводами для передачи высокочастотных волн в пространственно ограниченных каналах широко используется так называемый коаксиальный кабель. По сути дела, это тот же цилиндрический (круглый) волновод, у которого имеется центральный проводник также круглого сечения – рис. 8.9. Пространство между центральной жилой и внешней оплеткой обычно заполнено диэлектриком, а оплетка снаружи покрыта защитным пластиковым слоем.

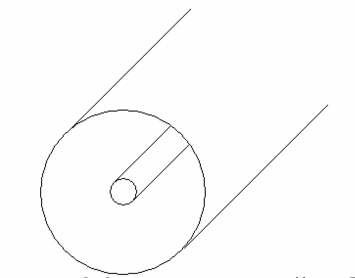


Рис. 8.9. Коаксиальный кабель

Важнейшей особенностью коаксиального кабеля является возможность распространения в нем волн, у которых отсутствуют продольные проекции как электрического, так и магнитного поля одновременно. Эта особенность связана с наличием двух (внутреннего и внешнего) проводящих контуров. Напомним, что в волноводе не могли существовать волны, у которых волновой вектор имел бы только продольный компонент. В коаксиальном кабеле ситуация иная.

Приведем еще раз соотношения (8.25):

$$E_\tau = (ih\frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} + ik\frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta})e^{ihz},$$

$$E_z = (k^2 - h^2)\Pi^e e^{ihz}.$$

Для того чтобы обратить в ноль тангенциальные компоненты электрического поля, теперь как раз будем считать, что волновой вектор чисто продольный $k^2 = h^2$. При этом z-проекция поля равна нулю. Для того чтобы обнулить и τ-проекцию, необходимо потребовать выполнения условий:

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau}\Big|_{C1,C2} = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta}\Big|_{C1,C2} = 0. \qquad (8.41)$$

Условия должны выполняться одновременно на внутренней и внешней поверхности. Именно наличие двух поверхностей, как показывает математическое исследование, делает возможным нетривиальное решение уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \Pi = 0$ в пространстве между поверхностями при указанных краевых условиях.

Реально краевые условия (8.41) сводятся к постоянству вектора Герца на поверхностях $\Pi|_{C1,C2} = const$. Очевидно, что константы на внешнем и внутреннем контурах должны быть различными. Считая поля аксиально-симметричными, запишем уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе в виде:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Pi}{dr}\right) = 0. \tag{8.42}$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{d\Pi}{dr} = \frac{A}{r}, \tag{8.43}$$

где A – постоянная. С другой стороны, из уравнений связи полей с вектором Герца следует, что:

$$E_r = H_\varphi = ik\frac{\partial\Pi}{\partial r}\exp(ikz) = A\frac{ik}{r}\exp(ikz). \tag{8.44}$$

Остальные проекции электрического и магнитного полей равны нулю.

Поскольку волновой вектор имеет только z-проекцию, ТЕМ-волна распространяется без дисперсии. Фазовая скорость равна $c/\sqrt{\varepsilon}$, где c – скорость света в вакууме. По сути дела, в коаксиальном кабеле волны распространяются так же, как в свободном пространстве. Более того, и по аналогии и по геометрии электрического и магнитного поля электромагнитные волны в свободном пространстве следует считать ТЕМ-волнами.

Плотность потока энергии в коаксиальном кабеле определяется формулой:

$$\vec{P} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\int_S [\vec{E}\overrightarrow{H^*}]d\vec{S}. \tag{8.45}$$

Интегрирование должно вестись по поперечному сечению между двумя контурами. Считая, что радиус внутреннего контура равен a, радиус внешнего контура равен b и используя (8.44), получим:

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \frac{A^2}{r^2} r dr = \frac{c}{4} A^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (8.46)$$

Если устранить любой из контуров, положив $a = 0$ или $b = \infty$, то плотность потока будет бесконечно большой. Из этого следует, что ТЕМ-волны могут существовать действительно только при наличии двух контуров. В то же время можно показать, что наличие двух контуров любой конфигурации – не обязательно типа коаксиального кабеля делает возможным распространение ТЕМ-волн. Так, вдоль обычной двухпроводной линии распространяется волна без дисперсии.

8.6. Объемные резонаторы

Если волноводы в радиотехнике СВЧ выполняют роль проводников в качестве среды передачи информации и энергии, то роль резонансных систем (колебательных контуров) играют так называемые объемные резонаторы. Основная причина, по которой резонаторы используются вместо контуров с индуктивностями и емкостями, та же – необходимость предотвратить потери энергии на излучение.

Мы рассмотрим простейшие объемные резонаторы, в которые превращаются волноводы, у которых закрываются проводящими поверхностями торцы. Очевидно, что при этом переменное электромагнитное поле внутри резонатора может существовать в виде стоячих волн. Считаем, что длина резонатора вдоль оси Oz составляет l. Теперь, наряду с прежними (для волноводов) краевыми условиями, для тангенциального компонента электрического поля добавляется еще одно $E|_{z=0,z=l}=0$. В случае *E*-волны это условие превращается в следующее:

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial z}\Big|_{z=0,z=l}=0. \tag{8.47}$$

Условие будет выполнено при $k_z = h = p\pi/l$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда:

$$\Pi^e(u_1,u_2,z)=\Pi^e_{mn}(u_1,u_2)\cos(p\frac{\pi}{l}z), \tag{8.48}$$

где Π^e_{mn} – собственная функция для соответствующего по поперечным размерам волновода. Собственные частоты для колебаний с наборами *m*, *n* и *p* находятся из дисперсионного соотношения:

$$k^2_{mnp}=\left[\alpha^2_{mn}+\left(\frac{\pi}{l}p\right)^2\right], \tag{8.49}$$

или непосредственно для частот:

$$\omega_{mnp}=c\sqrt{\alpha^2_{mn}+\left(\frac{\pi}{l}p\right)^2}. \tag{8.50}$$

Для *H*-волны вместо функции косинуса в (8.48) будет фигурировать синус, а из набора возможных значений *p* следует исключить *p* = 0. Итак, в объемных резонаторах могут существовать только волны фиксированных частот, что и делает их аналогами колебательных контуров.

В резонаторах с идеально проводящими стенками спектр частот строго линейчатый. Реально, из-за конечной проводимости ширина резонансных кривых конечна и спектр, вообще говоря, непрерывный. Ширина резонансной кривой определяется добротностью резонатора. Напомним, что добротность колебательной системы определяется формулой:

$$Q = \frac{2\pi}{T_0}\frac{\overline{W}}{\overline{P}}. \tag{8.51}$$

В приведенном определении T_0 – период колебаний, $\overline{W}$ – средняя энергия, запасенная в резонаторе, $\overline{P}$ – средняя мощность тепловых потерь энергии в резонаторе. Само числовое значение безразмерной величины Q показывает, за какое число периодов энергия в колебательной системе уменьшится в e раз.

Поскольку $\overline{P} = -\frac{d\overline{W}}{dt}$, из (8.51) следует, что:

$$\frac{1}{\overline{W}}\frac{d\overline{W}}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}. \tag{8.52}$$

Решение последнего дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$\overline{W} = \overline{W}_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}t\right). \tag{8.53}$$

Поскольку $\overline{W} = |E^2|$, поле в резонаторе меняется по закону:

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t - i\omega_0 t\right). \tag{8.54}$$

Частотный спектр такого процесса определяется из преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty E_0 \exp\left[-\frac{\omega_0}{2Q}t - i(\omega - \omega_0)t\right]dt. \tag{8.55}$$

В результате интегрирования мы получаем выражение для резонансной кривой:

$$|F(\omega)|^2 = \frac{const}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\omega_0 / 2Q \right)^2}. \tag{8.56}$$

Ширина резонансной кривой $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Добротность резонатора зависит от вида колебаний. Очевидно, энергия электромагнитного поля в резонаторе пропорциональна его объему V. Мощность потерь пропорциональна объему, в котором происходят эти потери Sd, где S – полная поверхность стенок резонатора, d – толщина скин-слоя. Если λ – длина волны, то $V \sim \lambda^3$, $S \sim \lambda^2$, $d \sim \lambda^{1/2}$. В итоге оказывается, что $Q \sim V/(Sd) \sim \lambda^{1/2}$. Таким образом, добротность уменьшается с уменьшением длины волны, и наиболее эффективно использование объемного резонатора в качестве резонансной системы на основной (самой низкочастотной) моде колебаний.

9. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

9.1. Интерференция двух волн

Под термином интерференция понимается сложение двух или более волн с одинаковыми частотами и различными амплитудами, начальными фазами и направлениями распространения волн. Рассмотрим две волны, представленные в форме $A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$ и $A_2\cos(\omega t + \alpha_2)$. Здесь координатные зависимости внесены в фазы α_1 и α_2. Обозначим через δ разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$. Тогда суммарное поле будет $A_S = A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega + \alpha_1 + \delta)$. Известно, что амплитуда результирующего поля определяется по теореме косинусов и задается формулой:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta). \qquad (9.1)$$

По определению интенсивность волны равна среднему квадрату значения поля $I = \langle A^2 \rangle$. Тогда, если за время наблюдения разность фаз оставалась постоянной величиной, то для общей интенсивности будем иметь:

$$I = I_1 + I_2 + 2\cos(\delta)\sqrt{I_1 I_2}. \qquad (9.2)$$

Если же за время наблюдения разность фаз менялась случайным образом и многократно, то усреднение $\cos(\delta)$ даст ноль и полная интенсивность будет равна сумме интенсивностей $I = I_1 + I_2$.

Говоря об интерференции, мы будем считать, что имеет место именно первая ситуация – разности фаз между складываемыми волнами остаются постоянными, и работает формула (9.2). Собственно интерференция и проявляется в виде вариаций суммарной интенсивности в зависимости от разности фаз. В частности, при сложении двух волн с одинаковыми амплитудами, в соответствии с (9.2) общая интенсивность может варьироваться от 0 при $\delta = \pi$ до учетверенной интенсивности отдельной волны при $\delta = 0$. В ситуации же со случайными изменениями δ интенсивность просто равна сумме интенсивностей.

Итак, для экспериментального наблюдения интерференции необходимо иметь две волны с сохраняющейся на протяжении наблюдения разностью фаз. Интерференционную картину довольно несложно получить в лабораторных условиях, например, для волн на поверхности воды. В то же время интерференцию световых волн от естественных источников напрямую наблюдать не удается. Дело в том, что естественный свет обязан своим происхождением испусканию коротких «цугов» волн отдельными атомами. Эти отдельные цуги взаимно независимы так, что разность фаз может считаться неизменной на длительностях этих цугов. Для видимого света длительность составляет величину порядка 10^{-8} *с* при пространственной длине цуга порядка нескольких метров. Время анализа и накопления измерений любым физическим прибором, не говоря уже о человеческих глазах, несравнимо большее. Таким образом, все усредняется и никакая интерференционная картина не видна.

Проблема может быть решена с помощью разделения света от одного источника на два канала, организованных в средах с различными показателями преломления. Схема такого разделения представлена на рис. 9.1.

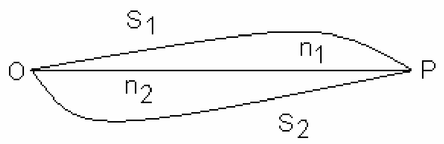


Рис. 9.1. Разделение волн в двух средах

Источник находится в точке *O*. Создаются два пути S_1 и S_2 по которым волны распространяются в различных средах с показателями преломления n_1 и n_2. Сложение волн производится в точке *P*. Суммарное поле в этой точке определяется выражением:

$$A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{S_1}{v_1}\right)\right] + A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{S_2}{v_2}\right)\right]. \qquad (9.3)$$

Здесь A_1 и A_2 – амплитуды волн, $v_{1,\,2} = c/n_{1,\,2}$ – фазовые скорости.

Разность фаз в точке *P*:

$$\delta = \omega\left(\frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1}\right) = \frac{\omega}{c}(n_2 S_2 - n_1 S_1) \qquad (9.4)$$

представляют также в виде $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$, где λ – длина волны в вакууме, а $\Delta = L_2 - L_1 = n_2S_2 - n_1S_1$ – так называемая оптическая разность хода, разность оптических путей L (в отличие от геометрических путей S). Если $\Delta = m\,\lambda$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$, то в точке P будет наблюдаться максимум интенсивности. Если же $\Delta = (m + 1/2)\,\lambda$, то будет наблюдаться минимум.

В качестве примера получения интерференционной картины в пространстве (точнее – на плоскости экрана) рассмотрим сложение волн от двух точечных источников. Геометрия эксперимента представлена на рис. 9.2.

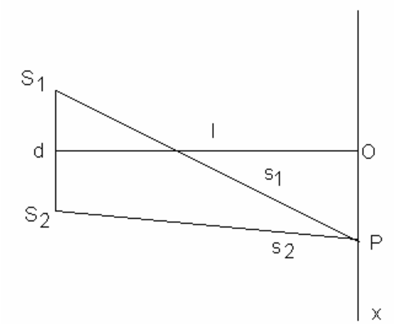


Рис. 9.2. К интерференции волн от двух источников

В точках S_1 и S_2 расположены источники волн с сохраняющейся разностью начальных фаз, а именно – нулевой разностью. Расстояние между источниками равно d. На минимальном расстоянии l от прямой, соединяющей источники, расположен экран. На прямой, параллельной S_1S_2 расположена точка наблюдения P, смещенная относительно точки O на расстояние x. Геометрические длины путей S_1P и S_2P составляют s_1 и s_2, соответственно.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников на рис. 9.2 нетрудно увидеть, что:

$$s_{1,2}^2 = l^2 + \left(x \pm \frac{d}{2} \right)^2. \qquad (9.5)$$

Отсюда определим разность квадратов путей $s_1^2 - s_2^2 = (s_1 - s_2)(s_1 + s_2) = 2xd$. Будем считать, что расстояние между источниками мало по сравнению с расстоянием от источников до экрана $d << l$, а также $x << l$. При этом $s_1 + s_2 \approx 2l$. Тогда $s_1 - s_2 \approx xd/l$. Если показатель преломления среды равен n, то оптическая разность хода в точке P составит:

$$\Delta = n\frac{xd}{l}. \qquad (9.6)$$

Перемещая точку наблюдения по x, мы будем наблюдать чередование максимумов и минимумов освещенности. Координаты максимумов будут определяться тем, что оптическая разность хода в них составляет целое число длин волн:

$$x_{\max} = \pm m\frac{l}{d}\lambda. \qquad (9.7)$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda = \lambda_0/n$, λ_0 – длина волны в вакууме. Координаты минимумов получаются заменой в (9.7) величины m на $m + 1/2$.

Расстояние между соседними минимумами или максимумами является постоянной величиной $\Delta x = l\lambda/d$. Отсюда можно получить формулу для экспериментального определения показателя преломления из наблюдения интерференционной картины:

$$n = \frac{l\lambda_0}{d\Delta x}. \qquad (9.8)$$

Интерференционная картина в пространстве может создаваться при сложении двух плоских волн. Пусть имеются две одинаковые волны, отличающиеся только направлением распространения, то есть ориентацией волновых векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. Определим прямоугольную систему координат *xOy* так, как это показано на рис. 9.3.

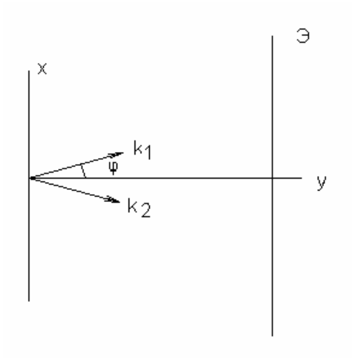


Рис. 9.3. К интерференции двух плоских волн

В этой системе ось *x* является биссектрисой угла между векторами, и половина этого угла обозначена через *φ*. Волны можно записать в следующей форме:

$$A\cos(\omega t - \vec{k}_{1,2}\vec{r}) = A\cos(\omega t - kx\cos\varphi \pm ky\sin\varphi). \qquad (9.9)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора. При этом результирующее поле будет иметь вид:

$$2A\cos(\omega t - kx\cos\varphi)\cos(ky\sin\varphi)\,. \qquad (9.10)$$

Результирующее поле представляет собой бегущую волну, распространяющуюся в направлении оси *x*, модулированную по амплитуде стоячей волной в направлении оси *y*. Если на экране, перпендикулярном *x*, анализировать интенсивность волны, то можно видеть чередование максимумов и минимумов. Координаты максимумов определяются из соотношения $\sin(\varphi)ky = m\pi$, откуда:

$$y_{\max} = \pm \frac{m\pi}{k \sin \varphi}. \tag{9.11}$$

9.2. Когерентность

Как указывалось выше, для наблюдения интерференционной картины требуется согласованность источников волн, создающих интерференцию. В простейшем случае под согласованностью понимается сохранение разности фаз волн в источниках в течение времени наблюдения. Если не говорить об источниках, то требуется некая самосогласованность самого волнового поля в пространстве и во времени (снова в течение времени наблюдения). Согласованность источников, или самосогласованность волнового поля, называется термином когерентность. Соответственно, согласованность во времени называется временной или частотной когерентностью, а согласованность в пространстве – пространственной когерентностью.

При рассмотрении волнового поля в форме простых плоских, сферических или цилиндрических полей мы могли бы назвать поле когерентным во времени, если в заданной точке разность фаз в моменты времени t и $t + \Delta t$ остается постоянной при любом t. Аналогично, волновое поле будет пространственно-когерентным, если в один и тот же момент времени разность фаз в точках пространства $\vec{r}$ и $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ постоянна и не зависит от выбора точки $\vec{r}$. Однако указанные модели волновых полей являются только лишь идеализациями, а понятия когерентности и некогерентности, в первую очередь, и связаны с отличиями от идеальных моделей. В этой связи требуется рассмотреть временную и пространственную когерентности отдельно и более подробно.

Временная некогерентность обусловлена вариациями во времени амплитуды, фазы и частоты волны. В реальной ситуации, например, плоскую волну мы должны представить в виде:

$$A(t)\cos[\omega(t)t - \vec{k}\vec{r} + \alpha(t)]. \qquad (9.12)$$

Временные вариации волнового вектора также можно было бы учесть, но мы внесем их, например, в вариации начальной фазы *α(t).* Кроме того, далее ограничимся случаем постоянной амплитуды.

Одновременные изменения частоты и начальной фазы можно свести либо только к вариациям частоты, либо только к вариациям фазы. Представим (9.12) в форме:

$$A\cos[\omega_0 t + (\omega(t) - \omega_0)t + \alpha(t)], \tag{9.13}$$

где ω_0 – некоторая средняя постоянная частота. Тогда сумму $\alpha(t)$ + $(\omega(t)$ – $\omega_0)t$ можно рассматривать в качестве новой переменной начальной фазы.

Рассмотрим влияние флуктуаций фаз двух волн при постоянной частоте. Если обозначить через $\delta(t)$ разность фаз $\alpha_2(t) - \alpha_1(t)$, то для интенсивности интерференционного поля имеем:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta(t)). \tag{9.14}$$

Пусть Δt – время наблюдения, время инерционности измерительного прибора. Если за это время величина $\delta(t)$ многократно меняется, пробегая всевозможные значения, то последнее слагаемое в (9.14) усредняется до нуля и наблюдается просто суммарная интенсивность. Интерференционная же картина может наблюдаться, если $\delta(t)$ за время Δt меняется мало по сравнению с величиной 2π. Как мы уже отмечали, видимый свет, например, представляет собой хаотичную последовательность отдельных цугов волн, в которых фазы случайны и независимы. Таким образом, время когерентности – время, в течение которого может наблюдаться интерференция, в видимом свете не превышает характерную длительность цугов.

Представим цуг волны формулой $F(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ при $|t|$ < = $\tau/2$ и $F(t) = 0$ при $|t|$ > $\tau/2$. Здесь τ – длительность цуга. Спектр сигнала, получаемый из функции $F(t)$ обратным преобразованием Фурье:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt\,, \tag{9.15}$$

для нашего случая определяется формулой:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}A_0\tau\frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{(\omega-\omega_0)\tau/2}. \tag{9.16}$$

Сходное выражение мы получали для спектра прямоугольного импульса. Мы видели, что основной вклад в спектр дают волны в диапазоне частот $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ вблизи средней частоты ω_0.

Обобщая сказанное, можно высказать следующее заключение. Для любого немонохроматичного волнового поля время частотной когерентности составляет величину порядка $2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – характерная ширина спектра волнового поля.

Пространственная когерентность определяет, на каких расстояниях между двумя точками поле может считаться когерентным. Если временная когерентность определяется разбросом частот в поле – разбросом модулей волновых чисел, то пространственная когерентность определяется разбросом направлений волновых векторов в поле, то есть, по сути дела, угловыми размерами источников волн.

Будем считать, что источником волн является светящаяся нить *O'O''* на рис. 9.4. Из точки наблюдения *P* виден угловой размер нити φ так, что в *P* имеется пучок волн с волновыми векторами от $\vec{k}'$ до $\vec{k}''$. Далее угловой размер будем считать малым $\varphi << 1$.

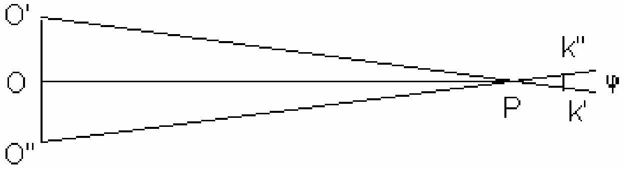


Рис. 9.4. Угловой размер светящейся нити

Рассмотрим интерференцию от двух щелей, на которые падает уже не одиночная плоская волна, а пучок с угловым разбросом φ. Геометрия картины представлена на рис. 9.5.

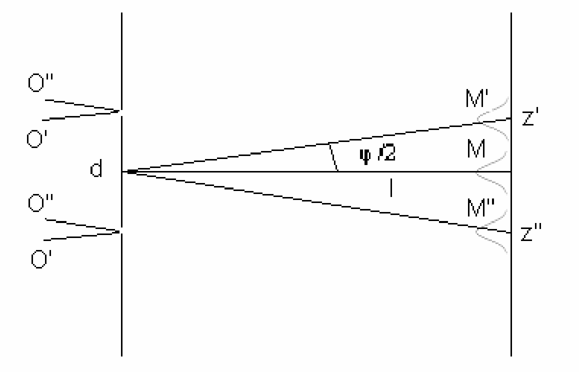


Рис. 9.5. К понятию пространственной когерентности

Волна от центрального направления *O* дает главный интерференционный максимум в центре экрана *M*. Волны от боковых направлений от *O'* до *O''* дают наложение смещенных основных максимумов с крайним положениями *M'* и *M''*. Расстояния крайних смещений по экрану *z'* и *z''* равны $l\varphi/2$ (при малых φ). Если смещение *z'* или *z''* меньше ширины интерференционного максимума $\Delta z = l\lambda/d$, где λ – длина волны, то интерференционная картина будет наблюдаться. Нетрудно показать, что для этого необходимо потребовать выполнения условия $\varphi < \lambda/d$ или $d < \lambda/\varphi$. В противном случае интерференционные максимумы и минимумы будут существенно перекрываться и интерференционная картина смазывается. Таким образом, поле в точках, разнесенных на расстояние больше λ/φ по волновой поверхности, становится некогерентным. Величину

λ/φ называют радиусом пространственной когерентности. Например, угловой размер Солнца составляет примерно 0,01 радиана. Для видимого света с длиной волны 0,5 мкм радиус когерентности составляет величину 0,05 мм. Таким образом, интерференция в естественном свете не наблюдается как в силу частотной, так и в силу пространственной некогерентности.

9.3. Принцип Гюйгенса–Френеля

Переходя от сложения двух или более дискретных волн к непрерывному континууму волн или источников, мы, тем самым, переходим от интерференции к дифракции. То есть существенной физической разницы между этими явлениями нет. Тем не менее, этот переход порождает необходимость разработки специальных методов формального описания дифракции, а сами проявления дифракции значительно более разнообразны.

Простейшее «школьное» определение дифракции формулируется как способность волн огибать препятствия и попадать в области геометрической тени. Однако такая формулировка не содержит никакой информации о количественном описании явления. Теоретической базой методики расчета дифракционных полей в общем виде является уже знакомый нам принцип Гюйгенса, важнейшим образом расширенный Френелем.

Применительно к задачам дифракции принцип Гюйгенса–Френеля может быть сформулирован следующим образом. В произвольной точке пространства волновое поле может быть представлено как суперпозиция сферических волн, испускаемых точечными источниками, непрерывно распределенными по любой поверхности постоянной фазы, расположенной между источником (источниками) поля и точкой наблюдения. При этом состояние поля с внешней по отношению к точке наблюдения области за поверхностью не важно. Суперпозиция полей от точечных источников должна учитываться в форме интерференции, то есть с учетом набега фаз.

Пусть на рис. 9.6 фазовая поверхность есть *S*. Выделим ее малый элемент *dS* с вектором нормали к нему $\vec{n}$. Расстояние от точки наблюдения *P* до элемента поверхности обозначим через *r*, а угол между направлением *r* и нормалью обозначим как φ.

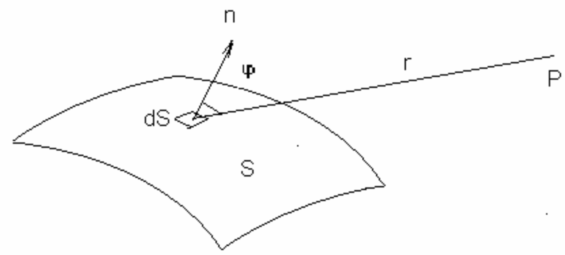


Рис. 9.6. К расчету дифракции

Поскольку в сферической волне амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию до источника, вклад в поле *dE* от элемента *dS* можно представить так:

$$dE = K\frac{a_0 dS}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0). \qquad (9.17)$$

Здесь $\omega t - a_0$ представляет собой фазу исходной волны на площадке *dS*, *k* – волновое число, a_0 – амплитуда исходной волны на площадке. Коэффициент пропорциональности *K* зависит от угла, под которым площадка видна из точки наблюдения. Очевидно, что под углом $\varphi = \pi/2$ площадка вообще не видна, а под углом $\varphi = 0$ она видна полностью. Таким образом, *K* пропорционален $\cos(\varphi)$.

Для того чтобы получить полное суммарное поле, необходимо выполнить интегрирование по всей видимой из точки *P* поверхности *S*:

$$E = \int_S \cos(\varphi)\frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0)dS. \qquad (9.18)$$

В последней формуле φ, a_0, r следует рассматривать как функции координат текущей точки поверхности S.

Выражение (9.18) является количественной формулировкой принципа Гюйгенса–Френеля. Оно является универсальной формулой для расчета дифракционных полей, как принято говорить, в квадратурах. В некоторых немногочисленных типах задач о дифракции применение этой формулы позволяет довести задачу расчета волновых полей до конечного результата. Однако в большинстве случаев приходится прибегать к определенным приближениям. На этом пути неоценимый вклад был внесен Френелем. К краткому рассмотрению его концепций мы и переходим.

9.4. Зоны Френеля

Френель предложил упрощенную схему анализа и расчета дифракционных явлений, применимую, в первую очередь, если в рассматриваемых системах присутствуют симметрии того или иного рода. Пусть из точки S на рис. 9.7 излучается сферическая волна, а в точке P наблюдается суммарное поле . Выделим сферическую поверхность – поверхность равной фазы и разобьем ее симметрично относительно оси SP на кольцевые зоны с номерами 1, 2, … m так, чтобы расстояния b_n и b_{n-1} от краев зон до точки P различались на половину длины волны. Иными словами, расстояние от внешнего края кольца с номером n до точки наблюдения равно $b_n = b_{n-1} + \lambda/2 = b + n\lambda/2$. Вклады от двух соседних колец отличаются по фазе на + π. Построенные таким образом кольца называются зонами Френеля.

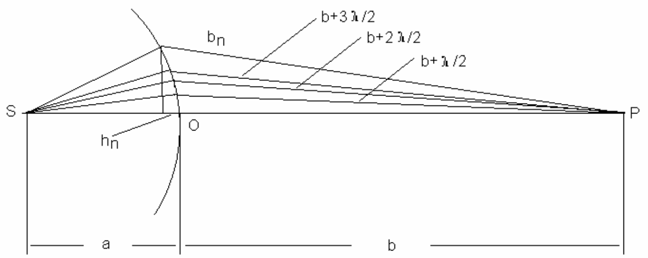


Рис. 9.7. К понятию зон Френеля

Из геометрии рисунка можно установить, что высота сферического сегмента h_n равна

$$h_n = \frac{bn\lambda + n^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \tag{9.19}$$

Ограничимся рассмотрением зон Френеля с не слишком большими номерами. Тогда для $\lambda << a, b$ членом с λ^2 в (9.19) можно пренебречь. В этом случае $h_n \approx bn\lambda/(2(a + b)$. Как известно, площадь сферического сегмента с высотой h и радиусом сферы R равна $2\pi Rh$. Тогда площадь n-й зоны Френеля может быть получена как разность площадей двух сегментов с высотам h_n h_{n-1}, что составит величину $\pi ab\lambda/(a + b)$. Как видно, площади всех зон Френеля не зависят от номера зоны, то есть равны между собой.

Расстояния b_n медленно нарастают с увеличением номера n. Угол φ_n, соответствующий обозначениям рисунка 9.6 также медленно увеличивается с увеличением номера. Это означает, что в соответствии с формулой 9.17 вклады в суммарное поле от отдельных зон Френеля составляют медленно убывающую последовательность $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$. Мы показали, что вклады соседних зон противофазны. Тогда, переходя к модулям отдельных вкладов, получим для суммарного поля $A = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| + \ldots$. Далее символы абсолютной величины опускаем. Последнее соотношение можно переписать в форме:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots \tag{9.20}$$

Поскольку все A_n образуют медленно меняющуюся последовательность, то можно приближенно считать, что $A_n \approx (A_{n+1} + A_{n-1})/2$. Тогда выражения в скобках в (9.20) обнуляются и $A \approx A_1/2$ – амплитуда поля, создаваемого всей фазовой поверхностью оказывается равной половине амплитуды, создаваемой только первой зоной Френеля. Из этого следует парадоксальный, на первый взгляд, вывод. Если на пути сферической волны поставить экран, закрывающий от точки наблюдения все пространство кроме первой зоны Френеля, то амплитуда поля в этой точке не только не уменьшится, но увеличится вдвое. Этот факт был блестяще подтвержден экспериментально, что на многие и многие десятилетия утвердило незыблемость гипотезы волновой природы света.

Рассмотрим более подробно дифракцию на круглом отверстии. Геометрия эксперимента снова будет соответствовать рис. 9.7, где фазовая поверхность закрыта везде, кроме круглого отверстия радиуса r_0 с центром на оси SP, перпендикулярного оси. Предполагаем, что отверстие мало по сравнению с a и b. Тогда, если радиус таков, что

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}\ , \tag{9.21}$$

то отверстие открывает ровно m зон Френеля. Иными словами:

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{9.22}$$

При этом в точке наблюдения будем иметь $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m$. Знак «+» будет соответство-

вать четным m, знак «–» соответствует нечетным m. Поскольку
$A_к \approx (A_{к-1} + A_{к+1})/2$, для m нечетных $A = A_1/2 + A_m/2$, в то время как для m четных $A = A_1/2 + A_{m-1}/2 - A_m$. Амплитуды двух соседних гармоник по модулю практически равны, в силу чего имеем окончательно:

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}. \qquad (9.23)$$

При небольших номерах m все амплитуды приближенно равны между собой по модулю. Если открыто нечетное число зон, то $A = A_1$ – в точке наблюдения имеет место максимум. Если открыто четное число зон, то имеет место минимум (близкий к нулевой интенсивности).

Если сместить точку наблюдения немного вверх, то частично закроется зона m и частично откроется зона $m + 1$. При нечетном m интенсивность в смещенной точке наблюдения уменьшится. При дальнейшем смещении она достигнет минимума, а затем снова начнет нарастать. То же самое происходит и при смещении вниз. Тогда на экране будет наблюдаться дифракционная картина, подобна представленной на рис. 9.8.

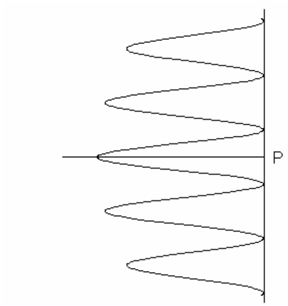
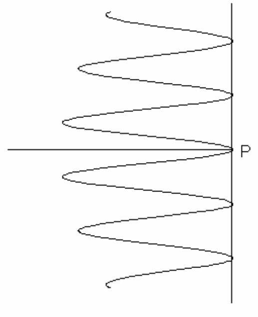


Рис. 9.8. Дифракция с максимумом в точке наблюдения

При четном значении m кар-
картина противоположна. При смещении точки наблюдения



интенсивность начнет нарастать, достигнет максимума, а затем будет снова убывать. Рис. 9.9 иллюстрирует этот вариант.

Рис. 9.9. Дифракция с минимумом в точке наблюдения

Обратим внимание на то, что картина весьма напоминает интерференцию от двух щелей, хотя здесь складываются не две волны, а целый континуум.

Сходная ситуация возникает при дифракции на круглом диске. Здесь, наоборот открытым будет вся фазовая поверхность, кроме центрального диска. Пусть диск перекрывает m первых зон Френеля. Тогда:

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+2} - \ldots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2}\right) + \ldots \quad (9.24)$$

По изложенным выше причинам все слагаемые в скобках почти взаимно сокращаются и $A = A_{m+1}/2$. Итак, в точке наблюдения за центром экранирующего диска имеется освещенная (если речь идет о свете) область. Если m невелико, диск перекрывает несколько первых зон Френеля, то $A_1 \approx A_{m+1}$ и $A \approx A_1/2$ как вообще в отсутствии диска. Вот здесь следует напомнить «школьное» определение явления, как способности волн огибать препятствия. Дополним это определение тем, что огибание возможно, если размеры препятствия не слишком превосходят размер первой зоны Френеля. При смещении точки наблюдения в любую сторону интенсивность будет уменьшаться, затем снова нарастать и так далее. Снова будет иметь место дифракционная картина, подобная изображенной на рис. 9.8.

9.5. Дифракция на границе геометрической тени

Геометрия задачи рассмотрения дифракции на границе тени представлена на рис. 9.10. Сверху вниз вертикально распространяется плоская волна. На экране, параллельном фазовой поверхности, расположена точка наблюдения *P*. Перед экраном на расстоянии *b* от него расположена преграда в виде полуплоскости, также параллельной фазовой поверхности, частично перекрывающей путь волне.

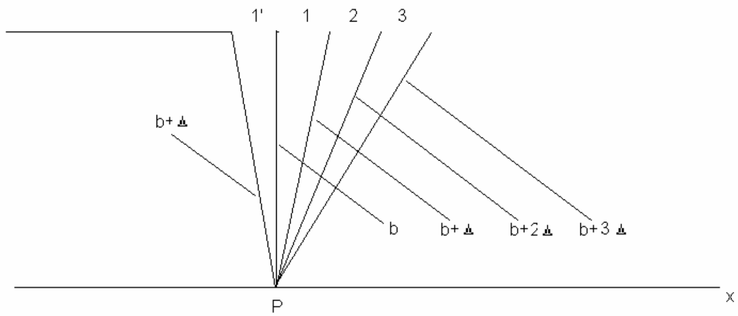


Рис. 9.10. Геометрия задачи о дифракции на границе тени

Разобьем открытую часть волновой поверхности на уровне преграды на малые зоны так, чтобы расстояния от точки наблюдения *P* до краев зоны отличались на постоянную величину Δ. В отличие от построения зон Френеля, здесь разности фаз соседних зон будут составлять не π, а постоянную но малую величину. Пронумеруем зоны справа от точки *P* номерами 1, 2, 3, … , а слева – 1’, 2’, 3’, … .

Пусть d_1, d_2, d_3, – ширины зон с соответствующими номерами. Из геометрии рис. 9.10 видно, что

$d_1 + d_2 + ... + d_m = \sqrt{(b + m\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{2bm\Delta + m^2\Delta^2}$. Поскольку выбираем малые $\Delta << b$, то при не очень больших номерах m последним слагаемым под корнем можно пренебречь. При этом $d_1 + d_2 + ... + d_m = \sqrt{2bm\Delta}$. Ввиду того, что $d_1 = \sqrt{2b\Delta}$, можно последнюю сумму представить в виде $d_1\sqrt{m}$. Отсюда следует, что $d_m = d_1(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})$. Можно рассчитать отношения соседних ширин зон $d_1 : d_2 : d_3 : d_4$ ... = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 ... . Аналогичные пропорции имеют место и для площадей зон, то есть площади зон, а следовательно, и амплитудные вклады в суммарное поле образуют монотонно уменьшающуюся последовательность, которая убывает сначала быстро, затем все медленнее и медленнее.

Рассмотрим сложение полей от нескольких первых зон справа. Воспользуемся векторным сложением амплитуд. Поскольку величина Δ для всех соседних зон постоянна, постоянной является и разность фаз для соседних зон $a = \Delta/\lambda$. Методика векторного сложения полей иллюстрируется рис. 9.11.

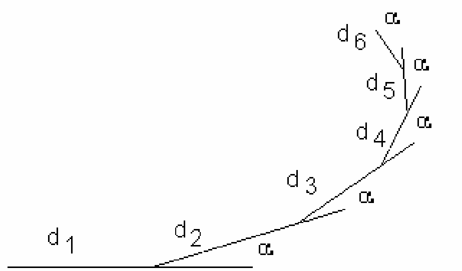


Рис. 9.11. Векторное сложение полей

Суммарное поле от нескольких зон, открытых справа от точки наблюдения, будет пропорционально длине отрезка, начинающейся в начале вектора d_1 и заканчивающегося в конце последнего вектора. Если открыто несколько зон слева от точки наблюдения, то в дополнение к рис. 9.11 появится центрально симметричная фигура в левом нижнем квадранте. При переходе к пределу $\Delta \to 0$ мы будем иметь гладкую кривую. Когда преграда вообще отсутствует, фигура, представленная выше, превращается в так называемую спираль Корню, показанную на рис. 9.12.

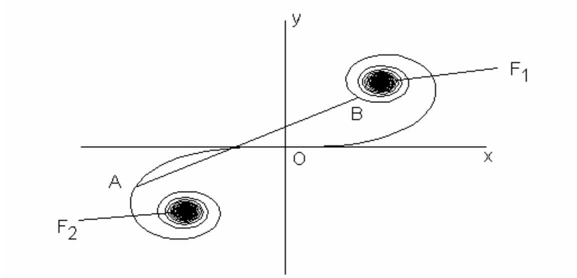


Рис. 9.12. Спираль Корню

В том случае, когда открыта часть пространства слева от точки P и часть пространства справа от точки – то есть в общем случае, суммарная амплитуда изображается отрезком AB. Пусть пространство справа открыто полностью. Тогда точка B помещается в фокус F_1. Если граница препятствия находится точно над точкой наблюдения, то точка A совмещена с точкой O. По мере смещения точки наблюдения в область тени точка A скользит по спирали к фокусу F_1. Амплитуда, как длина AB, монотонно и весьма быстро уменьшается. Это означает, что по мере углубления в область геометрической тени поле быстро спадает, однако не равно нулю, как это было бы в приближении геометрической оптики.

Теперь будем открывать пространство левее точки наблюдения. Точка A скользит от точки O к фокусу F_2. Нетрудно видеть, что при этом длина AB достигает некоего максимума, затем уменьшается и в дальнейшем осциллирует. Амплитуда осцилляций уменьшается, и интенсивность выходит на постоянную величину, соответствующую интенсивности в условиях геометрической оптики.

В параметрическом виде спираль Корню может быть представлена парой функций:

$$x(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2 / 2) du \tag{9.25}$$

и

$$y(t) = \int_0^t \sin(\pi u^2 / 2) du. \tag{9.26}$$

Эти специальные функции носят название интегралов Френеля. Параметр t здесь имеет смысл длины дуги от точки O на рис. 9.12 до текущего положения.

С помощью последних соотношений можно построить картину распределения интенсивности волны в зависимости от расстояния по экрану от границы геометрической тени. Соответствующий график представлен на рис. 9.13. Отметим, что в приближении геометрической оптики мы имели бы просто «ступеньку» со скачкообразным переходом интенсивности от нуля до постоянной величины.

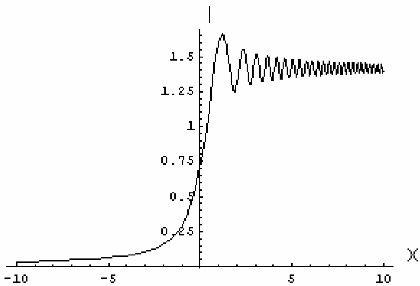


Рис. 9.13. Интенсивность поля вблизи границы тени

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

10.1. Простые волны Римана

Во всех предыдущих разделах мы имели дело с линейными физическими процессами и их линейным математическим описанием. Напомним, что для линейных явлений работает принцип суперпозиции – одновременное воздействие двух или более процессов на систему определяется алгебраической суммой воздействий каждого из процессов по отдельности. Волновые уравнения, рассмотренные в первой главе, оказывались линейными, как правило, в том случае, если возмущения параметров среды распространения в волнах считались малыми по сравнению с их невозмущенными значениями. Однако изначально исходные уравнения, используемые при формулировании волновых уравнений, являются нелинейными уже хотя бы потому, что ускорение, записанное в эйлеровой форме, содержит нелинейное слагаемое $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$.

Первое аналитическое исследование нелинейных волн было выполнено Риманом, и предложенная им модель нелинейных волновых полей получила названия модели простых волн Римана. Следуя его методике, рассмотрим сжимаемую жидкость или газ, на которые не воздействуют никакие внешние силовые поля. Единственная сила, принимаемая во внимание, есть сила градиента давления. Исходными являются уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0 \qquad (10.1)$$

и уравнение движения:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -gradP, \tag{10.2}$$

где ρ – плотность среды, $\vec{u}$ – гидродинамическая скорость, P – давление в среде.

Переходя к одномерному случаю и расписав производные, последние уравнения можно представить в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{10.4}$$

Термин «простые волны» по определению Римана означает то, что в рассматриваемой модели каждая из величин u, P и ρ может быть однозначно выражена с помощью функциональной зависимости через любую другую. Тогда правую часть в (10.4) можно записать как $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$, а само уравнение в виде $\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial u} \right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Теперь уравнения (10.3) и (10.4) могут быть переписаны в следующей форме:

$$-\frac{\partial u / \partial t}{\partial u / \partial x} = u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial u}, \tag{10.5}$$

$$-\frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial x} = u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}. \tag{10.6}$$

В силу того, что u и ρ связаны однозначной функциональной зависимостью, левые части последних уравнений равны. Следовательно, равны и правые части.

$$u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial u} = u + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}. \tag{10.7}$$

Производная $\partial P / \partial \rho$ имеет размерность квадрата скорости. Если обозначить ее как c^2, то, снова исходя из однозначной связи всех величин, можно выполнить следующую цепочку преобразований в (10.7):

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho} \rightarrow c^2\frac{\partial \rho}{\partial u} = \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Отсюда $\partial u / \partial \rho = \pm\, c / \rho$, и система уравнений может быть окончательно записана следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{10.8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{10.9}$$

Мы получили отдельное дифференциальное уравнение (10.8) относительно неизвестной u. Как уравнение в частных производных первого порядка, оно может быть решено методом характеристик. Решение может быть представлено только в неявном виде:

$$u = \Phi\left(t \mp \frac{x}{c \pm u}\right). \tag{10.10}$$

Неявный вид означает то, что u стоит и в левой и в правой части соотношения (10.10), которое только в исключительных случаях может быть разрешено относительно u явно. В то же время решение (10.10) удовлетворяет уравнению (10.9) при любом виде функции Φ от своего аргумента.

Для конкретизации рассмотрения исследуем поведение волн Римана в условиях адиабатичности процессов в газе или жидкости, когда давление и плотность связаны соотношением $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, где γ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. В этом случае $c = c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2}u$, c_0 – скорость звука. Будем считать, что в начальной точке $x = 0$ находится источник, генерирующий гармонический во времени сигнал. Рассмотрим волну, распространяющуюся вправо. Для нее в соответствии с (10.10) будем иметь:

$$u = \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u}\right)\right). \qquad (10.11)$$

Сравним последнее выражение с формулой для обычной линейной волны:

$$u = \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right). \qquad (10.12)$$

Если линейная волна распространяется без изменения формы – синусоида остается синусоидой, то в римановской волне ситуация иная. Из (10.11) можно видеть, что участки волны с положительным значением скорости u распространяются быстрее звука – к c_0 прибавляется положительная добавка. Участки волны с отрицательной скоростью u наоборот отстают – добавка отрицательная. Все это приводит к искажению профиля по мере распространения. Гребни волны опережают впадины. Характер распространения иллюстрируется рис. 10.1, где представлены результаты численного решения уравнения (10.11) относительно *u*.

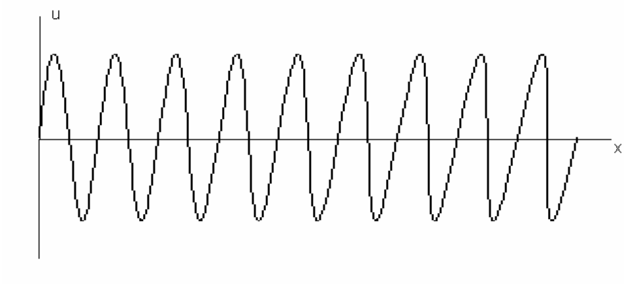


Рис. 10.1. Распространение волны Римана

Мерой нелинейности является безразмерная величина $M = u/c_0$, которая называется числом Маха. Обозначив через u_0 амплитуду скорости частиц в волне, определим амплитудное число Маха $M_0 = u_0/c_0$. При слабой нелинейности $M_0 << 1$ формула (10.10) может быть приведена к виду:

$$u = \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2}ux\right), \tag{10.13}$$

где $\tau = t - x/c_0$, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Решение (11.13) удовлетворяет упрошенному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}, \tag{10.14}$$

которое, собственно, и называется уравнением простых волн с квадратичной нелинейностью.

По мере удаления от гармонического источника происходит укручение передних фронтов периодов исходной синусоиды. На расстоянии $x_p = c_0^2 / \varepsilon\omega u_0$ происходит разрыв

– производная по координате обращается в бесконечность. Далее решение перестает быть однозначным, происходит «закручивание» волны. Такая картина наблюдается реально для волн на поверхности воды. Слабые волны действительно напоминают участки синусоиды. Увеличение амплитуды волны приводит к хорошо известным «барашкам», что и является проявлением нелинейности.

Поскольку в процессе распространения простых волн их форма все больше отличается от синусоиды, видоизменяется и их спектр. В условиях слабой нелинейности будем искать решение уравнения (10.14) в виде суммы ряда последовательных приближений $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots$. Каждый последующий член ряда много меньше предыдущего $u^{(n+1)} << u^{(n)}$. Для первого приближения нелинейность вообще не учитывается, и из (10.14) имеем $\partial u^{(1)} / \partial x = 0.$ Если источник генерирует гармоническую волну, то при x = 0 будет:

$$u^{(1)}(0,\tau) = u_0 \sin(\omega\tau). \qquad (10.15)$$

Второе приближение получается с использованием первого в решении уравнения:

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u^{(1)}\right)^2. \qquad (10.16)$$

Отсюда следует:

$$u^{(2)}(x,\tau) = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_0^2 \omega x \sin(2\omega\tau) = \frac{z}{2} u_0 \sin(2\omega\tau), \quad (10.17)$$

где введена безразмерная координата $z = \varepsilon\omega u_0 x / c_0^2$. Итак, во втором приближении нелинейность простых волн Римана порождает вторую гармонику частоты, амплитуда которой нарастает по мере распространения.

Можно показать, что если в источнике генерируются две волны с частотами ω_1 и ω_2, то наряду с гармониками на удвоенных частотах в спектре волн будут присутствовать комбинационные частоты $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$. Амплитуды этих гармоник также нарастают по мере распространения волн.

Существует методика, позволяющая установить эволюцию спектральных составляющих нелинейных волн Римана непосредственно из неявной формы решения (10.13) при гармоническом сигнале в источнике в форме:

$$\frac{u}{u_0} = \sin\left(\omega\tau + z\frac{u}{u_0}\right). \qquad (10.18)$$

Решение ищется в виде:

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z)\sin(n\omega\tau). \qquad (10.19)$$

Было показано, что амплитуды B изменяются в зависимости от безразмерной координаты z по закону:

$$B_n(z) = 2\frac{J_n(nz)}{nz}, \qquad (10.20)$$

где J – бесселевы функции. Такое представление справедливо в области изменения z от 0 до 1. В точке z = 1 формируется упомянутый ранее разрыв в первой гармонике, после которого решение перестает быть однозначным. Графики изменения гармоник, составляющих спектр волн Римана, представлены на рис. 10.2.

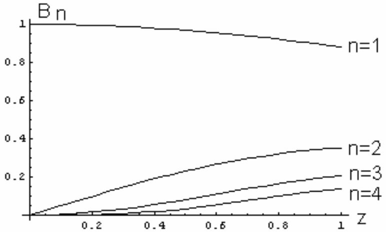


Рис. 10.2. Амплитуды гармоник в спектре волн Римана

10.2. Нелинейные волны в диссипативной среде

Учет диссипации, то есть потерь энергии, был нами выполнен при рассмотрении электромагнитных волн в среде с проводимостью. Традиционно, одновременный учет нелинейности и диссипации выполняется при рассмотрении звуковых волн в жидкости или газе, хотя общие свойства совместного проявления этих процессов остаются сходными для волн любой природы.

Исходными для анализа линейных звуковых волн являются линеаризованные уравнения непрерывности и движения, которые в одномерном случае могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(u) = 0, \qquad (10.21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\xi + \frac{4}{3}\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (10.22)$$

В этих уравнениях ρ' и u – возмущения плотности и скорости частиц в волне, ρ_0 – невозмущенная плотность среды. Диссипация учтена введением сил объемной и сдвиговой вязкости с коэффициентами ξ и η соответственно.

Из представленной системы исключается возмущение плотности, и она превращается в следующее уравнение на возмущение скорости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0. \qquad (10.23)$$

Здесь b – диссипативный коэффициент, равный ξ + $4\eta/3$. При введении уже использованной ранее новой переменной
$\tau = t - x/c_0$ уравнение (10.23) упрощается и приводится к виду:

$$2c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}. \qquad (10.24)$$

Уравнение может быть проинтегрировано по τ. Произвольную функцию от x, полученную после интегрирования, следует положить равной нулю. Только в этом случае возмущения будут исчезать при $\tau \to \infty$ (как это обязано быть при учете диссипации, затухания волн). Тогда мы получим уравнение типа теплопроводности или диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \qquad (10.24)$$

В то же время, как было показано выше, распространение слабо нелинейных волн Римана описывается уравнением (10.14). Уравнение, которое учитывает одновременно и слабую нелинейность и диссипацию, получается комбинированием (10.14) и (10.24):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \ , \qquad (10.25)$$

называется уравнением Бюргерса.

Относительная роль процессов нелинейности и диссипации определяется отношением первого слагаемого в правой части уравнения Бюргерса ко второму. С учетом того, что для численных оценок можно заменить оператор дифференцирования по τ умножением на частоту ω, это отношение равно:

$$2\varepsilon\frac{c_0\rho_0u_0}{b\omega}=2\varepsilon\,\mathrm{Re}=\frac{1}{\tilde{A}}. \qquad (10.26)$$

Безразмерный параметр *Re*, определяющий относительный вклад нелинейных и диссипативных процессов, называется числом Рейнольдса.

Для анализа решений уравнения Бюргерса вводятся новые безразмерные переменные $V = u/u_0$, $\Theta = \omega\tau$, $z = \varepsilon\omega u_0 x/c_0^2$. В этих переменных уравнение (10.25) принимает вид:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=V\frac{\partial V}{\partial\Theta}+\tilde{A}\frac{\partial^2 V}{\partial\Theta^2}, \qquad (10.27)$$

где, как и в (10.26), $\Gamma = (2\varepsilon Re)^{-1}$.

Последнее уравнение замечательно тем, что подстановкой

$$V=2\tilde{A}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\ln U) \qquad (10.28)$$

приводится к линейному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\tilde{A}\frac{\partial^2 U}{\partial\Theta^2}. \qquad (10.29)$$

Последнее уравнение, являющееся классическим уравнением диффузии (или теплопроводности), в математической физике прекрасно исследовано. Существуют, в частности, два его простых частных решения:

$$U=A-\exp(-\tilde{A}z)\cos\Theta, \qquad (10.29)$$

и

$$U=B+\hat{O}\left(\frac{\Theta}{\sqrt{4\tilde{A}z}}\right). \qquad (10.30)$$

В этих решениях *A* и *B* – произвольные константы, функция *Ф* – интеграл ошибок.

Вернемся к искомой переменной *V*. Для нее решения будут записаны в форме:

$$V = 2\tilde{A}\,\frac{\exp(-\tilde{A}z)\sin\Theta}{A - \exp(-\tilde{A}z)\cos\Theta}, \tag{10.31}$$

и

$$V = \sqrt{\frac{4\tilde{A}}{\pi z}}\,\frac{\exp\left(-\dfrac{\Theta^2}{4\tilde{A}z}\right)}{B + \hat{O}\left(\dfrac{\Theta}{\sqrt{4\tilde{A}z}}\right)}. \tag{10.32}$$

В соответствии с выбранными переменными функции *sin(Θ)* и *cos(Θ)* представляют собой обычные линейные бегущие волны. Тогда при больших *Гz* (далеко от источника) первое из решений будет ни чем иным, как линейной затухающей волной. При малых *Гz* решение квазипериодическое, но не синусоидальное. Второе решение является уединенным импульсом, который вблизи источника имеет несимметричную колоколообразную форму. По мере удаления от источника форма импульса приближается к гауссовой кривой.
При этом амплитуда импульса уменьшается, а его ширина увеличивается.

Большой интерес представляет еще одно, так называемое стационарное решение уравнения Бюргерса. Стационарность заключается в том, что решение зависит от координаты *x* только через переменную *τ* в (10.25), то есть через переменную *Θ* в (10.27), но не зависит от *x*, то есть и от *z* явно. Это означает, что при распространении не меняется форма решения. Иными словами, в системе координат, движущейся с фазовой скоростью, мы имеем неизменную картину зависимости от координаты. Для получения стационарного решения в (10.27) следует положить $\partial V/\partial z = 0$. Тогда оставшуюся часть в этом уравнении можно записать как:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \Theta} + \tilde{A}\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} = 0. \qquad (10.33)$$

Интегрирование по Θ приводит к уравнению:

$$\tilde{A}\frac{\partial V}{\partial \Theta} = const - \frac{V^2}{2}. \qquad (10.34)$$

Пусть $const = V_0^2/2$. Тогда стационарное решение представляется в виде:

$$\frac{V}{V_0} = th\left(\frac{V_0}{2\tilde{A}}(\Theta - \Theta_0)\right). \qquad (10.35)$$

Характер решения при $V_0 = 1$ и при различных значениях Γ представлен на рисунке 10.3. Решение представляет собой «ступеньку», перемещающуюся в пространстве с фазовой скоростью. Разумеется, соответствующий профиль должен быть сгенерирован источником.

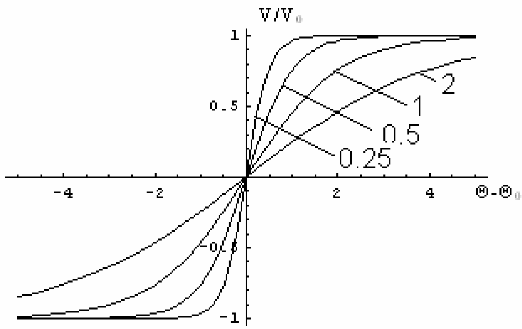


Рис. 10.3. Стационарное решение уравнения Бюргерса

Крутизна фронта определяется величиной Γ и составляет $\Delta\Theta = 2\Gamma$. При малой ширине $\Delta\Theta$ такое решение называется ударной волной. Подчеркнем, что ударная волна со стационарным профилем формируется именно при совместном действии нелинейности и диссипации.

10.3. Нелинейные волны в среде с дисперсией

Аналогично тому, как было «синтезировано» уравнение Бюргерса, учитывающее слабую нелинейность и потери энергии, можно сформулировать уравнение, учитывающее нелинейность и дисперсию. Во многих физических ситуациях работает закон кубической дисперсии:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0} + \beta\omega^3. \tag{10.36}$$

Внесение дисперсии такого вида в рассмотрение приводит к уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \tag{10.37}$$

которое получило название уравнения Кортевега–Де Фриза. Имеется общепринятая аббревиатура – уравнение КДФ.

Переходя к безразмерным переменным Θ, z и V, так же, как и в предыдущем разделе, и введя безразмерный параметр $D = \beta\omega^2 c_0^2/(\varepsilon u_0)$, можно представить (10.37) следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \Theta} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \Theta^3}. \tag{10.38}$$

Относительная роль дисперсии и нелинейности определяется величиной D.

Попытаемся снова найти стационарное решение, положив в (10.38) $\partial V / \partial z = 0$. Тогда первое интегрирование стационарного уравнения КДФ по Θ даст обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^2 V}{d\Theta^2} = \frac{1}{2}(V_0^2 - V^2). \tag{10.39}$$

Далее будем считать $V_0 = 1$.

Определим новую функцию:

$$W = V^3/6 - V/2. \tag{10.40}$$

При этом (10.39) будет выглядеть следующим образом:

$$D\frac{d^2V}{d\Theta^2} = -\frac{\partial W}{\partial V}. \tag{10.41}$$

Если переобозначить D в m, V в x, W в φ и Θ в t, то мы получим уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{10.42}$$

формально полностью совпадающее с уравнением одномерного (по оси x) движения материальной частицы с массой m в потенциальном поле $\varphi(x)$. В механике анализ характера движения частицы в потенциальном поле удобно проводить путем построения фазового портрета процесса, то есть представления траектории частицы в фазовом пространстве. В нашем случае «потенциал» W представляется кубической параболой (10.40), изображенной в верхней части рис. 10.4. В области изменения «координаты» V от точки B до точки C образуется потенциальная яма, в которой движение «частицы» имеет осциллирующий характер.

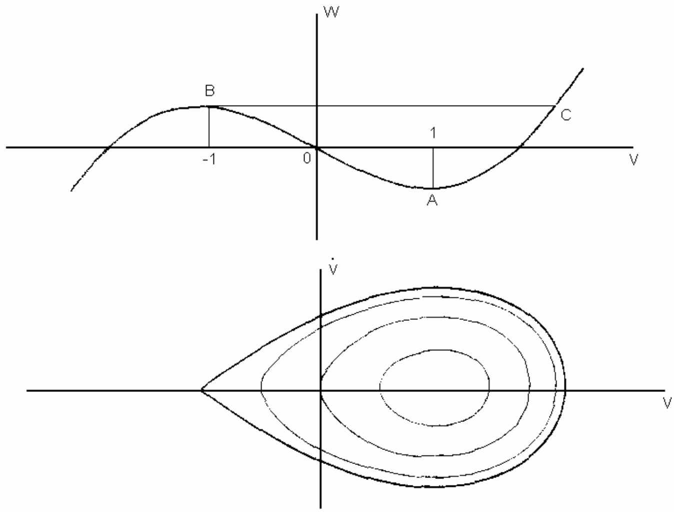


Рис. 10.4. Потенциал и фазовые траектории в решении уравнения КДФ

Фазовая траектория определяется уравнением, отражающим сохранение энергии:

$$D\frac{\dot{V}^2}{2}=h-W(V), \qquad (10.43)$$

где h является аналогом энергии «частицы». В нашем рассмотрении величина h определяется амплитудой волны. При малых значениях h происходят колебания вблизи дна потенциальной ямы – около точки A. При этом колебания периодические и почти гармонические. Возвращаясь к исходным переменным, мы можем говорить о почти линейных волнах. С увеличением h колебания, оставаясь периодическими, все больше отличаются от гармонических. Наибольший интерес представляет особое решение, лежащее на сепаратриссе фазового портрета, показанной на нижней части рис. 10.4 жирной линией. Можно показать, что в этом случае решение уравнения КДФ представляется в виде:

$$V = \frac{3}{ch^2\left(\frac{\Theta}{2\sqrt{D}}\right)} - 1 \qquad (10.44)$$

или для исходных переменных:

$$u = \frac{3u_0}{ch^2\left(\sqrt{\frac{\varepsilon u_0}{4c_0^2\beta}}\tau\right)} - u_0. \qquad (10.45)$$

Последнее решение уже не является периодическим, а представляет собой так называемую уединенную волну, или солитон. График функции *V(Θ)* показан на рис. 10.5.

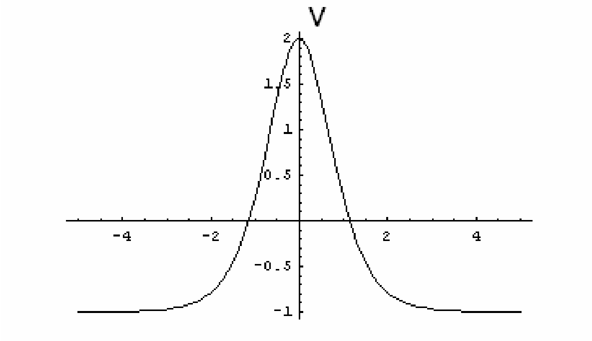


Рис. 10.5. Солитон (уединенная волна)

Поскольку аргументом функции является величина Θ, пропорциональная τ, которая, в свою очередь, пропорциональна $\omega t - kx$, мы можем видеть, что солитон перемещается с фазовой скоростью без изменения формы. Подчеркнем, что это отнюдь не то самое обобщенное решение линейного волнового уравнения, которое рассматривалось в начале книги. Солитон формируется именно в результате совместного действия нелинейности и дисперсии.

Механическая аналогия солитона имеет глубокий физический смысл. Так, например, можно говорить об упругих и неупругих столкновениях солитонов, обмену энергиями при взаимодействии солитонов. Хотя факты наблюдения солитонов, например, в виде уединенных волн на поверхности воды, фиксировались столетия назад, понимание физических процессов их формирования и распространения – заслуга физики последних десятилетий. Солитоны обнаруживаются в разнообразных физических условиях и краткое описание этого явления, приведенное здесь в конце книги, призвано подчеркнуть то, что физика солитонов является интереснейшим и наиболее современным разделом теории волн.

Библиографический список

1. *Белоцерковский Г. Б.* Основы радиотехники и антенны. Ч. 1. Основы радиотехники. – М. : Сов. радио, 1969.

2. *Калитеевский Н. И.* Волновая оптика. – М. : Высш. школа, 1995.

3. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. – М. : Наука, 1979.

4. *Крауфорд Ф.* Берклеевский курс физики. Т. 3. Волны.– М. : Наука, 1976.

5. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. – М. : Наука, 1967.

6. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Кн. 4. Оптика, волны. – М. : Наука. Физматгиз, 1998.

7. *Иродов И. Е.* Волновые процессы. Основные законы. – М. ; СПб. : Физматгиз, 1999.

8. *Кравченко И. Т.* Теория волновых процессов. – М. : Изд-во УРСС, 2003.

9. *Карлов Н. В., Кириченко Н. А.* Колебания, волны, структуры. – М. : Физматгиз, 2003.

10. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. – М. : Наука, 1992.

Всеволод Борисович Иванов

ТЕОРИЯ ВОЛН
Курс лекций

Редактор М. А. Айзиман
Компьютерная верстка: И. В. Карташова-Никитина
Дизайн обложки: М. Г. Яскин

Темплан 2006 г. Поз. 29.

Подписано в печать 12.04.06. Формат 60x84 1/16.
Печать трафаретная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 12,0 Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 100 экз.

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36; тел. 24–14–36