ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРОБЛЕМА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Коренблит С.Э., Семенов В.В.

Свободные физические поля: $\Lambda_i(\partial)\phi_i(x) = 0.$ (1)

Поля и уравнения Гейзенберга: $\Lambda_i(\partial)\Psi_i(x) = \mathcal{O}[\Psi_i(x)].$ (2)

Основная задача, – найти решение этих уравнений в виде:

$$\Psi(x) \overset{\text{(w)}}{=} \Upsilon[\phi(x)]. \tag{3}$$

Имеем следующее равенство в слабом смысле:

$$H \overset{\text{(w)}}{=} H_0 + W_0, \quad \text{то есть:} \quad \langle a|H|b\rangle = \langle a|H_0|b\rangle + W_0\langle a|b\rangle, \tag{4}$$

определяющее динамическое отображение (3), где W_0- некоторое c- число, а $|a\rangle$ и $|b\rangle$, – векторы в фоковском пространстве физических частиц. Общую форму динамического отображения можно записать в виде разложения Хаага:

$$\Psi_i(x) = \chi_i + \sum_j Z_{ij}^{\frac{1}{2}}\phi_j(x) + \sum_{j,k}\int d^4y_1\int d^4y_2\, F_{ijk}(x,y_1,y_2) : \phi_j(y_1)\phi_k(y_2) : + \dots$$

где i, j, k - индексы различных физических полей, χ_i - c числовые константы (отличные от нуля только для бесспиновых полей), Z_{ij} - c числовые константы, ответственные за перенормировку, двойные точки означают нормальное упорядочивание относительно свободного поля ϕ_i, $F_{ijk}(x,y_1,y_2)$ - c чиловые функции, многоточие означает сумму нормальных произведений возрастающего порядка. Функции: χ_i, Z_{ij}, $F_{ijk}(x,y_1,y_2)$, определяются самосогласованным способом.

Имеется два существенно различных выбора начального момента времени t_0:

(Гринберг, Умедзава) $t_0 \to -\infty$:	(Фаддеев, Широков) $t_0 = 0$:
неоператорное начальное условие	операторное начальное условие
(w) $\lim\limits_{t\to-\infty} \langle a \mid \Psi(\vec{\mathrm{x}}, t) - \psi_{in}(\vec{\mathrm{x}}, t) \mid b \rangle = 0$	(s) $\lim\limits_{t\to 0} \Psi(\vec{\mathrm{x}}, t) = \Psi\left[\psi(\vec{\mathrm{x}}.0)\right]$
$\{\psi_{in}[A_{in}]\}$ = неполное пространство Фока	$\{\psi[A]\}$ = полное пространство Фока
необходимо новое поле V_{in} для каждого связанного состояния	отсутствие новых полей для связанных состояний
$H \overset{(\mathrm{w})}{=} H_0\{A_{in}\} + H_0\{V_{in}\} + ? \ldots,$	$H \overset{(\mathrm{s})}{=} H_0\{A\} + H_I\{A\}, \qquad (\star)$

Здесь $\mid a\rangle$, $\mid b\rangle$ произвольные нормируемые состояния; A-операторы рождения, уничтожения физических состояний; (w) и (s) отмечают слабые и сильные (операторные) равенства соответственно.

Лагранжиан модели Федербуша записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{\xi=1,2} \overline{\Psi}_\xi(x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\xi\right) \Psi_\xi(x) - \tag{5}$$

$$-2\pi\lambda\epsilon_{\mu\nu} J^\mu_{1(\Psi)}(x) J^\nu_{2(\Psi)}(x),$$

$$J^\nu_{\xi(\Psi)}(x) = \overline{\Psi}_\xi(x)\gamma^\nu\Psi_\xi(x), \tag{6}$$

Из Лагранжиана вытекают гейзенберговские уравнения движения:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_1)\Psi_1(x) = 2\pi\lambda\epsilon_{\mu\nu} J^\nu_{2(\Psi)}(x)\gamma^\mu\Psi_1(x), \tag{7}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_2)\Psi_2(x) = 2\pi\lambda\epsilon_{\nu\mu} J^\nu_{1(\Psi)}(x)\gamma^\mu\Psi_2(x)\ .$$

Линеаризация "тока" взаимодействия:

$$V_{-\xi(\Psi)}(x) = \xi 2\pi\lambda\epsilon_{\mu\nu}\gamma^0\gamma^\mu J^\nu_{-\xi(\Psi)}(x), \quad \text{дает :}$$

$$V_{-\xi(\Psi)}(x) = e^{iH_{(\Psi)}t} V_{-\xi(\Psi)}(x^1,0) e^{-iH_{(\Psi)}t} \Rightarrow e^{iH_{0(\Psi)}t} V_{-\xi(\Psi)}(x^1,0) e^{-iH_{0(\Psi)}t}$$

$$\Rightarrow e^{iH_{0(\psi)}t} V_{-\xi(\psi)}(x^1,0) e^{-iH_{0(\psi)}t} \Rightarrow V_{-\xi(\psi)}(x),\ \ J^\nu_{-\xi(\Psi)}(x) \Rightarrow J^\nu_{-\xi(\psi)}(x),$$

где вторая строка пишется именно на том основании, что только этот "ток" определяет взаимодействие в уравнениях Гейзенберга (7), и в силу которых же для него:

$$i\partial_t V_{-\xi(\Psi)}(x) \Longrightarrow \left[V_{-\xi(\Psi)}(x)\,, H_{0(\Psi)}(t)\right]\ . \tag{8}$$

Взаимосвязь операторного функционала и ГП:

$$\Psi_\xi(x^1,T) = \int dy^1 \mathcal{Y}_{(\psi_{-\xi})}(T,x^1|y^1,0)\Psi_\xi(y^1,0) =$$

$$= \int dy^1 \mathcal{Y}_{(\psi_{-\xi})}(T,x^1|y^1,t)\Psi_\xi(y^1,t)\,. \qquad (9)$$

Операторный функционал:

$$\mathcal{Y}_{(\psi_{-\xi})}(T,x^1|y^1,0) = \int\limits_{x^1(0)=y^1}^{x^1(T)=x^1} \mathcal{D}x^1(\eta)\,\cdot \qquad (10)$$

$$\cdot\, \mathcal{T}_{\psi_{-\xi}}\left[\exp\left\{i\xi 2\pi\lambda \int\limits_0^T d\eta [J^1_{-\xi(\psi)}\left(x^1(\eta),\eta\right) - \dot{x}^1(\eta) J^0_{-\xi(\psi)}\left(x^1(\eta),\eta\right)]\right\}\right]\cdot$$

$$\cdot \int \mathcal{D}p^1(\eta)\mathcal{T}_\gamma\left[\exp\left\{-i\int\limits_0^T d\eta\big(\gamma^5 p^1(\eta) + m_\xi\gamma^0 - p^1(\eta)\dot{x}^1(\eta)\big)\right\}\right].$$

Соотношения бозонизации:

$$\epsilon_{\mu\nu} J^\nu_{-\xi(\psi)}(x) = \frac{\partial_\mu \Phi_{-\xi}(x)}{\sqrt{c}}, \qquad (11)$$

где Лагранжиан Синус-Гордон для поля $\Phi_{-\xi}(x)$:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x) + \upsilon(\cos\beta\Phi(x) - 1), \qquad (12)$$

дают:

$$\mathcal{T}_{\psi_{-\xi}}[\ldots] = \mathcal{T}_{\Phi_{-\xi}}\left[\exp\left\{-i\,g\int\limits_0^T d\eta \frac{d}{d\eta}\Phi_{-\xi}\left(x^1(\eta),\eta\right)\right\}\right]\,. \qquad (13)$$

$$g = \frac{\xi 2\pi\lambda}{\sqrt{c}}. \qquad (14)$$

Оператор, связывающий свободные Дираковские безмассовые $\chi(x^1,t)$ и массивные $\psi(x^1,t)$ поля, имеет вид:

$$\psi(x^1,t) = G^{-1}(t)\chi(x^1,t)G(t),$$
$$G(t) = \mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy^1 \left(-im\overline{\chi}(y^1,\eta)\chi(y^1,\eta)\right)\right\}\right],$$
$$\text{откуда}:\ \Phi_{-\xi}(x^1,t) = G^{-1}_{-\xi}(t)\phi(x^1,t)G_{-\xi}(t),$$

где для свободного (безмассового) псевдоскалярного поля $\phi(x)$:

$$\epsilon_{\mu\nu}j^{\nu}_{(\chi)}\left(x^1(\eta),\eta\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}\partial_\mu\left\{\phi\left(x^1(\eta),\eta\right)\right\},\ \ \upsilon\cos(\beta\phi(x)) = \overline{\chi}(x)\chi(x),$$
$$\mathcal{T}_\phi\left[\exp\left\{-ig\int\limits_0^T dt\frac{d\phi(x^1(t),t)}{dt}\right\}\right] = U(T)U^{-1}(0),$$
$$U(T) = \exp\left\{-i\frac{g^2}{4}\theta\left[1-\left(\dot{x}^1(T)\right)^2\right]\right\}\exp\left\{-i\varphi(T)\right\}.$$

Привлекая операторную формулу:

$$\mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^T d\eta\left(A(\eta)+B(\eta)\right)\right\}\right] = \mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^T d\eta A(\eta)\right\}\right]\cdot$$
$$\cdot\mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^T d\eta C(\eta)\right\}\right],\qquad \text{где}$$
$$C(\eta) = \left(\mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^\eta ds A(s)\right\}\right]\right)^{-1}B(\eta)\mathcal{T}\left[\exp\left\{\int\limits_0^\eta ds A(s)\right\}\right],$$

и условие локальности на пространственноподобных интервалах:

$$y = (\eta, y^1),\ \ x(\eta) - y = (0, x^1(\eta) - y^1),$$

$$[\phi(x^1(\eta),\eta),\phi(y^1,\eta)] = D_m(x(\eta)-y) \equiv 0,$$

с учетом перенормировки решения однородного ГУ, имеем решение для модели Федербуша в следующей форме:

$$\Psi_\xi(x^1,T) = \exp\left\{- i\frac{g^2}{4}\theta\left[1-\left(\dot{x}^1(T)\right)^2\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot \vdots \exp\left\{-ig\Phi_{-\xi}(x^1,T)\right\}\vdots\, \psi_\xi(x^1,T)\,, \qquad (15)$$

где $g = \frac{\xi 2\pi\lambda}{\sqrt{c}}$. При этом, найденное здесь решение содержит по сравнению с ранее известным решением Вайтмана дополнительный фазовый c- числовой множитель:

$$\exp\left\{- i\frac{g^2}{4}\theta\left[1-\left(\dot{x}^1(T)\right)^2\right]\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \exp(-ig^2/4), & \left(\dot{x}^1(T)\right)^2 < 1 \\ 1, & \left(\dot{x}^1(T)\right)^2 > 1 \end{cases} \qquad (16)$$

Появление параметра скорости $\left(\dot{x}^1(T)\right)^2$ является артефактом двумерия, тесно связанным с нулевыми модами свободного безмассового псевдоскалярного поля, обязанными безразменности перестановочной функции в двумерии: $\varrho = (x-y)^2$,

$$D_m(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2)e^{-i(k\cdot(x-y))} =$$
$$= \frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2}\theta(\varrho)J_0(m\sqrt{\varrho}), \qquad D_m(x-y)=0, \;\text{ при }\; x^0 = y^0,$$
$$D_0(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\varepsilon(k^0)\delta(k^2)e^{-i(k\cdot(x-y))} = \frac{\varepsilon(x_0-y_0)}{2}\theta(\varrho).$$

Регуляризация и перенормировка псевдоскалярного двумерного Синус-Гордоновского поля:

$$\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n) = \vdots\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\vdots + \tag{17}$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{P}\langle 0|\Phi(x_{i_1})\ldots\Phi(x_{i_r})|0\rangle\vdots\Phi(x_{j_1})\ldots\Phi(x_{j_{n-r}})\vdots,$$

где сумма $\sum\limits_{P}$ берётся по всем разбиениям индексов (1,...,n) на различные группы $i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_{n-r}$, причём: $i_1,i_2<\ldots<i_r,j_1<j_2,\ldots<j_{n-r}$, а также, $1\leq r\leq n$.

Перенормированное определение n-ой степени псевдоскалярного поля тогда дается пределом:

$$\vdots\Phi^n\vdots(x) = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to x}\vdots\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\vdots\ , \tag{18}$$

а перенормированная операторная экспонента определяется выражением:

$$\vdots\exp\{-ig\Phi(x)\}\vdots\ =\ \frac{\exp\{-ig\Phi(x)\}}{\langle 0|\exp\{-ig\Phi(0)\}|0\rangle}\ . \tag{19}$$